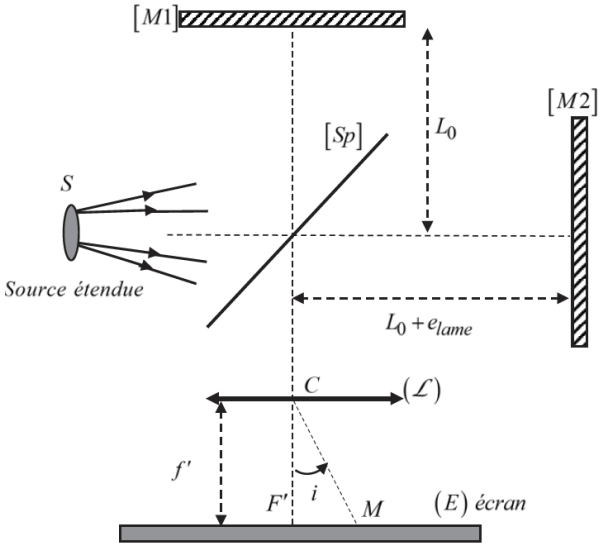
Tout résultat d'un calcul devra présenter le bon nombre de chiffres significatifs. La notation tiendra largement compte du soin apporté à la rédaction. $\boxed{\textit{Encadrer}}$ *les résultats.*

Problème 1 : Michelson (d'après CCINP)

Ce problème, concernant l'interféromètre de Michelson est constitué de deux parties : la première partie concerne l'étude des anneaux à l'infini ramenés dans le plan focal d'une lentille. On étudie ensuite dans la seconde partie, comment cet interféromètre peut être utilisé pour mesurer la durée d'un train d'onde.

Description de l'interféromètre

On considère ci-dessous l'interféromètre de Michelson dans sa représentation "idéale", constitué par une lame semi-réfléchissante infiniment fine séparatrice $[Sp]$, dont les facteurs de transmission et de réflexion valent 0,5 et par deux miroirs plans $[M1]$ et $[M2]$. Les miroirs $[M1]$ et $[M2]$ sont réglés orthogonalement l'un à l'autre, de façon à observer des franges d'égale inclinaison.



Le miroir $[M1]$ est situé à une distance L_0 de la séparatrice.

Le miroir $[M2]$ est situé à une distance $L_0 + e_{lame}$ de la séparatrice.

L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente $(\mathcal{L})$ de distance focale $f' = 1$ m, de centre C, utilisée dans les conditions de Gauss. Le tout est plongé dans l'air d'indice assimilé à l'indice du vide : $n_{air} = n_{vide} = 1$.

On éclaire l'interféromètre avec une source spatialement étendue, considérée ici monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 500$ nm (raie verte du mercure).

1) Étude des anneaux d'égale inclinaison

1. Par un schéma équivalent du montage interférentiel, expliquer pourquoi on appelle cette configuration le montage en "lame d'air". Représenter sur votre schéma deux rayons qui interfèrent en un point M de l'écran, caractérisé par l'inclinaison angulaire $i(M) = (\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{CM})$.
2. Montrer que la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent en M (par division d'amplitude) est donnée par $\delta = 2e_{lame}\cos(i)$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point M. Quel est l'aspect de la figure d'interférence observée sur l'écran (justifier) ?
3. (a) Donner l'expression de l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M. En déduire l'ordre d'interférence p_0 en F', défini par : $p_0 = k_1 + \varepsilon$ où k_1 est l'ordre d'interférence relatif au premier anneau brillant. Comment varie l'ordre d'interférence lorsque i augmente ?
   (b) L'angle i étant faible, déterminer le rayon du n-ième anneau brillant appelé r_n en fonction de p_0 , n et ε.
   (c) A.N. : e_{lame} =1,1 mm. Déterminer p_0 puis l'ordre d'interférence et le rayon du premier et du cinquième anneau brillants pour λ_0.
4. (a) On diminue la valeur de e_{lame}. Montrer que les anneaux semblent "rentrer". Calculer la valeur de e_{lame} pour laquelle le premier anneau disparaît. En déduire le rayon r'_1 du premier nouvel anneau et le comparer au rayon de l'anneau qui a disparu.
   (b) Décrire le phénomène observé pour $e_{lame} = 0$.

2) Largeur spectrale d'une raie d'émission

La transition radiative d'un atome conduit à l'émission d'un train d'onde de durée finie τ_0. La raie spectrale correspondante n'est donc pas strictement monochromatique. On a alors une raie spectrale centrée sur $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, de largeur caractéristique à mi-hauteur $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0} \ll \nu_0$. L'intensité émise au niveau de la source appartenant au domaine spectral $[\nu; \nu + \mathrm{d}\nu]$ s'écrit alors $\mathrm{d}I_0 = I_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu$ où $I_\nu(\nu)$ est l'intensité spectrale, fonction qui caractérise le spectre fréquentiel d'émission.

On modélise l'intensité spectrale $I_\nu(\nu)$ de la raie verte du mercure par un profil rectangulaire comme sur la figure 4 ci-dessous.

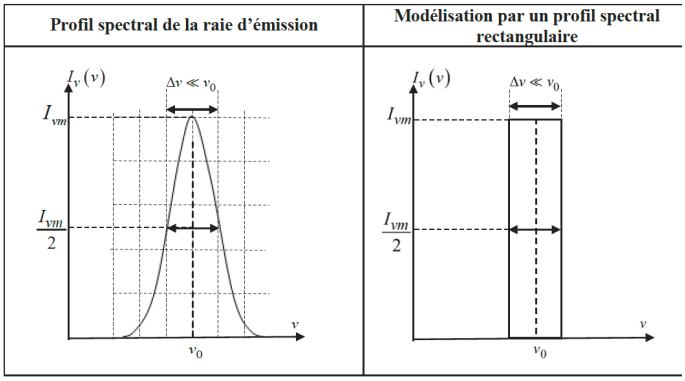


Figure 4 – Profils de raie

Dans notre modèle de raie rectangulaire, l'intensité totale de la source est donc donnée par :

$$I_0 = \int_{\nu_0-\Delta\nu}^{\nu_0+\Delta\nu} I_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu = I_{\nu m}.\Delta\nu$$

On éclaire l'interféromètre de Michelson de la partie précédente avec une lampe à vapeur de mercure dont on a isolé la raie verte de fréquence centrale $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ avec $\lambda_0 = 500$ nm.

On observe les interférences à la fois sur l'écran et au moyen d'un détecteur ponctuel supplémentaire que l'on place au foyer image F' de la lentille de projection $(\mathcal{L})$.

5. Expliquer pourquoi on pourrait observer des brouillages. Exprimer la différence Δp d'ordre d'interférence en M entre une radiation de fréquence ν_0 et une autre de fréquence $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$.

   On suppose qu'on a réglé l'interféromètre au contact optique et qu'on "chariote" (déplace en translation) le miroir $[M2]$.

6. Par un raisonnement semi-quantitatif, exprimer la valeur e_{lim} de la distance e_{lame} correspondant à la frontière entre une vision en F' d'anneaux bien contrastés et une perte de contraste au centre de ceux-ci.

7. Déterminer l'intensité $\mathrm{d}I(F')$ donnée sur l'écran par une petite bande du spectre de largeur spectrale $\mathrm{d}\nu$ en fonction, entre autres, de $\tau(F') = \frac{\delta(F')}{c}$. À quoi correspond physiquement $\tau(F')$?

   Exprimer $p(F', \nu)$, l'ordre d'interférence en F' pour une radiation de fréquence ν en fonction de $\tau(F')$.

8. Calculer alors l'intensité totale $I = I(F')$ donnée sur l'écran par la totalité du spectre de la source de lumière (en fonction de $\tau(F')$) ; mettre le résultat sous la forme :

$$I = I(F') = Cste \times [1 + \Gamma(\tau(F')) . \cos(2\pi\nu_0\tau(F'))]$$

   où $\Gamma(\tau(F'))$ est une fonction de $\tau(F')$ à "variation lente" appelée "facteur de visibilité".

9. Tracer le graphe de l'intensité $I(\tau(F'))$ en fonction de $\tau(F')$. Quelle est la valeur de $\tau(F')$ correspondant à la première annulation de contraste ? Comparer avec la durée du train d'onde et commenter.

Un moteur permet de translater le miroir mobile $[M2]$ à la vitesse constante V_0 à partir de la position du contact optique.

10. On arrête la translation de $[M2]$ à la valeur de 15,00 mm (à partir du contact optique) lorsque la première annulation de contraste est observée à l'écran. Déterminer la valeur expérimentale $\Delta\nu_{exp}$ de $\Delta\nu$. Conclure sur la durée du train d'onde.

Problème 2 : Vivre dans l'espace (d'après e3a)

I - Se libérer de l'attraction terrestre

1) L'attraction gravitationnelle terrestre

On considère la Terre comme une sphère homogène de rayon R_T et de masse totale M_T. On note O_T la position de son centre.

On rappelle la définition des référentiels géocentrique et terrestre :

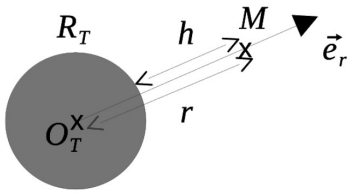
— référentiel géocentrique : référentiel lié au centre de la Terre et d'axes, formant une base orthonormée directe, dirigés vers des étoiles fixes ;

— référentiel terrestre : référentiel lié à la surface de la Terre.

1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. À quelle(s) condition(s) peut-on considérer le référentiel terrestre comme galiléen ?

On note G la constante de gravitation universelle.

2. Donner l'expression de la force gravitationnelle terrestre $\vec{F}_G$, s'exerçant sur un point matériel M de masse m situé à la distance r ($r > R_T$) du centre de la Terre O_T (voir figure ci-dessous). Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_p associée, en justifiant qu'elle ne dépend que de la distance r. On prendra la constante d'intégration de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_p(r)$, telle que $E_p(\infty) = 0$.



On suppose le point M soumis à la seule attraction gravitationnelle de la Terre, décrite précédemment. On l'étudie dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

3. Rappeler la signification physique d'un mouvement qualifié de "lié" pour le point M. Donner la valeur maximale de l'énergie mécanique E_m dans ce cas.

4. En négligeant les frottements dus à l'atmosphère, quelle vitesse v_{lib} serait à communiquer à un projectile tiré radialement, depuis la surface terrestre, pour le soustraire à l'attraction gravitationnelle terrestre ?

2) Tir d'un boulet de canon

Dans cette sous-partie, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Au 18^{eme} siècle, on étudie s'il est possible de faire quitter laTerre à un objet en le tirant verticalement. On pratique en particulier des tirs de boulets de canon. On utilise un boulet en fonte, dit de "24 livres", de masse $m = 12$ kg et de diamètre $D = 15$ cm (figure ci-dessous). La vitesse initiale communiquée par le canon au boulet peut atteindre $v_0 = 650$ m.s^{-1}. On suppose que l'accélération de la pesanteur est uniforme, égale à $g_0 = 10$ m.s^{-2}.



On étudie le mouvement du boulet tiré depuis la surface terrestre. Le boulet est assimilable à un point matériel de masse m dont on néglige la rotation propre.

On note z l'altitude sur la verticale ascendante, ainsi $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z$, $v = \dot{z}\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$.

On note également si besoin : $v = \|\vec{v}\|$.

Les frottements de l'air ne sont pas négligeables dans cette étude. On montre que pour des vitesses supérieures à 10 m.s^{-1}, la force de frottement subie par le boulet suit une loi quadratique de la forme $\vec{F}_f = -\gamma v\vec{v}$. La constante γ, étudiée en mécanique des fluides, dépend de la masse volumique de l'air et de la taille du boulet.

L'étude numérique du problème conduit aux résultats illustrés sur les courbes des figures 1 à 3.

5. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, justifier que $\vec{F}_f$ peut s'écrire : $\vec{F}_f = -\frac{m}{\ell_f} v\vec{v}$, avec m la masse du boulet. Quelle est la dimension du paramètre ℓ_f qui apparaît alors dans l'expression de la force de frottement ainsi formulée ?

6. Justifier, par un argument physique que le boulet atteint une hauteur maximale $h_{\max}$ puis retombe, comme les courbes en témoignent.

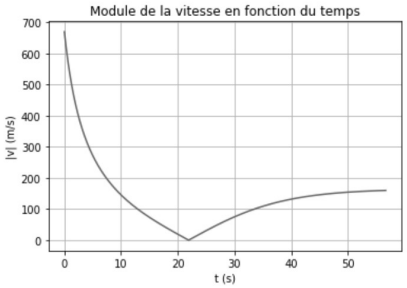


FIGURE 1 – module de la vitesse $v(t)$

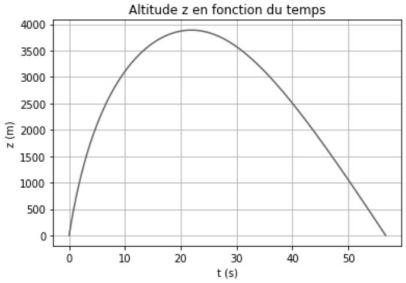


FIGURE 2 – altitude $z(t)$

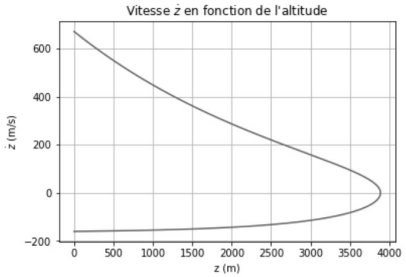


FIGURE 3 – vitesse $\dot{z}(t)$

Afin de faciliter l'étude, on distingue la phase ascendante de la phase descendante. Ainsi $\vec{v} = +v\vec{u}_z$ pour la phase ascendante et $\vec{v} = -v\vec{u}_z$ pour la phase descendante.

7. Écrire pour chacune des deux phases, la phase ascendante, puis la phase descendante, les équations différentielles vérifiées par le module v de la vitesse du boulet.

Les questions suivantes (8., 9. et 10.) doivent être résolues sans chercher l'expression mathématique de $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$, simplement en interprétant la forme des équations différentielles obtenues question 7 et en observant les courbes des figures 1 à 3.

8. Montrer que lors de la phase descendante la vitesse tend vers une limite asymptotique v_{lim}. Est-ce le cas pour la phase descendante ? Justifier.
9. Exprimer v_{lim} en fonction des données du problème.
10. Pour la phase descendante, mettre en évidence un régime transitoire et un régime permanent. Exprimer le temps caractéristique τ du régime transitoire. Quelle est la nature du mouvement lors du régime permanent descendant ? Préciser ses caractéristiques.
11. Reproduire les figures 1 à 3 sur la copie et identifier clairement les différentes phases et régimes du mouvement.

On note $v_+(t)$ l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase ascendante et $v_-(t)$ l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase descendante.

12. À l'aide du formulaire fourni, résoudre les équations différentielles obtenues à la question 7 et exprimer $v_+(t)$ et $v_-(t)$. On pourra introduire les variables réduites : $\tilde{v} = \frac{v}{v_{\text{lim}}}$ et $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$.
13. Recouper les résultats des trois questions 8, 9 et 10 avec les solutions des équations différentielles obtenues à la question 12.
14. Évaluer graphiquement v_{lim}, τ et ℓ_f. Vérifier la cohérence numérique des valeurs lues avec les relations obtenues entre ces grandeurs.
15. Discuter les hypothèses du modèle utilisé, en particulier l'uniformité de l'accélération de la pesanteur, ainsi que la forme quadratique de la force de frottement.

On rappelle qu'au cours de sa rotation diurne, la Terre fait un tour sur elle-même en 24 h.

16. Quelle force serait à ajouter en prenant en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre ? L'exprimer en fonction de la vitesse du boulet, de sa masse et de la vitesse de rotation diurne de la Terre ω_{jour}. Comment cette force peut-elle modifier la trajectoire du boulet ? Évaluer l'ordre de grandeur de sa valeur maximale atteinte au cours du tir, et conclure.

II - Étude d'une station spatiale

Référentiel en orbite terrestre

On étudie une capsule C en orbite autour de la Terre en translation circulaire. Ce système est à une altitude h (voir figure ci-dessus) suffisamment grande pour ne pas subir de frottements de la part de l'atmosphère. Les dimensions de l'habitacle peuvent être considérées comme petites devant l'altitude h de son orbite. On étudie un point M, de masse m, immobile à l'intérieur de la capsule.

5. Dans le référentiel de la capsule (C), quelles sont les forces qui s'exercent sur M ?
6. Définir le terme "impesanteur" (figure 7) et justifier qu'il s'applique au point M.



Figure 7 : astronautes en impesanteur

La station orbitale

On étudie à présent une station spatiale S, en orbite circulaire autour de la Terre, comme la capsule précédente, mais cette fois, la station peut être animée d'un mouvement de rotation propre. Au milieu du 20$^{\text{ème}}$ siècle, Werner von Braun, connu pour sa conception de missiles balistiques lors de la seconde guerre mondiale, puis des fusées Saturn V qui ont permis les missions lunaires Apollo, imagine déjà une station spatiale toroïdale.



A B

Figure 8 : vues d'artiste de stations orbitales

Ce modèle de station est utilisé à plusieurs reprises, notamment dans des films de science-fiction (figure8).

Les stations de ce type sont composées d'un tore de section carrée ou rectangulaire, en rotation uniforme Ω autour d'un axe de rotation passant par le centre S de la station.

On pose $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$.

L'habitacle où évoluent les passagers est constitué d'un couloir torique. Il peut y avoir plusieurs tores superposés (voir les figures 9, 10 et 11). La longueur $R_S = 100$ m représente ici le rayon moyen du tore. La section du tore est un rectangle de côtés : $L \times \ell = (5 \times 2,5)$ m^2.

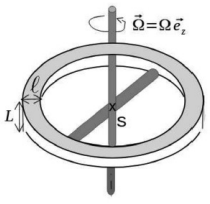


Figure 9 : station orbitale schématisée

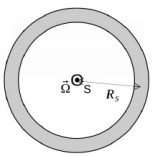


Figure 10 : station orbitale vue de dessus

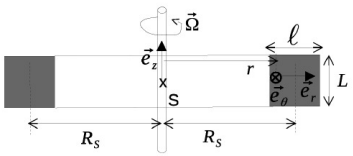


Figure 11 : coupe de la station orbitale

Dans ce qui suit, on se place dans le référentiel lié au tore en rotation uniforme.

7. À l'aide d'un schéma clair, montrer que la rotation à la vitesse Ω de la station permet aux occupants de ressentir une pesanteur artificielle $\vec{g}_a$.

8. Déterminer l'orientation de $\vec{g}_a$ dans le repère $(S,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ lié à la station. Préciser en particulier l'orientation de la tête et des jambes d'un passager dans l'habitacle. On reproduira les figures 10bis et 11bis ci-après, et on y placera correctement la figurine.

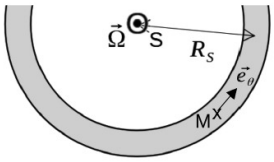


Figure 10 bis : détail de la vue de dessus

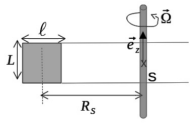


Figure 11 bis : détail de la vue en coupe



Figurine à placer

9. Évaluer l'ordre de grandeur de Ω afin que la valeur de g_a soit proche de la valeur terrestre.
10. Quelle force supplémentaire s'exerce sur un passager qui se déplace dans le tore selon le vecteur $\vec{e}_\theta$? Dans quel sens, selon $\vec{e}_\theta$, a-t-on intérêt à déplacer des objets massifs ? Montrer qu'il existe une vitesse de déplacement v_i pour laquelle ces objets se retrouveraient en impesanteur. La calculer en précisant le sens.

La question 11 est une question ouverte qui demande de l'initiative de la part du candidat et un exposé clair des différentes étapes du raisonnement entrepris. La réponse peut être qualitative et/ou s'appuyer sur des calculs. Seuls les arguments clairement exposés seront pris en compte pour l'évaluation.

Le passager souhaite jongler pendant ses moments de loisirs. Il s'agit de lancer une balle vers le plafond, "en l'air", puis de la rattraper lorsqu'elle "retombe" vers le sol.

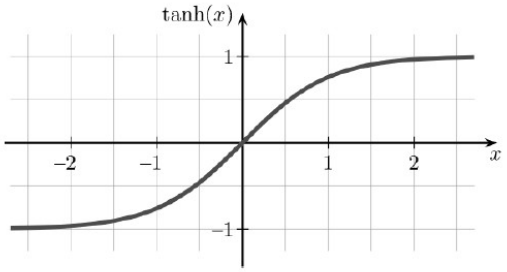
11. Peut-il adopter la même technique que sur Terre ? Expliquer, en justifiant les raisons, comment il doit éventuellement adapter ses gestes pour lancer et réceptionner les balles.
12. Donner une raison pour laquelle la pesanteur artificielle n'est pas utilisée dans l'actuelle station spatiale internationale (ISS).

Formulaire

Fonction :	$\arctan(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$
Dérivée :	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
Fonction réciproque :	$\tan(x)$	$\tanh(x)$

On rappelle que : $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

Tracé de la fonction $\tanh(x)$



Fin De L'Énoncé