Exercice 1 : Ordres de grandeur

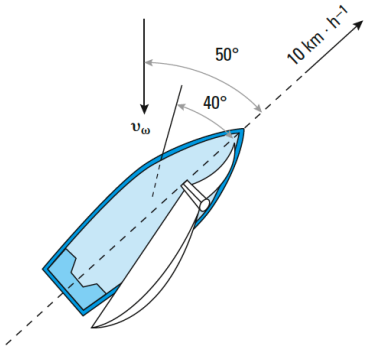
On considère une expérience qui se réalise sur une distance caractéristique L avec une vitesse caractéristique v.

1. Exprimer la durée caractéristique T de l'expérience.
2. À l'aide de l'expression de l'accélération de Coriolis, exprimer la distance caractéristique L_C du phénomène dû à la force d'inertie de Coriolis en fonction de la période T_r de rotation de la Terre sur elle-même, de la vitesse v caractéristique de l'expérience et de la durée T de l'expérience, puis en fonction de T_r, L et v (on appellera ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même).
3. Calculer L_C dans le cas de phénomènes atmosphérique (dépression, anticyclone) dont la longueur caractéristique est $L = 1\ 000$ km et la vitesse caractéristique $v = 10$ m.s^{-1}. Conclusion.
4. Calculer L_C dans le cas d'évacuation de l'eau d'un lavabo, phénomène de longueur caractéristique $L = 10$ cm et de vitesse caractéristique $v = 10$ cm.s^{-1}.
   Conclusion.

I - Changement de référentiels

Exercice 2 : Bateau à voile

Un bateau à voile se déplace dans la direction indiquée sur la figure suivante à la vitesse de 10 km.h^{-1} par-rapport à la mer que l'on suppose immobile grâce à un vent du nord qui souffle à la vitesse v_ω. Un appareil présent sur le bateau indique que le vent relatif (vent mesuré depuis le bateau) fait un angle de 40° avec la direction d'avancée du bateau.



Quelle est la "vraie" vitesse du vent du nord v_ω ?

Exercice 3 : Traversée d'un tapis roulant †

Lors d'un jeu télévisé, un joueur A doit traverser un tapis roulant de largeur a, pour donner un paquet à un second joueur B. Le tapis se déplace à une vitesse constante $\vec{V}_t$ par rapport au sol. Lorsque le joueur court sur le tapis, sa vitesse par rapport au tapis a pour norme V constante.

1. Le joueur A se déplace avec une vitesse $\vec{V}$ perpendiculaire au bord du tapis. Où doit se placer B pour réceptionner le paquet ? Quel est le temps t_1 de traversée du tapis ?
2. Pour le deuxième essai, le joueur B est posté en face du joueur A. Dans quelle direction A doit-il courir ? Quel est le temps de traversée t_2 ?
3. On suppose maintenant que la vitesse $\vec{V}$ fait un angle θ quelconque avec $\vec{V}_t$. Déterminer le temps de traversée t_3 en fonction de a, V et θ. Pour quelle valeur de θ le temps de traversée est-il le plus court ?

Exercice 4 : Insecte sur l'aiguille des secondes †

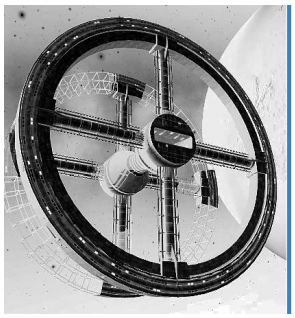
Un insecte se déplace sur l'aiguille des secondes d'une horloge qui a une longueur égale à 20 cm. À l'instant $t = 0$ l'insecte est au centre de l'horloge, l'aiguille marquant 15 s, et 60 s plus tard il arrive à l'extrémité de l'aiguille. Il se déplace à vitesse constante par rapport à l'aiguille.

1. Dans cette question on repère l'insecte par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le référentiel lié à l'horloge. On prend $\theta = 0$ pour repérer la verticale ascendante.
   (a) Exprimer r et θ en fonction du temps.
   (b) Construire la trajectoire de l'insecte à l'aide de quelques points.
   (c) Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération de l'insecte. Calculer leurs normes pour $t = 52{,}5$ s. Les dessiner à cet instant.
2. Retrouver l'expression de la vitesse et de l'accélération en considérant l'insecte se déplaçant dans un référentiel $\mathcal{R}_A(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en rotation par rapport à celui de la première question, l'axe (Ox) étant confondu avec l'aiguille.

II - Dynamique en référentiel galiléen

Exercice 5 : pesanteur artificielle

Dans le film 2001, l'odyssée de l'espace de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore tourne à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de la terre, les astronautes vivent dans le tore avec une gravité artificielle identique à celle sur terre. On voit même dans le film, un des astronautes effectuer un jogging dans ce tore.





1. Proposer un rayon de vaisseau et une vitesse angulaire de rotation afin que les astronautes soient soumis à une pesanteur identique à celle existant sur terre. Pour des raisons physiologiques on veillera à ce que l'écart de gravité entre la tête et les pieds n'excède pas 10%.
2. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant de courir dans le vaisseau.
3. Le sens de rotation du footing est-il important ?

Exercice 6 : Bille dans un tube †

On considère une bille M de masse m susceptible de se déplacer sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique. Les grandeurs r_0 et v_0 caractérisent la position et la vitesse de M à l'instant initial $t = 0$ dans le repère lié au tube. Le tube de longueur 2ℓ est dans le plan horizontal et tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante.

1. Déterminer l'équation différentielle en r du mouvement de M.
2. Calculer le temps τ que mettra M pour sortir du tube avec $\ell = 0,1$ m ; $r_0 = 0,01$ m ; $v_0 = 0$ m.s^{-1} ; $\omega = 2$ rad.s^{-1}.
3. Un ressort enfilé dans le tube est fixé à son extrémité en O et à son autre extrémité à la bille M. La longueur à vide du ressort est $2r_0$. Discuter la nature du mouvement de M suivant la valeur de ω.

Exercice 7 : fusée de Tryphon †

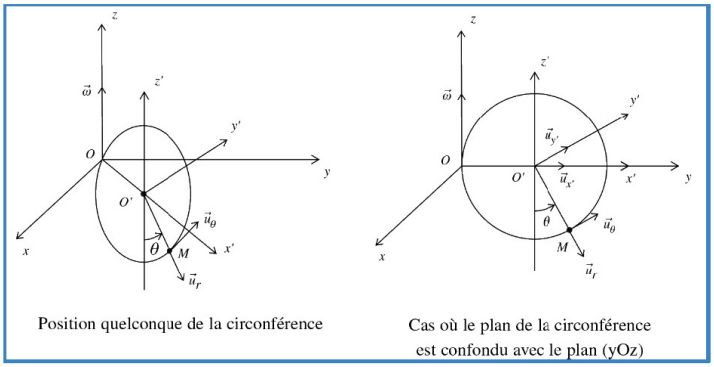
Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune" l'accélération de la fusée maintient une pesanteur égale à la pesanteur terrestre d'après le Professeur Tournesol. On considère le référentiel géocentrique R_G galiléen. On rappelle la force d'attraction gravitationnelle exercée par un astre A de masse m_A sur un corps M de masse m :

$$\vec{A}_A(M) = -Gm_A.m\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}$$

1. Lors de la première phase du voyage, la fusée s'éloigne de la Terre. Quelle accélération $\vec{a}_e$ la fusée doit-elle avoir par rapport au référentiel R_G pour que les passagers ressentent la même pesanteur qu'à la surface de la Terre ? On note R_T le rayon de la Terre et l'on considère que l'attraction lunaire est négligeable.
2. Dans la deuxième phase du voyage, la fusée s'est retournée et n'est plus soumise qu'à l ?attraction lunaire. Quelle doit-être la nouvelle accélération pour que les passagers aient l'impression d'être sur Terre ? On considérera que le référentiel lié à la Lune est aussi galiléen.

Exercice 8 : Circonférence en rotation ††

Une circonférence (C) de centre O' et de rayon a, située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz, d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation ω. Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par O'. θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.



1. Écrire le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\vec{u}_\theta$ dans le référentiel $R' = \{O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}, t\}$ lié au cercle et en rotation dans le référentiel galiléen $R = \{O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t\}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.
2. Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.
3. Montrer que les positions d'équilibre dans R' vérifient : $a\omega^2(1+\sin(\theta)) = g\tan(\theta)$. On désire que l'équilibre stable corresponde à $\theta = 30°$. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0,2$ m et $g = 9,8$ m.s^{-2} ?

III - Solide en rotation autour d'un fixe fixe d'un référentiel galiléen

Exercice 9 : Timber !

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle qu'il fait avec la verticale.

A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = \frac{1}{3}mL^2$

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right)}$$

3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}. On donne, pour $\theta_0 = 5°$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0)-\cos(\theta)}} = 5,1$

Exercice 10 : Volant d'inertie ††

1. *Régime transitoire* : Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe, est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant. Étudier le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\Omega$, où Ω est la

vitesse angulaire de rotation. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire Ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système.

2. *Influence d'une vibration* : On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ avec un taux de modulation η :

$$\Gamma = \Gamma_0(1 + \eta\cos(\omega t))$$

Reprendre l'étude du mouvement en établissant l'équation différentielle définie par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que :

$$\Omega(t) = \Omega_0(1 + \varepsilon(t))$$

Montrer que, au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω que l ?on cherchera sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \alpha\cos(\omega t + \psi)$$

Déterminer les constantes α et ψ en fonction des données ω, η et τ.

3. À l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie.