Problème 1 : Faire l'image d'une exoplanète (CCS)

I- Principe de la mesure sur un système équivalent

1. On construit les rayons (les rayons émergents sont tous parallèles), et on utilise le théorème de Malus : $(S_AT_1) = (S_AI)$, ce qui permet d'obtenir $\delta_{source} = a \sin\frac{\alpha}{2}$, soit $\boxed{\delta_{source} = \frac{a\alpha}{2}}$ (cf. figure **??**)

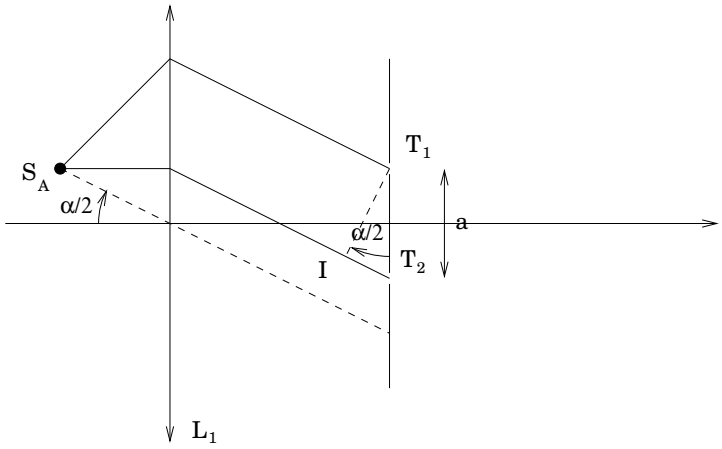


FIGURE 1 – construction des rayons pré-lentille. Note : le sens positif des angles est horaire.

2. On a $s_1(t) = s_0\cos(\omega t - k(S_1T_1M))$ et $s_2(t) = s_0\cos(\omega t - k(S_2T_1M))$.
3. $I = \gamma\langle s(t)\rangle$, où γ est un coefficient de proportionnalité dépendant de la nature du signal scalaire choisi.
   Donc $\boxed{I = \gamma\langle s_1^2\rangle + 2\gamma\langle s_1 s_2\rangle + \gamma\langle s_2^2\rangle}$.
   On a par ailleurs $I_0 = \gamma\frac{s_0^2}{2}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2I_0 + 4I_0\langle\cos(\omega t - k(S_1T_1M))\cos(\omega t - k(S_1T_2M))\rangle \\ &= 2I_0 + 2I_0\langle\cos(2\omega t - k(S_1T_1M) - k(S_1T_2M)) + \cos(k(S_1T_2M) - k(S_1T_1M))\rangle \\ &= 2I_0\left(1 + \cos\left[k(\delta_{source} + \delta)\right]\right) \end{aligned}$$

   ce qui donne le résultat demandé.
4. Les deux sources sont incohérentes, il n'y a donc pas d'interférence entre elles. L'intensité totale est donc la somme des intensités dues aux sources S_A et S_B ; l'intensité due à S_B est simplement obtenue en remplaçant α par $-\alpha$.
   On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_d(\delta) &= 2I_0\left(1 + \cos\left[k\left(\frac{a\alpha}{2} + \delta\right)\right]\right) + 2I_0\left(1 + \cos\left[k\left(\frac{-a\alpha}{2} + \delta\right)\right]\right) \\ &= 4I_0\left(1 + \cos(k\delta)\cos\left(\frac{ka\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

   ce qui est le résultat cherché, avec $I_{d,0} = 4I_0$.
5. cf. figure 2
6. $\boxed{\frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0} = 967}$
7. L'énoncé n'indique pas d'incertitude sur a on peut donc considérer que celle-ci est nulle. On a alors simplement, en notant $\beta = \frac{ka}{2}$, et $u(x)$ l'incertitude-type sur x,
   $\frac{u(\beta)}{\beta} = \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0}$.
   Soit $\boxed{u(\beta) = \frac{\beta}{\lambda_0}u(\lambda_0) = 45}$.
8. On peut lire $I_{max} = 112$ u.a et $I_{min} = 50$ u.a, et donc $\boxed{C = 0,38}$.
   NB : La figure ne correspond pas à l'expression de la question 4, car on a un phénomène de diffraction (par les fentes d'Young) qui se superpose aux interférences, et conduit à un I_0 dépendant de δ. Idéalement, il faudrait sans doute extrapoler l'intensité des minima à ce que ce serait au centre de la figure, ce qui donnerait $I_{min} = 52$, mais ce n'est pas ce que demande l'énoncé.

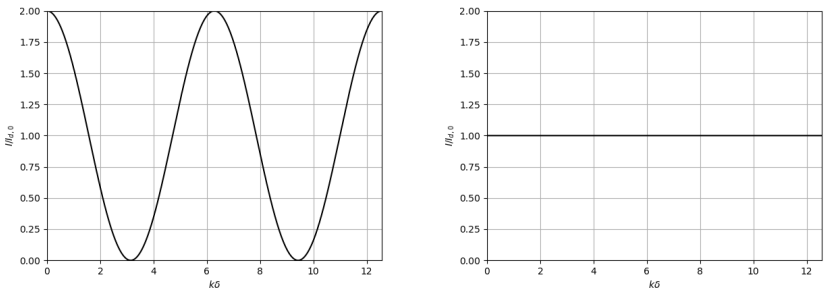


FIGURE 2 – Gauche : Intensité pour un facteur de cohérence égal à 1 ; Droite : intensité pour un facteur de cohérence nul.

9. Cf. figure **??**.

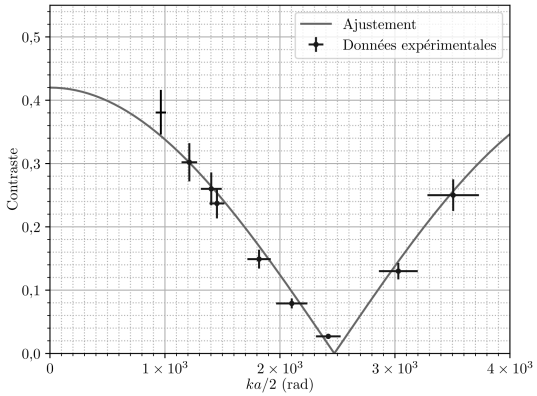


FIGURE 3 – Figure du document réponse, avec le point supplémentaire.

10. Il est possible de le faire via une méthode de Monte-Carlo : répéter l'ajustement avec des points pris au hasard dans la distribution de probabilité associée à chaque point de mesure. On peut alors déterminer l'écart-type sur chaque paramètre de la simulation.

    NB : On se serait attendu a priori à $C_0 = 1$, mais d'autres effets vont contribuer à diminuer le contraste, en premier lieu la largeur non-nulle des fentes sources.

11. On a $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2f_1'}$, soit $\alpha = \frac{d}{f_1'}$, et donc $\boxed{d = \alpha f_1' = 508\,\mu\text{m}}$.

    Comme l'incertitude sur f_1' est négligée, on a par ailleurs $\boxed{u(d) = f_1' u(\alpha) = 9\,\mu\text{m}}$

12. Dans ce cas chaque source donne une image à l'infini, inclinée de $\pm\alpha/2$, par la lentille L_1, puis des images sur le plan focal image, à des positions $\pm f_2'\alpha/2$.

    La distance d' entre les deux images sur le plan focal image vaut donc $d' = f_2'\alpha = \frac{f_2'}{f_1'}d$.

    On peut estimer $d' = 32\,\mu$m. Pour estimer $u(d')$, le plus rigoureux est de dire que les deux maxima sont estimées avec une tolérance de $2\,\mu$m (puisque les points de mesure sont tous les $4\,\mu$m), et donc une incertitude-type de $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mu$m. d' est une différence entre ces deux mesures, les carrés des incertitudes-type s'ajoutent, ce qui donnerait $u(d') = \sqrt{\frac{2}{3}}2\,\mu\text{m} = 1,6\,\mu$m.

    On obtient alors $\boxed{d = \frac{f_1'}{f_2'}d' = 457\,\mu\text{m}}$, et $\boxed{u(d) = \frac{f_1'}{f_2'}u(d') = 23\,\mu\text{m}}$

    Pour discuter de la compatibilité des deux résultats, on peut calculer l'écart normalisé :

    $\boxed{E_N = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2}} = 2,1}$.

    (où d_1 et d_2 correspondent aux deux évaluations de d)

    La compatibilité des deux résultats est discutable. Le critère habituel est de considérer que les résultats sont compatibles si $E_N < 2$, mais, dans la mesure où on est très proche de cette limite, obtenir un tel écart par hasard peut être considéré comme improbable, mais pas impossible...

II - Interférences à deux télescopes

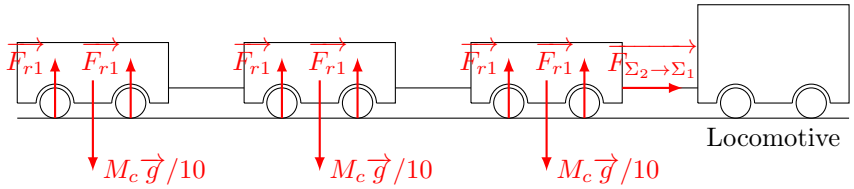
13. On a, en utilisant le théorème de Malus de la même façon qu'à la question 1, $(A_0T_2) - (A_0T_1) = a\frac{\alpha}{2}$.
La différence de marche totale vaut donc $\boxed{\delta = a\frac{\alpha}{2} + \delta_r}$. La situation est donc très similaire à celle de la question 1, à ceci près que la figure d'interférences ne sera pas obtenue d'un coup, mais en modifiant la compensation de la ligne à retard.
NB : L'énoncé passe sous silence le fait que le premier rôle de la ligne à retard est de compenser la différence de marche entre les télescopes, liée au fait que l'objet observé n'est pas au zénith, et que cette différence de marche varie avec le temps en raison de la rotation de la Terre.

14. $\boxed{\alpha_{res} = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,5.10^{-9} \text{ rad}}$
La résolution spatiale d, à un distance l, vaut $\boxed{d = \alpha_{res} l = 2,36.10^6 \text{ km}}$.
Cette distance correspond plus à la taille d'une étoile qu'à celle de Jupiter. On ne peut donc pas espérer obtenir une image détaillée de l'exoplanète.
NB : Ce n'est d'ailleurs pas le but de la mission : si la résolution est insuffisante pour imager la planète, elle est en revanche suffisante pour distinguer l'étoile et la planète, ce qui permet de réaliser des analyses spectroscopiques sur la planète et donc d'obtenir des informations sur son atmosphère.

Problème 2 : Mécanique du transport ferroviaire (CCS)

1) Démarrage du train de Trevithick

Q1. On réalise un schéma avec trois wagons :



L'application du principe fondamental de la dynamique sur le système Σ_1, dans le référentiel de la voie ferrée galiléen donne :

$$M_c\overrightarrow{g} + 40\overrightarrow{F_{r1}} + \overrightarrow{F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}} = M_c\overrightarrow{a_0}$$

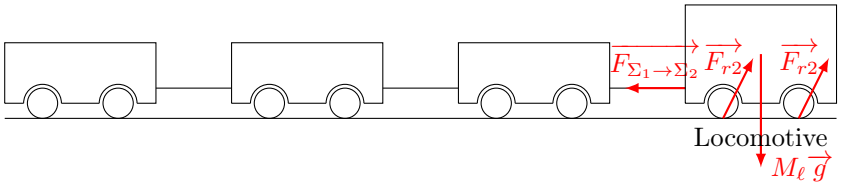
On projette cette équation sur les directions horizontale et verticale :

$$\begin{cases} M_c\overrightarrow{g} = 40\left\|\overrightarrow{F_{r1}}\right\| \\ \left\|\overrightarrow{F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}}\right\| = M_c a_0 \end{cases}$$

Soit simplement :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}} = M_c\overrightarrow{a_0}}$$

Q2. Schéma :



Q3. On applique le PFD sur le système Σ_2 (locomotive) dans le référentiel terrestre :

$$\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}} + M_\ell\overrightarrow{g} + 4\overrightarrow{N_{r2}} + 4\overrightarrow{T_{r2}} = M_\ell\overrightarrow{a_0}$$

L'équation projetée sur l'axe vertical est $M_\ell g = 4\left\|\overrightarrow{N_{r2}}\right\|$. Ainsi, horizontalement il reste :

$$4\overrightarrow{T_{r2}} = M_\ell\overrightarrow{a_0} - \overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}}$$

$M_\ell\overrightarrow{a_0}$ comme $-\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}}$ sont nécessairement dirigés vers l'avant, donc $\overrightarrow{T_{r2}}$ est vers l'avant. En utilisant la troisième loi de Newton : $\overrightarrow{F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}} = -\overrightarrow{F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}}$ et en reportant le résultat de la question **Q1** :

$$\boxed{\overrightarrow{T_{r2}} = \frac{M_c + M_\ell}{4}\overrightarrow{a_0}}$$

Q4. De l'égalité donnée dans l'énoncé, on en déduit :

$$\frac{M_c + M_\ell}{4}\overrightarrow{a_0} = 0{,}1 f_a \frac{M_\ell g}{4}\overrightarrow{u_x}$$

où $\overrightarrow{u_x}$ est l'axe du mouvement. Ainsi :

$$\ddot{x} = 0{,}1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g$$

On intègre :

$$\dot{x} = 0{,}1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t + K$$

Soit $\dot{x}(0) = K$. Or $\dot{x}(0) = 0$ donc $K = 0$. La vitesse du convoi est donc :

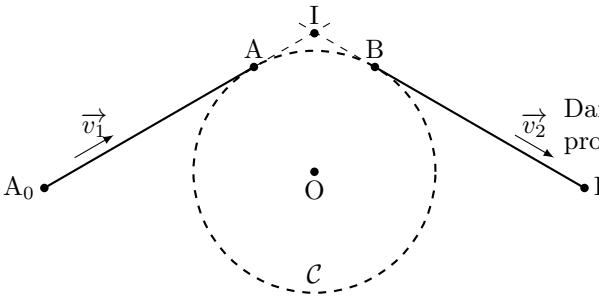
$$v_x(t) = 0{,}1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t$$

La vitesse de croisière est atteinte au bout de :

$$\boxed{t_0 = \frac{v_0\,(M_c + M_\ell)}{0{,}1 f_a M_\ell g} = 208\text{ s} = 3\text{ min }28\text{ s}}$$

2) Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

Q5. On note I l'intersection des droites (A_0A) et (BB_0) et O le centre du cercle :



D'après l'énoncé, $\widehat{\text{AIB}} = 120°$. Ainsi $\widehat{\text{AIO}} = \widehat{\text{AIB}}/2 = 60°$. Puis :

$$\widehat{\text{IOA}} = 180° - 90° - \widehat{\text{AIO}} = 90° - \widehat{\text{AIO}}$$

Dans le triangle rectangle AOH, H étant le projeté orthogonal de A sur (IO) :

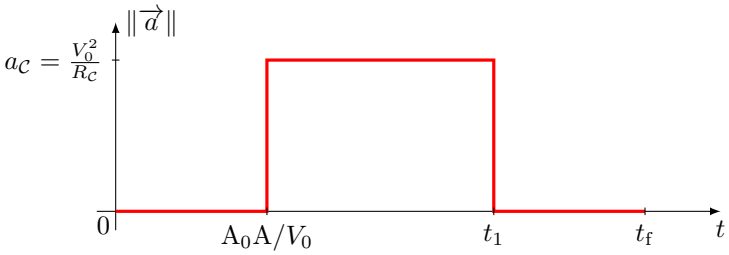
$$\frac{d_{\text{AB}}/2}{R_{\mathcal{C}}} = \sin\left(\widehat{\text{IOA}}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{\text{AIB}}}{2}\right)$$

Soit $\boxed{R_{\mathcal{C}} = \dfrac{d_{\text{AB}}}{2\cos\left(\frac{\widehat{\text{AIB}}}{2}\right)}}$

Q6. Sur la ligne droite, entre A_0 et A, le mouvement étant rectiligne et uniforme, l'accélération est donc nulle. De même, entre B_0 et B, on a également $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Entre A et B, le mouvement est circulaire uniforme donc dans la base polaire correspondante :

$$\overrightarrow{a} = -\frac{V_0^2}{R_{\mathcal{C}}}\overrightarrow{u_r}$$

Le temps nécessaire pour parcourir le segment $[A_0A]$ est A_0A/V_0, celui pour parcourir l'arc de cercle AB est $R_{\mathcal{C}}\widehat{\text{AOB}}/V_0$ avec $\widehat{\text{AOB}} = \pi/3$ rad. Enfin, le temps nécessaire pour parcourir le segment $[BB_0]$ est BB_0/V_0. D'où le graphique :



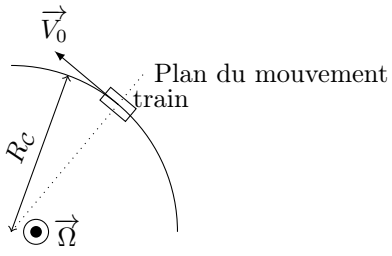
$$t_f = \frac{A_0A + R_{\mathcal{C}}\widehat{\text{AOB}} + BB_0}{V_0}$$

$$t_1 = \frac{A_0A + R_{\mathcal{C}}\widehat{\text{AOB}}}{V_0}$$

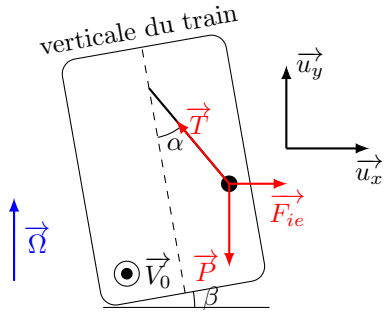
Q7. Application numérique :

$$a_{\mathcal{C}} = \frac{V_0^2}{R_{\mathcal{C}}} = \frac{V_0^2}{d_{\text{AB}}} 2\cos\left(\frac{\widehat{\text{AIB}}}{2}\right) = 3{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Q8. On étudie le mouvement du pendule statique dans le référentiel non-galiléen du train, ce dernier étant en mouvement circulaire uniforme autour d'un axe fixe vertical. Faisons deux schémas de la situation :



Vue de dessus



Vue dans le plan du mouvement

Comme indiqué sur le schéma ci-dessus, on considère un dévers vers l'intérieur : si le rail extérieur est surélevé, $\beta > 0$, sinon $\beta < 0$. L'angle entre la verticale du train et le pendule est mesuré sur la figure 5 :

$$\tan\alpha = \frac{0{,}2\text{ cm}}{4{,}9\text{ cm}} \qquad \text{soit} \qquad \alpha = 0{,}041\text{ rad}$$

On étudie le problème dans la base cartésienne horizontale $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, de sorte que :

$$\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{u_z}$$

Sur la masse s'exercent :
— le poids :

$$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$$

— le poids :

$$\overrightarrow{T} = T\cos(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{u_y} - T\sin(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{u_x}$$

— on prend en compte le caractère non-galiléen du référentiel du train par la force d'inertie d'entraînement :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\Omega^2 R_\mathcal{C}\overrightarrow{u_x} = -m\frac{V_0^2}{R_\mathcal{C}}\overrightarrow{u_x}$$

— et la force d'inertie de Coriolis, nulle car le pendule est fixe dans le référentiel du train.
D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_{ie}} = \overrightarrow{0}$$

On projette sur les deux coordonnées :

$$\begin{cases} m\dfrac{V_0^2}{R_\mathcal{C}} = T\sin(\alpha+\beta) \\ mg = T\cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

Ainsi, en divisant la première équation par la seconde :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{V_0^2}{gR_\mathcal{C}}$$

Soit :

$$\boxed{\beta = \arctan\left(\frac{V_0^2}{gR_\mathcal{C}}\right) - \alpha = 0{,}272\text{ rad} = 15{,}6°}$$

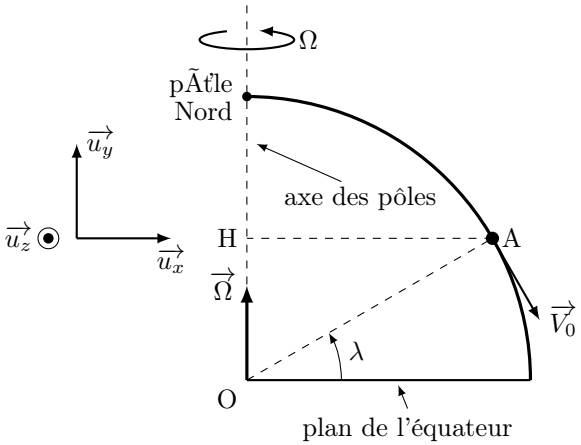
Le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur de 15,6° soit une surélévation de 39 cm (écartement de 140 cm).

Q9. Le référentiel terrestre a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire :

$$\Omega_\text{T} = \frac{2\pi}{23\text{ h }56\text{ min}}$$

autour de l'axe des pôles.

Q10. Faisons un schéma de la situation : $\overrightarrow{V_0}$ est dirigé vers le Nord le long de la surface de la Terre et Ω est dirigé selon l'axe des pôles :



On exprime la force d'inertie de Coriolis :

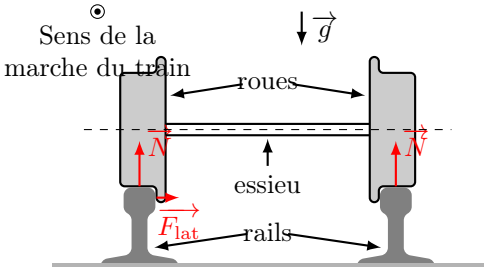
$$\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

avec : $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{v} = -V_0 \cos\lambda\overrightarrow{u_y} + V\sin\lambda\overrightarrow{u_x}$

Soit :

$$\overrightarrow{F_{ic}} = 2m\Omega V_0 \sin\lambda\overrightarrow{u_z}$$

La force est dirigée vers l'Ouest. Ainsi, pour maintenir l'équilibre des forces dans la direction Est-Ouest, une force est exercée par le rail à l'Ouest vers l'Est :



Q11. H intervient au dénominateur : plus le matériau utilisé est dur, moins le volume abrasé est grand. F_n intervient au numérateur, plus le matériau utilisé est dur, plus le volume abrasé est grand et ce de façon proportionnelle. Le volume abrasé est enfin logiquement proportionnel à la longueur du rail.

Q12. On a :

$$[k] = \frac{[V]\,[H]}{[F_n]\,[d]} = \frac{\mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-2}}{\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}} = \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2$$

La dimension de k est $\boxed{\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2}$

Q13. Le volume d'acier abrasé sur la face supérieure d'un rail, sur une longueur $d = 500$ km de rail est :

$$V_{\text{sup}} = N \times k\frac{mg}{2NH}d = k\frac{mg}{2H}d$$

N désigne le nombre d'essieu et m la masse du train. Ainsi, chaque roue supporte $1/(2N)$ fois le poids du train. Latéralement, la force exercée sur le rail à l'Est est $F = 2m\Omega V \sin\lambda$, ce qui correspond à un volume arraché :

$$V_{\text{lat}} = k\frac{2m\Omega V_0 \sin\lambda}{H}d$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{V_{\text{sup}}}{V_{\text{lat}}} = \frac{mg}{4\Omega V_0 \sin\lambda}}$$

ce rapport vaut 563 à la latitude de Lyon et 536 à la latitude de Paris.