Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. Encadrer *les résultats.*

Problème 1 : Faire l'image d'une exoplanète (CCS)

La détection des exoplanètes, planètes situées en dehors de notre système solaire, constitue l'un des domaines les plus fascinants et dynamiques de l'astronomie moderne. Depuis la découverte de la première exoplanète en 1995, les scientifiques en ont identifié des milliers d'autres, révélant une diversité de mondes au-delà de notre imagination.

Grâce à des techniques avancées telles que la méthode des transits, la méthode des vitesses radiales ou encore l'imagerie directe, les astronomes peuvent détecter et étudier ces lointaines planètes pour chercher à comprendre leur composition, leur atmosphère et leur potentiel d'habitabilité.

Dans ce sujet, on étudie la possibilité d'obtenir une image détaillée d'une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière du Soleil. Développer tout le formalisme nécessaire à la reconstruction d'une image complexe sort du cadre de ce sujet et on se ramène à une situation simplifiée : on considère deux points à la surface de l'exoplanète et on cherche à les distinguer ou à mesurer la distance qui les sépare.

Un formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé.

En 2022, la collaboration Event Horizon Telescope a réussi à construire une image dans le domaine des ondes radios du trou noir situé au centre de notre galaxie à l'aide du phénomène d'interférences. Dans cette partie, on détermine s'il est possible d'appliquer cette méthode pour obtenir l'image d'une exoplanète à partir d'une situation modèle simplifiée (la construction véritable d'une image à partir d'un ensemble de figures d'interférences n'est pas traitée).

1) Principe de la mesure sur un système équivalent

On illustre ici le principe de la mesure en analysant une expérience mettant en jeu les fentes d'Young. Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué des éléments suivants :

- deux sources ponctuelles S_A et S_B, incohérentes, séparées d'une distance d, qui émettent des ondes lumineuses monochromatiques de même amplitude à la longueur d'onde λ_0 ;
- une lentille convergente L_1, de centre O_1, de distance focale f_1' ;
- des fentes T_1 et T_2 de largeur notée ℓ, perpendiculaires au plan de la figure, dont les centres sont éloignés d'une distance a.
- une lentille convergente notée L_2, de distance focale f_2'.
- un écran, situé dans le plan focal image de la lentille L_2.

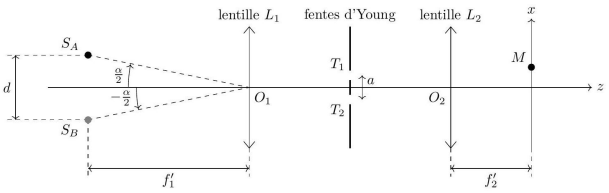


FIGURE 1 – Figure 1

Les sources S_A et S_B sont situées dans le plan focal objet de la lentille L_1. On note α l'angle positif $(S_BO_1S_A)$. Soit M un point d'abscisse x situé sur l'écran (voir figure 1). On admet que l'ordonnée y ne joue ici aucun rôle et on suppose que tous les angles d'incidence sont petits.

Pour commencer, on considère que seule la source S_A émet de la lumière (on ne prend pas en compte la source S_B). On note δ_{tot} la différence de marche au point M entre les rayons passant par chaque fente d'Young :

$$\delta_{\text{tot}} = (S_AT_2M) - (S_AT_1M)\,.$$

On la décompose en deux parties :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{source}} + \delta$$

où δ_{source} est la différence de marche introduite en amont des trous d'Young et δ celle introduite en aval :

$$\delta_{\text{source}} = (S_AT_2) - (S_AT_1) \quad \text{et} \quad \delta = (T_2M) - (T_1M)\,.$$

Q1. Établir l'expression de δ_{source} en fonction de a et $\alpha \ll 1$.

On suppose que S_A émet un signal de la forme $s(t) = s_0\cos(\omega t)$, où s_0 est une constante réelle positive et ω la pulsation de l'onde lumineuse.

Q2. Exprimer le signal $s_1(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_1, ainsi que le signal $s_2(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_2, en fonction de $s_0, \omega, t, k = \frac{2\pi}{\lambda_0}, (S_A T_1 M)$ et $(S_A T_2 M)$. On négligera la décroissance d'amplitude de l'onde liée à la propagation.

On appelle $I(M)$ l'intensité du signal mesuré au point M (notée également $I(\delta)$).

Q3. Donner l'expression de I à l'aide de s_1 et s_2 et éventuellement d'autres grandeurs. Déduire de celle-ci la relation

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos\left[k\left(a\frac{\alpha}{2} + \delta\right)\right]\right).$$

On tient désormais compte de la présence de la source S_B, en plus de celle de la source S_A.

Q4. Indiquer, avec justification, si les signaux issus de S_A interfèrent avec ceux issus de S_B. Montrer que l'intensité détectée au point M se met sous la forme

$$I_{\mathrm{d}}(\delta) = I_{\mathrm{d},0}(1 + \Gamma(a, \alpha)\cos(k\delta))$$

où la fonction Γ, appelée facteur de cohérence, est donnée par :

$$\Gamma(a, \alpha) = \cos\left(\alpha\frac{ka}{2}\right).$$

Q5. Tracer l'allure de $I_{\mathrm{d}}(\delta)$ en fonction de δ dans le cas où le facteur de cohérence vaut 1, puis dans le cas où le facteur de cohérence est nul.

L'expérience étudiÃľe a été conduite en utilisant l'écran d'un smartphone pour réaliser les deux sources. Le montage expérimental est représenté sur la figure 2. La lentille L_2 et l'écran sont respectivement l'objectif et le capteur CCD d'un appareil photographique numérique réglé à l'infini.

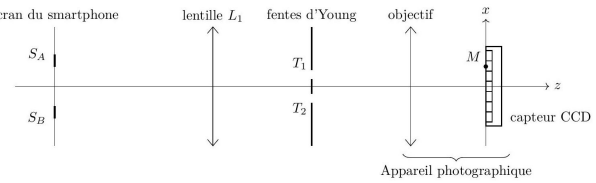


Figure 2 – Figure 2

La figure 3 précise la nature de l'image utilisée sur l'écran du smartphone : ce qui apparaît en blanc sur la figure correspond à du noir sur l'image réelle, tandis que les traits épais noirs correspondent à deux traits lumineux qui jouent le rôle de sources de lumière de longueur d'onde λ_0.
En analysant les résultats de l'expérience, il est possible de déterminer l'angle α. La figure 4 montre une partie de l'image donnée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de $\frac{\delta}{\lambda_0}$, où δ est la différence de marche introduite précédemment. Les paramètres sont les suivants : $a = 200\mu$ m, $\lambda_0 = 650$ nm, $f_1' = 80$ cm, $f_2' = 5,6$ cm.

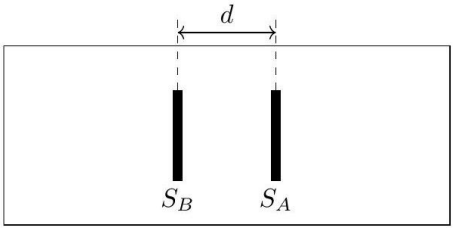
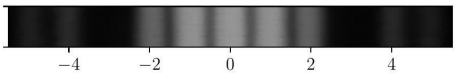


Figure 3 – Figure 3 - Schéma de l'image utilisée sur l'écran du smartphone (pas à l'échelle).



Q6. Calculer numériquement $\frac{ka}{2}$ pour cette expérience.

La lumière émise par la source n'est pas monochromatique : on peut considérer que l'incertitude-type sur λ_0 est $u(\lambda_0) =$ 30 nm.

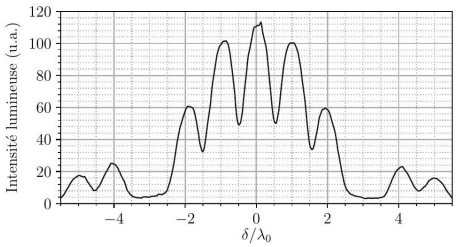


FIGURE 4 – Figure 4 - Image du dessus : photographie de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young. Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse pour la figure d'interférences. L'axe des abscisses est le même pour les deux figures.

Q7. En déduire l'incertitude-type sur $\frac{ka}{2}$.

On définit le contraste par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

où $I_{\max}$ est l'intensité lumineuse maximale au centre de la figure d'interférences et $I_{\min}$ l'intensité lumineuse sur les deux minimums qui encadrent la zone centrale d'intensité maximale.

Q8. Déterminer la valeur numérique du contraste pour cette figure d'interférences.

En changeant a et λ_0, il est possible de mesurer le contraste pour d'autres valeurs de $\frac{ka}{2}$. La figure de l'annexe (à rendre) montre ses variations en fonction de $\frac{ka}{2}$.

Q9. Ajouter votre point de mesure avec son incertitude-type sur l'annexe L'incertitude-type sur le contraste sera prise égale à 10 % de sa valeur.

Le contraste C est relié au facteur de cohérence Γ (introduit à la question **Q4.**) par $C = |\Gamma|$. Selon le modèle développé précédemment, on s'attend à observer pour C un comportement régi par la relation :

$$C = \left|\cos\left(\alpha\frac{ka}{2}\right)\right|.$$

On considère donc la fonction

$$\frac{ka}{2} \mapsto C_0\left|\cos\left(\alpha\frac{ka}{2}\right)\right|$$

et on cherche les valeurs des paramètres C_0 et α qui minimisent l'écart entre les points expérimentaux et les valeurs prises par cette fonction aux mêmes abscisses, un peu comme on le ferait pour une régression linéaire. Par ce procédé d'ajustement, on obtient les valeurs avec incertitudes-types suivantes :

$$\begin{array}{lll} C_0 = 0,421 & ; & u\left(C_0\right) = 0,010 \\ \alpha = 6,36 \times 10^{-4}\text{rad} & ; & u(\alpha) = 1,1 \times 10^{-5}\text{rad}. \end{array}$$

Q10. Expliquer en quelques lignes comment on peut obtenir les incertitudes-types sur les paramètres C_0 et α en exploitant les incertitudes-types sur les données expérimentales.

Q11. En déduire la valeur numérique de d avec son incertitude-type $u(d)$.

On peut procéder à une mesure plus directe de la distance entre les deux sources. Pour cela, on part du montage étudié ci-dessus, puis on enlève les fentes d'Young. La figure 5 montre une partie de l'image qui est alors enregistrée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de x.

Q12. Déterminer une autre valeur numérique de d À partir de cette expérience, en proposant une estimation d'incertitude associée. Comparer à la valeur obtenue à la question **Q11.**. Discuter à l'aide d'un critère quantitatif l'accord des deux résultats.

On a montré qu'il est possible de déterminer une caractéristique des sources lumineuses (leur distance) en étudiant une figure d'interférences. La reconstruction d'une image plus complexe se fait également en mesurant et en exploitant la fonction de contraste.

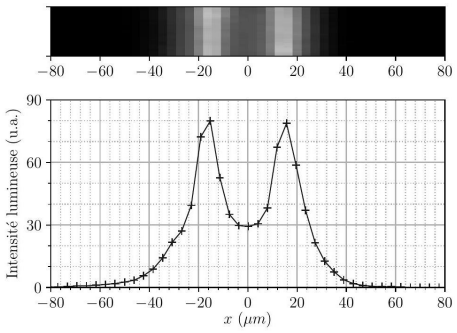


FIGURE 5 – Figure 5 - Image du dessus : photographie obtenue lorsqu'on enlève les fentes d'Young. Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse de la photographie. Les axes des abscisses sont les mêmes pour les deux parties.

2) Interférences à deux télescopes

On transpose la situation modèle abordée dans la section précédente à l'expérience telle qu'elle peut être réalisée en astronomie. On considère deux télescopes séparés d'une distance a et pointés vers la même direction. Une source ponctuelle A_0 se trouve à l'infini, dans une direction faisant un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des télescopes (figure 6, représentée avec un angle positif). On suppose $|\alpha| \ll 1$. On note λ_0 la longueur d'onde considérée dans l'onde émise par la source ponctuelle.
Des rayons lumineux issus de la source sont captés par chaque télescope. Ils sont ensuite guidés par des fibres optiques jusqu'à un unique détecteur sur lequel ils sont combinés et interfèrent. Sur la fibre optique issue du télescope 2, un dispositif permettant d'ajouter une différence de marche variable, appelée ligne à retard, est installé.
Le chemin optique entre l'entrée du télescope 1 (notée T_1 sur la figure 6) et le détecteur est égal à L.
Le chemin optique entre l'entrée du télescope 2 (notée T_2 sur la figure 6) et le détecteur est égal à $L + \delta_r$, où δ_r est variable.

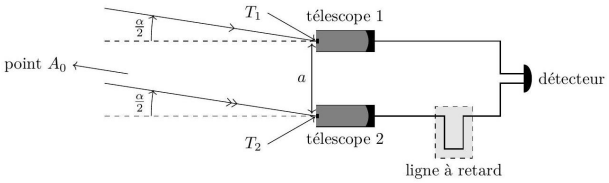


FIGURE 6 – Figure 6

Q13. Établir l'expression de la différence de marche totale entre un rayon passant dans le télescope 2 et un rayon passant dans le télescope 1 en fonction de α, a et δ_r. Comparer au résultat de la question **Q1.** et commenter.

En suivant une démarche similaire à celle conduite précédemment, on peut montrer que la résolution angulaire α_{res} de ces deux télescopes, c'est-à-dire ici l'angle minimal qui doit séparer deux points proches pour qu'ils soient correctement discernés, est telle que :

$$\alpha_{res} k a = \pi$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.
Dans le cadre du projet LIFE (Large Interferometer For Exoplanets), des scientifiques espèrent envoyer dans l'espace des télescopes dans le but d'observer des exoplanètes en utilisant la technique d'interférométrie dans le domaine de l'infrarouge (on choisit ici $\lambda_0 = 5\mu$ m). La distance entre les télescopes pourra atteindre 1 km.

Q14. Déterminer la résolution angulaire que l'on peut ainsi obtenir avec ces télescopes. En déduire la résolution spatiale (en kilomètres) que l'on peut espérer atteindre pour une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière. Commenter.

Problème 2 : Mécanique du transport ferroviaire (CCS)

La première locomotive à vapeur date de 1804, elle a été conçue par un ingénieur des mines anglais Richard Trevithick, comme une application de la machine à vapeur. Depuis, le transport ferroviaire a connu une évolution rapide ; il apparait aujourd'hui comme une solution écologique au désir et au besoin de mobilité d'une population mondiale qui ne cesse de croitre.

1) Démarrage du train de Trevithick

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1$ tonne a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10$ tonnes sur une distance $D = 15$ km. Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox, le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8$ km.hr^{-1}, supposée constante après la phase de démarrage.

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note $\vec{a}_0$ cette accélération. On définit deux systèmes :

— le système Σ_1, de masse totale M_c, est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
— le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ, et qui compte également quatre roues en acier.

On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a. Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roue de masse négligeable, la force $\vec{F}_{r1}$ exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1. On note également $\vec{F}_{r2}$ la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r2} = \vec{N}_{r2} + \vec{T}_{r2}$, où $\vec{N}_{r2}$ et $\vec{T}_{r2}$ désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

Q1. Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1. Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération $\vec{a}_0$.

Q2. Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2. On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

Q3. Montrer que $\vec{T}_{r2}$ est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer $\vec{T}_{r2}$ en fonction notamment de l'accélération $\vec{a}_0$ et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

Q4. Calculer le temps qu'a mis le train de Trevhitick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $\left\|\vec{T}_{r2}\right\| = 0{,}1 f_a \vec{N}_{r2}$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

2) Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

a) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et BB_0 formant un angle de 120° (figure 7). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle $\mathcal{C}$ tangent aux deux segments de droites en A et B. On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

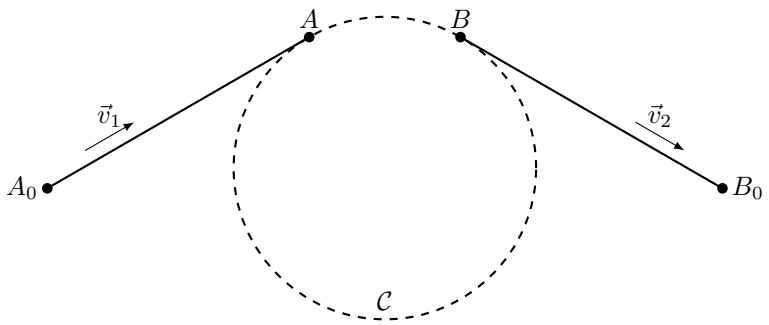


Figure 7 – Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes.

Q5. Déterminer le rayon $R_\mathcal{C}$ du cercle $\mathcal{C}$ en fonction des données.

Q6. En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0.

Q7. Calculer la valeur numérique de l'accélération $a_\mathcal{C}$ entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2$ km et $V_0 = 300$ km.hr^{-1}.

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400$ mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 8 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km.hr^{-1}.

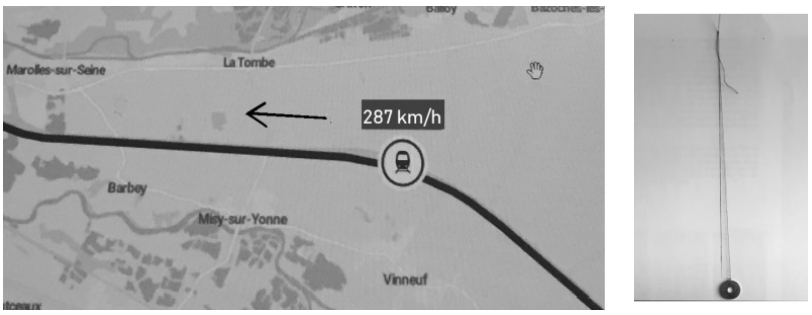


Figure 8 – La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_\mathcal{C} = 4$ km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

Q8. Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

b) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est non galiléen et que le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est galiléen.

Q9. Décrire le mouvement du référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_g$.

On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km, et sur laquelle les trains (figure 9) roulent à la vitesse $V_0 = 300$ km.hr^{-1} par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.



Figure 9 – Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 10 schématise le contact entre les rails et les roues de ce train.

Q10. La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 10 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.

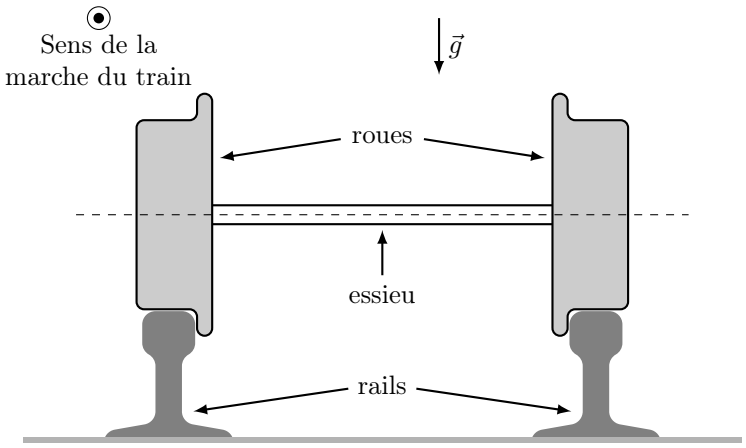


Figure 10 – Schéma - en coupe - du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure. Il existe différents types d'usure des rails ; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail. On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k\frac{F_n}{H}d$$

où H est la dureté du matériau dont l'unité est kg.m^{-2}, d la distance sur laquelle a eu lieu le glissement, F_n la force normale au glissement et k un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

Q11. Discuter qualitativement la loi de Preston-Archard.

Q12. Déterminer la dimension du coefficient d'Archard k.

Q13. Pour le rail identifié dans la question **Q10**, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.

Données pour le problème 1

- Unité astronomique (au) : 1,00 au $= 1,50.10^{11}$ m
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Données pour le problème 2

Accélération de la pesanteur	$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Coefficient d'adhérence fonte acier	$f_a = 0{,}12$
Latitude des villes citées	Lyon = 45,8° Nord ; Paris = 48,9° Nord

Lois de Coulomb du frottement solide, coefficient d'adhérence Soient deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en mouvement par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}_0$, en contact au point I. Sans glissement, $v_{I\in\mathcal{S}_1/\mathcal{R}_0} = v_{I\in\mathcal{S}_2/\mathcal{R}_0}$, il y a adhérence. La force $\vec{R}$ qu'exerce $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ a une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ $\left(\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}\right)$ telles que

$$\|\vec{T}\| < f_a\|\vec{N}\|$$

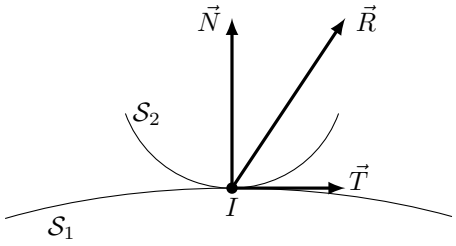


Figure 11 – Frottement entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel adhérent.

où f_a est le coefficient d'adhérence entre les deux solides.

Fin De L'Énoncé