Exercice 1 : Ordres de grandeur

1. $T = \frac{L}{v}$
2. $a_c = 2\omega.v_r$ or une accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré, soit $a_c = \frac{L_C}{T^2}$, $\omega = \frac{2\pi}{T_r}$ et $v_r = v$, soit $L_C = 4\pi\frac{vT^2}{T_r}$; en utilisant la question 1., $T = \frac{L}{v}$, soit $L_C = 4\pi\frac{L^2}{vT_r}$
3. Ici $L_C \sim 1.10^3$ km $\approx L$; la force de Coriolis joue un rôle important dans ce phénomène.
4. $L_C = 1.10^{-6}$ m $\ll L$; La déviation d'une particule d'eau est donc de l'ordre de 1 μm lors de la traversée du lavabo ; ce n'est donc pas une explication du sens d'enroulement de l'eau car n'importe quelle imperfection du lavabo ou imprécision sur les conditions initiales risque d'être très supérieure à 1 μm.

I - Changement de référentiels

Exercice 4 : Insecte sur l'aiguille des secondes †

1. (a) $\theta(t) = \omega.t$ où $\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ est la vitesse de rotation de l'aiguille. Si on note ℓ la longueur de l'aiguille, $r(t) = v.t$ ($r(0) = 0$). L'insecte parcourt ℓ en 60 s, d'où $v = \frac{20.10^{-2}}{60} = 3,3.10^{-3}$ m.$^{-1}$.
   (b) La trajectoire est une spirale.
   (c) $\vec{v} = 3,3.10^{-3}\vec{u}_r + v.t\omega\vec{u}_\theta$; $\vec{a} = -v.t\omega^2\vec{u}_r + 2v\omega\vec{u}_\theta$.
2. Dans $\mathcal{R}_A$, l'insecte a un mouvement rectiligne uniforme le long de Ox : $\vec{v}^{\mathcal{R}_A} = v\vec{u}_x$ et $\vec{a}^{\mathcal{R}_A} = \vec{0}$. Le point coïncident avec l'insecte à l'instant t a dans $\mathcal{R}$ un mouvement circulaire uniforme de rayon $r(t)$, soit : $\vec{v}_e = r(t)\dot{\theta}\vec{u}_y$ et $\vec{a}_e = -r(t).\dot{\theta}^2\vec{u}_x$. La ldc des vitesses donne

$$\vec{v}^{\mathcal{R}} = \vec{v}^{\mathcal{R}_A} + \vec{v}_e = v\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

   $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_r$ sont identiques.
   De même la ldc des accélérations donne

$$\vec{a}^{\mathcal{R}} = \vec{a}^{\mathcal{R}_A} + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0} - r(t)\dot{\theta}^2\vec{u}_r + 2\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge v\vec{u}_r$$

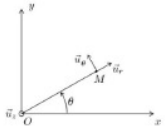
   Là aussi c'est la même expression. Il est remarquable que l'accélération dans $\mathcal{R}$ ne soit due qu'à l'accélération d'entraînement et à l'accélération de Coriolis.

II - Dynamique en référentiel galiléen

Exercice 5 : pesanteur artificielle

1. $a_e = R\omega^2$; on veut $R\omega^2 = g$ et $(R-h)\omega^2 = 0,9.g$ en résolvant le système, on trouve $\frac{R-h}{R} = 0,9 = a$ et donc $R = \frac{h}{1-a} = 18$ m ; $\omega = 0,738$ rad.s^{-1}
2. Quand $v_r \neq 0$, la force de Coriolis intervient.
   $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = 2m\Omega v_r\vec{u}$ où $\vec{u}$ est vers l'extérieur (donc le sol) si le joggeur tourne dans le même sens que la roue (vers l'intérieur si le joggeur tourne en sens inverse). Cette force s'ajoute donc à la force d'inertie d'entraînement pouvant causer une "gravité" plus importante (ou plus faible).
3. Oui, on se sentira alourdi si on court dans le sens de rotation et allégé dans l'autre sens.

Exercice 6 : Bille dans un tube †



a) Système : bille de masse m

b) Référentiels : $\mathfrak{R}_0 = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, t\right)$ galiléen et $\mathfrak{R} = \left(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}, t\right)$ non galiléen. Le vecteur rotation instantané de $\mathfrak{R}$ par rapport à $\mathfrak{R}_0$ vaut : $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} = \omega\vec{k}$.

Le mouvement relatif dans $\mathfrak{R}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$; $\vec{v}\,(M)_{\mathfrak{R}} = \dot{r}\,\vec{u}_r$ et $\vec{a}\,(M)_{\mathfrak{R}} = \ddot{r}\,\vec{u}_r$.

Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ est fixe dans $\mathfrak{R}$. La dérivée par rapport au temps de $r\,\vec{u}_r$ dans $\mathfrak{R}$ donne bien $\dot{r}\,\vec{u}_r$.

c) Bilan des forces :

- Le mouvement se fait sans frottement, la réaction du support est donc orthogonale au petit déplacement de la bille par rapport au tube. La réaction du support a donc une composante nulle sur $\vec{u}_r$. La réaction du support est donc $\vec{R} = R_1\vec{u}_\theta + R_2\vec{k}$
- Le poids de la masse m est : $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force d'inertie d'entraînement est : $\vec{f}_{ie}\,(M) = m\omega^2\overrightarrow{OM}$
  car le point coïncidant avec M à un instant t a une trajectoire circulaire uniforme de centre O.
- La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic}\,(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}\,(M)_{\mathfrak{R}} = -2m\omega\dot{r}\,\vec{u}_\theta$$

d) Principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}\,(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

La projection dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}\right)$ donne :

$$\begin{cases} m\ddot{r} = m\omega^2 r \\ 0 = R_1 - 2m\omega\dot{r} \\ 0 = R_2 - mg \end{cases}$$

L'équation différentielle du mouvement s'obtient à partir de la première projection du PFD :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

2. L'équation caractéristique s'écrit : $x^2 - \omega^2 = 0$. On en déduit alors

$$x = \pm\omega$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$r = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t)$$

La dérivée de r par rapport au temps est :

$$\dot{r} = A\omega\exp(\omega t) - B\omega\exp(-\omega t).$$

À $t = 0$, $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = v_0$.

On a deux équations pour déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} A + B = r_0 \text{ (éq.1)} \\ A\omega - B\omega = v_0 \text{ (éq.2)} \end{cases}$$

On fait les combinaisons linéaires suivantes : $(1)\omega + (2)$ et $(1)\omega - (2)$.

On a alors : $\begin{cases} 2A\omega = r_0\omega + v_0 \\ 2B\omega = r_0\omega - v_0 \end{cases}$. D'où :

$$\begin{cases} A = \dfrac{r_0\omega + v_0}{2\omega} \\ B = \dfrac{r_0\omega - v_0}{2\omega} \end{cases}$$

La bille quitte le tube pour $r = \ell$. Soit :

$$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)\exp(\omega t) + \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{v_0}{\omega}\right)\exp(-\omega t) = \ell$$

On pose : $x = \exp(\omega t)$. En multipliant par $\exp(\omega t)$, on est ramené à une équation du second degré :

$$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{v_0}{\omega}\right) = \ell\,x$$

La résolution numérique donne : $x = 19{,}95$ et $\tau = 1{,}5$ s.

3. L'équation différentielle s'écrit :

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r - k\,(r - 2r_0)$$

Elle se met sous la forme :

$$\ddot{r} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r = 2\frac{kr_0}{m}$$

- Si $\omega \geq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, le système diverge.
- Si $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique.

Ces deux résultat sont prévisibles physiquement. Si la constante de raideur est très petite, alors la force d'inertie d'entraînement l'emporte devant la force exercée par le ressort. Comme $\vec{f}_{ie}$ est centrifuge, on prévoit bien un système qui diverge.

Exercice 7 : fusée de Tryphon †

1. Le référentiel lié à la fusée est en translation dans le référentiel géocentrique avec une accélération $\vec{a}$. Dans ce référentiel, un passager P de masse m est soumis à l'attraction gravitationnelle de la terre, à la réaction $\vec{R}$ du sol de la fusée et à la force d'inertie d'entraînement. Le PFD s'écrit alors :
   $m\vec{a}_P = -ma\vec{u}_z - \frac{GmM_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_z + \vec{R}$ où $\vec{u}_z$ est unitaire dirigé dans le sens de déplacement de la fusée, de la Terre vers la Lune. Si les passagers ressentent la même attraction qu'à la surface de la Terre, cette équation s'écrit aussi : $m\vec{a}_P = -\frac{GmM_T}{(R_T)^2}\vec{u}_z + \vec{R}$. On en déduit :

$$\vec{a} = GM_T\left(\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T+h)^2}\right)\vec{u}_z$$

   On remarque que la relation est valable quelle que soit la masse du passager. Au départ, l'accélération doit être nulle ce qui est normal, mais la fusée ne pourrait bien sûr pas décoller...
   Pendant le trajet, la relation précédente nous indique que $\vec{a}$ dépend de la distance à la surface de la Terre ; il faut donc sans cesse ajuster la valeur de l'accélération ce qui semble difficile.

2. De même, on obtient

$$\vec{a} = G\left(\frac{M_T}{R_T^2} - \frac{M_L}{(R_L+h)^2}\right)\vec{u}_z$$

   où h est l'altitude par rapport à la surface lunaire.

Exercice 8 : Circonférence en rotation ††

1. $$ma\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + ma\omega^2(1+\sin(\theta))\cos(\theta)$$
2. $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 + cte$; $E_{p,pes} = mgz' + cte$ Il reste à exprimer la coordonnée z' en fonction de θ : $z' = -a\cos(\theta)$ (schéma de droite) ; $HM = a + x' = a(1+\sin(\theta))$
   Le TPM donne :
   $$ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin(\theta)\dot{\theta} - \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.2\cos(\theta)\dot{\theta}(1+\sin(\theta))$$
   En divisant par $\dot{\theta}$ on retrouve le même résultat.
3. On caractérise les positions d'équilibre par $\ddot{\theta} = 0$ soit $a\omega^2(1+\sin(\theta)) = g\tan(\theta)$ (que l'on peut retrouver avec $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$, l'intérêt étant que l'on peut justifier la stabilité des positions d'équilibre avec le signe de $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}$)

III - Solide en rotation autour d'un fixe fixe d'un référentiel galiléen

Exercice 9 : Timber !

1. Système : tige solide ; référentiel terrestre galiléen, BAME : poids, réaction du support (force centrale). Le TMC donne $J\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$ (l'angle est compté à partir de la verticale)
   soit $\ddot{\theta} - \frac{3g}{2L}\sin(\theta) = 0$
2. On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre par-rapport au temps entre θ_0 et θ : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))$ d'où le résultat.
3. On déduit $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$ que l'on intègre de $t = 0$ à T lorsque l'arbre est au sol. La donnée permet de trouver $T = 5,1$ s

Exercice 10 : Volant d'inertie ††

1. TMC par-rapport à l'axe du rotor : $J\dot{\Omega} = \Gamma_0 - k\Omega$, soit $\Omega(t) = \frac{\Gamma_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = \frac{J}{k}$; $\Omega_0 = \frac{\Gamma_0}{k}$.
2. Il y a ici un forçage sinusoïdal (moment sinusoïdal appliqué au rotor), on est donc en RSF, l'idéal est de passer en complexe.
   $\underline{\Gamma} = \Gamma_0\left(1 + \eta e^{j\omega t}\right)$ et $\underline{\Omega} = \Omega_0\left(1 + \underline{\alpha}e^{j\omega t}\right)$ avec $\underline{\alpha} = \alpha e^{j\psi}$.
   Le TMC en complexe donne $J\dot{\underline{\Omega}} = \underline{\Gamma} - k\underline{\Omega}$, soit $j\omega J\underline{\alpha}e^{j\omega t} = \Gamma_0\left(1 + \eta e^{j\omega t}\right) - k\Omega_0\left(1 + \underline{\alpha}e^{j\omega t}\right)$ soit $j\omega J\underline{\alpha}e^{j\omega t} = \Gamma_0\eta e^{j\omega t} - k\Omega_0\underline{\alpha}e^{j\omega t}$ car $\Gamma_0 = k\Omega_0$.
   On obtient $\underline{\alpha}\left(j\omega J + k\Omega_0\right) = \Gamma_0\eta$ soit $\underline{\alpha} = \frac{\eta}{1+j\omega\tau}$.
   $\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ et $\psi = -\arctan(\omega\tau)$.
3. Le volant d'inertie possède un moment d'inertie grand, car la majorité de sa masse est "loin" de l'axe de rotation, on augmente alors le moment d'inertie total, donc τ, ce qui a tendance à diminuer α (donc l'amplitude des vibrations).