Introduction

Nous allons montrer dans ce chapitre, comment, connaissant la position, la vitesse ou l'accélération dans un référentiel, on peut déterminer ces mêmes grandeurs dans un autre référentiel, nous établirons ainsi les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Dans un premier temps nous reviendrons toutefois sur la cinématique dans un référentiel galiléen.

Table des matières

I - Rappels de cinématique du point **1**
1)Principales BOND . . . 1
2)Opérateur gradient . . . 5
3)Vecteur vitesse . . . 6
4)Vecteur accélération . . . 8
5)Cas particulier important : mouvement circulaire . . . 9

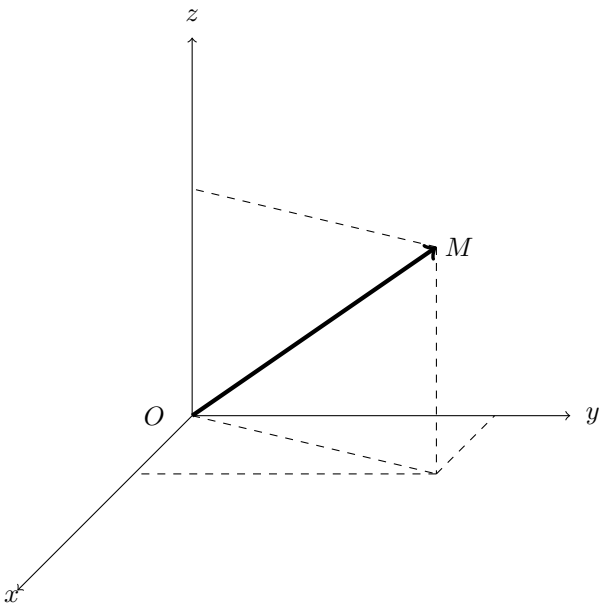
II -Changements de référentiel **10**
1)Référentiel en translation rectiligne uniforme . . . 10
2)Référentiel en translation quelconque dans $\mathcal{R}$ . . . 11
3)Référentiel en rotation uniforme d'axe fixe dans $\mathcal{R}$ . . . 13

I - Rappels de cinématique du point

1) Principales BOND

a) Coordonnées cartésiennes

La manière la plus simple de donner des coordonnées au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est d'utiliser ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).



Les coordonnées $x =$, $y =$ et $z =$ sont les projections orthogonales du vecteur position sur les vecteurs de la base. On notera qu'à chaque point de la base correspond UN UNIQUE triplet (x, y, z).

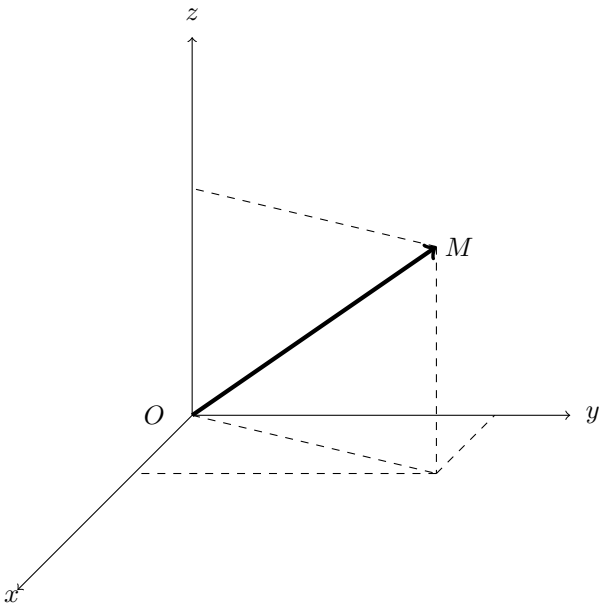
- Déplacement élémentaire :

- Volume et surface élémentaire :

b) Coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

⇝ Coordonnées cartésiennes : apparaissent naturelles pour des mouvements ne privilégiant aucun axe = mouvements de **translation**

⇝ Si un axe (par exemple l'axe Oz) joue un rôle particulier (rotation autour de cet axe), il est pratique de lui donner un statut spécial et de définir un nouveau jeu de coordonnées : ce sont les *coordonnées cylindriques*.



Remarque : Notion d'angle orienté
un angle orienté du plan xOy est un angle muni d'un *signe*. Il est **positif** s'il correspond à une rotation de $\vec{u}_x$ vers $\vec{u}_y$. Il est négatif sinon.

Coordonnées :
— La coordonnée z est définie comme précédemment : $z =$. $z \in \mathbb{R}$
— La coordonnée θ est défini comme l'*angle orienté* entre $\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{ON}$ (N est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy). $\theta \in [0, 2\pi]$
— La coordonnée r est définie comme $r = \|\overrightarrow{HM}\|$: distance du point M à l'axe Oz. $r \in \mathbb{R}_+$
Remarque : pour les points $M \in Oz$, l'angle θ peut être choisi quelconque. On a là une singularité du système de coordonnées.

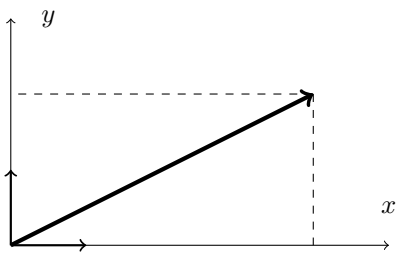
BASE LOCALE CYLINDRIQUE :

Soit M un point hors de l'axe Oz. On définit le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ tel que :

$$\vec{u}_r = \frac{1}{r}\overrightarrow{HM} = \frac{\overrightarrow{HM}}{\|\overrightarrow{HM}\|}$$

On définit ensuite le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit une BOND.

ATTENTION ! ! $\vec{u}_r$ et $\vec{u_\theta}$ sont des vecteurs tournants, on parle alors de *base locale*.



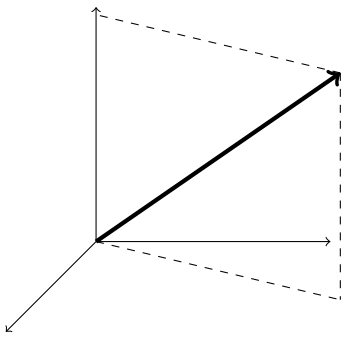
→ Evolution des deux vecteurs au cours du temps :

COORDONNÉES POLAIRES :

dans le cas précédent : on a un mouvement plan caractérisé par $z = cste$; les coordonnées cylindriques se simplifient. On choisit l'origine O du repère dans le plan du mouvement, de telle manière à avoir $z = 0$. Les **deux coordonnées polaires r et θ suffisent à décrire la position d'un point.**

Le point M est alors confondu avec N.

- Vecteur position et déplacement élémentaire :



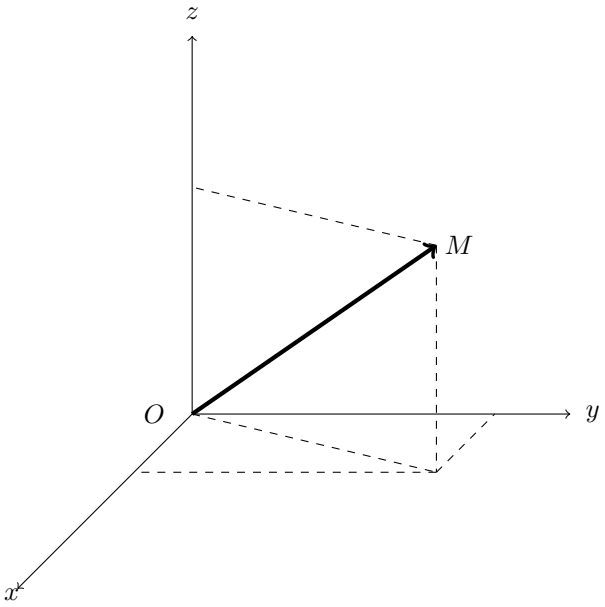
$\overrightarrow{OM} =$

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} =$

- Volume élémentaire :

c) Coordonnées sphériques

⇝ Coordonnées cylindriques : apparaissent naturelles pour des mouvements de rotation privilégiant un axe.
⇝ Si aucun axe ne joue de rôle particulier (comme par exemple pour le mouvement de bateaux autour de la Terre : voir Vendée Globe), il est pratique de définir un nouveau jeu de coordonnées permettant de repérer un point sur une sphère : ce sont les *coordonnées sphériques*.



Coordonnées :
— La coordonnée ρ (coordonnée radiale) est définie comme la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
— La coordonnée θ (colatitude) est défini comme l'*angle orienté* entre $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$. $\theta \in [0, \pi]$
— La coordonnée φ (longitude) est défini comme l'*angle orienté* entre $\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{ON}$ (N est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy). $\varphi \in [0, 2\pi]$

BASE LOCALE SPHÉRIQUE :

Soit M un point hors de l'axe Oz. On définit le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ tel que :

$$\vec{u}_\rho = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

On définit ensuite le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ tel que $\vec{u}_r\rho$ et $\vec{u}_\theta$ soient orthogonaux dans le plan $(\vec{u}_r\rho, \vec{u}_z)$, orienté dans le sens d'une augmentation de θ.

On définit enfin le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ tel que $(\vec{u}_r\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ soit une BOND. Conséquence : $\vec{u}_\varphi$ est dans le plan xOy, orienté dans le sens d'une augmentation de φ.

ATTENTION !! $\vec{u}_\rho$, $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u}_\varphi$ sont des vecteurs tournants, on parle alors de *base locale*.

Dans la base locale, le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho}$$

2) Opérateur gradient

a) Définition et expression en coordonnées cartésiennes

Définition :
Soit f une fonction des variables (x, y, z) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le gradient de f est défini par :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

↝*Expression en coordonnées cartésiennes :*
La différentielle de f $\mathrm{d}f$ s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

De plus, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$, ce qui donne, par identification :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On introduit souvent l'opérateur $\vec{\nabla}$ appelé "nabla" qui s'exprime ainsi en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

A Retenir

Opérateur gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

b) Expression en coordonnées cylindriques et sphériques

↝*Expression en coordonnées cylindriques :*
On peut montrer de même que, si on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z), on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

↝*Expression en coordonnées sphériques :*
On peut montrer de même que, si on utilise les coordonnées sphériques (ρ,θ,φ), on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi}$$

c) Propriétés

Définition :
Surface iso-f

Une surface iso-f est une surface sur laquelle f est uniforme (constante).

Propriété :
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orthogonal à toute surface iso-f.

Démo :
Soit M(x,y,z) un pout sur une surface iso-f. On a donc d$f = 0$; on suppose de plus que le déplacement élémentaire d$\overrightarrow{OM}$ s'effectue sur cette surface. On a alors $\overrightarrow{\text{grad}}f.\text{d}\overrightarrow{OM} = 0$, soit $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orthogonal à d$\overrightarrow{OM}$, qui appartient à la surface iso-f. $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est donc orthogonal à toute surface iso-f.

Propriété :
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

d) Lien entre force conservative et énergie potentielle

On a vu en Sup que toute force conservative dérive d'une énergie potentielle telle que :

$$\vec{F}_c.\text{d}\overrightarrow{OM} = -\text{d}E_p,$$

ce qui peut se ré-écrire sous la forme :

$$\vec{F}_c = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p.$$

Interprétation :
$\overrightarrow{\text{grad}}E_p$ est dirigé dans le sens d'une augmentation de E_p ; $\vec{F}_c$ est donc dirigé dans le sens des valeurs décroissantes de E_p.

Exemple : force subie par un porteur de charge dans un champ électrique
On admet cette année (voir Spé pour les justifications), que tout champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel électrostatique noté V : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ ou encore dV = -$\vec{E}$.d$\overrightarrow{OM}$
La force électrique $\vec{F}_e$ associée à $\vec{E}$ et subie par un point matériel M portant une charge électrique q est alors donnée par la force de Lorentz (composante électrique) : $\vec{F}_e = q\vec{E}$, ce qui se transforme :

$$\vec{F}_e = -q\overrightarrow{\text{grad}}V = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV).$$

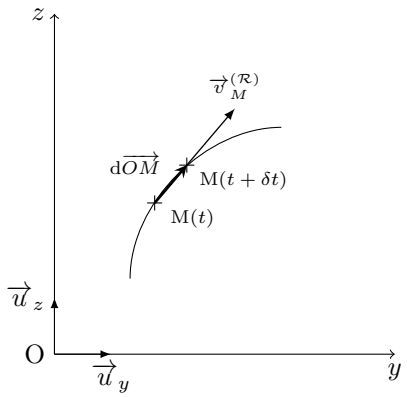
On en déduit que $\vec{F}_e$ est conservative et que l'énergie potentielle associée est :

$$E_p = qV$$

3) Vecteur vitesse

a) Définition

Rappel : avant **toute** étude, il faut préciser le référentiel $(\mathcal{R})$ d'étude. On lui attache trois axes (Ox, Oy, Oz). Ces trois axes sont fixes dans $(\mathcal{R})$.



Définition :
Soit $M(t)$ la position du point M à l'instant t et $M(t+\delta t)$ sa position à l'instant $t+\delta t$. On a alors :

$$\vec{v}_M^{(\mathcal{R})} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\delta t)}}{\delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})}$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel et sur le point, on notera :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Unité : $\mathrm{m.s^{-1}}$

Propriété :

- $\vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ est tangent à la trajectoire en M.
- $\vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ dépend du référentiel d'étude : exemple d'une personne qui marche dans un train ; son vecteur vitesse est différent si l'observateur est sur le quai ou dans le train.
- Pour tout point A fixe dans $(\mathcal{R})$, on a :

$$\boxed{\vec{v}_M^{(\mathcal{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})}}$$

Démo :

- Longueur d'une trajectoire : un point M va de A vers B



$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\mathrm{d}t$, soit $\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\| = \mathrm{d}\ell = \|\vec{v}\|\mathrm{d}t$.

$$\int_A^B \mathrm{d}\ell = L_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \|\vec{v}\|\mathrm{d}t$$

Cas particulier : $\|\vec{v}\| = cste$, soit $L_{A\to B} = \|\vec{v}\| \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t = \|\vec{v}\|(t_B - t_A)$.

b) Base cartésienne

On part du vecteur position : $\overrightarrow{OM} =$
et on dérive par-rapport au temps ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont fixes) et on obtient :

$$\boxed{\vec{v}_M^{(\mathcal{R})} =}$$

c) Base cylindrique

On part à nouveau du vecteur position : $\overrightarrow{OM} =$
et on dérive par-rapport au temps. **ATTENTION ! ! :** $\vec{u}_r$ est un vecteur tournant, il faut penser à le dériver ! !

$$\boxed{\vec{v}_M^{(\mathcal{R})} =}$$

d) Base sphérique

$$\boxed{\vec{v}_M^{(\mathcal{R})} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi}$$

Remarque :
Attention à l'homogénéité !

4) Vecteur accélération

a) Définition

Définition :

$$\vec{a}_M^{(\mathcal{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{(\mathcal{R})}$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel et sur le point, on notera :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Unité : $\mathrm{m.s^{-2}}$

b) Base cartésienne

On part du vecteur vitesse : $\vec{v} =$
et on dérive par-rapport au temps ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont fixes) et on obtient :

$$\boxed{\vec{a}_M^{(\mathcal{R})} =}$$

c) Base cylindrique

On part à nouveau du vecteur vitesse : $\vec{v} =$
et on dérive par-rapport au temps. **ATTENTION ! ! :** $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont des vecteurs tournant, il faut penser à les dériver ! !

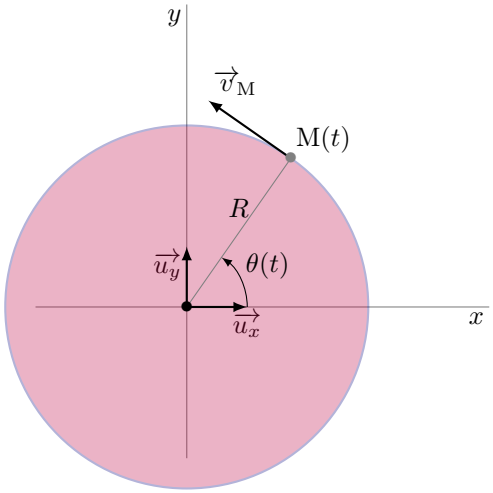
$$\vec{a}_M^{(\mathcal{R})} =$$

d) Base sphérique

Pas de formule générale (trop complexe), à étudier au cas par cas selon la nature du mouvement.

5) Cas particulier important : mouvement circulaire

Il est peu judicieux de choisir les coordonnées cartésiennes pour un tel mouvement plan, il faut privilégier les coordonnées polaires.



Très souvent, il n'est pas nécessaire d'utiliser par cœur les formules de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires (cylindriques avec $z = 0$). Il peut être plus intéressant de refaire le calcul pour chaque géométrie.
Ici $r = R = cste$, et donc $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$. Comme θ varie au cours du temps, $\vec{u}_r$ va tourner, et on obtient pour $\vec{v}_M$:

$$\vec{v}_M =$$

La vitesse est selon $\vec{u}_{theta}$ (purement orthoradiale), elle est donc tangente au cercle. On note souvent :

$$\omega = \dot{\theta},$$

où ω est la **vitesse angulaire** (en rad.s^{-1}). On trouve

$$\vec{v}_M = R\omega\vec{u}_\theta = v_\theta\vec{u}_\theta$$

où $v_\theta = R\omega$ est la vitesse linéaire (en m.s^{-1}).

Vecteur accélération :
on dérive $\vec{v}_M$ par-rapport au temps :

$$\vec{a} =$$

soit $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = -\frac{v_\theta^2}{R}\vec{u}_r + \dot{v}_\theta\vec{u}_\theta$.
L'accélération possède une composante radiale et une composante orthoradiale.

Cas particulier : mouvement circulaire uniforme.

$\|\vec{v}_M\| = |v_\theta| = cste \Rightarrow \omega = cste.$
Soit $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r = -\frac{\|\vec{v}_M\|^2}{R}\vec{u}_r$

Remarque :
— $\vec{a}$ et $\vec{v}_M$ sont bien orthogonaux.
— $\vec{a}$ est TOUJOURS orientée vers l'intérieur de la concavité.
— $\omega = cste = \dot{\theta}$ soit $\theta(t) = \omega t + \theta_0$

II - Changements de référentiel

On cherche ici à relier l'étude du mouvement dans deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ auxquels sont attachés les repères respectifs (O,x,y,z) et (O′,x',y',z'). Il faut, pour cela, connaître le mouvement relatif de $\mathcal{R}'$ par-rapport à $\mathcal{R}$.

Remarque : De façon arbitraire, $\mathcal{R}$ est souvent qualifié de *référentiel absolu* et $\mathcal{R}'$ est qualifié de *référentiel relatif.*

ATTENTION : les seuls cas de translation et de rotation uniforme autour d'un axe fixe décrits dans cette partie constituent les deux seuls cas de figure au programme.

1) Référentiel en translation rectiligne uniforme

Nous allons commencer dans le cas très simple où $\mathcal{R}$ est le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à un tapis roulant d'aéroport. Nous supposerons donc que $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $U\vec{u}_x$ dans $\mathcal{R}$.
Lorsqu'un usager, décrit par un point matériel M, est en mouvement sur le tapis, la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Si de plus, on suppose que les origines O et O′ coïncident à $t = 0$, alors $\overrightarrow{OO'} = U.t\vec{u}_x$ puis :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U.t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

On en déduit "avec les mains" la transformation de Galilée :

$$\begin{cases} x = & U.t + x' \\ y = & y' \\ z = & z' \end{cases}$$

ainsi que la **loi de composition des vitesses** en dérivant par-rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = & U + \dot{x}' \\ \dot{y} = & \dot{y}' \\ \dot{z} = & \dot{z}' \end{cases}$$

ou encore : $\boxed{\vec{v}_M^{\mathcal{R}} = U\vec{u}_x + \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}$
Autrement dit, la vitesse de l'usager par-rapport au sol est égal à la somme de la vitesse du tapis par-rapport au sol et de la vitesse de l'usager par-rapport au tapis (somme vectorielle, bien entendu...).

A Retenir

Pour $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$, la relation de Chasles + universalité du temps conduit à la **transformation de Galilée**, qui exprime donc la loi de composition des vitesses entre deux référentiels galiléens.

$$\boxed{\vec{v}_M^{\mathcal{R}} = U\vec{u}_x + \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}$$

2) Référentiel en translation quelconque dans $\mathcal{R}$

A Retenir

Formule de dérivation temporelle

On désire étudier comment relier les variations d'un vecteur dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. On considère alors un vecteur $\vec{A}$ quelconque que l'on projette dans la base $(\vec{u}_{x'},\vec{u}_{y'},\vec{u}_{z'})$:

$$\vec{A} = A_{x'}\vec{u}_{x'} + A_{y'}\vec{u}_{y'} + A_{z'}\vec{u}_{z'}$$

Dérivons $\vec{A}$ dans $\mathcal{R}$ afin de connaître la variation de ce vecteur vue par un observateur lié à $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{A}_{x'}\vec{u}_{x'} + \dot{A}_{y'}\vec{u}_{y'} + \dot{A}_{z'}\vec{u}_{z'} + A_{x'}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + A_{y'}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + A_{z'}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{z'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}.$$

On notera $\dot{A}_{x'}\vec{u}_{x'} + \dot{A}_{y'}\vec{u}_{y'} + \dot{A}_{z'}\vec{u}_{z'} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$ et on montre que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}_{x'} \\
\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}_{y'} \\
\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{z'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}_{z'}
\end{aligned}$$

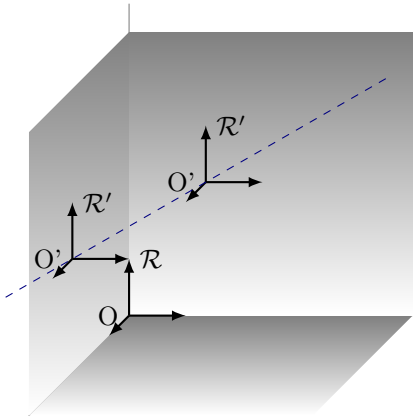
On obtient ainsi la *formule de Varignon* :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}}$$

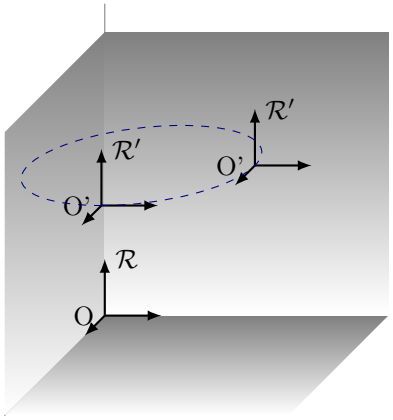
$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ est appelé le *vecteur-rotation* de $\mathcal{R}'$ par-rapport à $\mathcal{R}$.

Dans le cas d'un référentiel en translation quelconque, $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$ et donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$$



Translation rectiligne



Translation circulaire

Exemple :

Si $\mathcal{R}$ est le référentiel terrestre, $\mathcal{R}'$ est, par exemple le référentiel lié à :

- ⇝ une cabine d'ascenseur, en mouvement de translation rectiligne dans $\mathcal{R}$;
- ⇝ une nacelle de grande roue, en translation circulaire dans $\mathcal{R}$;
- ⇝ une cabine de téléphérique, en translation quelconque dans $\mathcal{R}$.

a) Loi de composition des vitesses

Dans ces conditions, la relation de Chasles écrite plus haut reste valable. On peut la dériver par-rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

Les termes 1 et 2 ont des significations très claires : il s'agit respectivement de la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$ ($\vec{v}_M^{\mathcal{R}}$) et de la vitesse du point O' dans $\mathcal{R}$ ($\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$). Pour interpréter le troisième terme, utilisons la formule de dérivation vectorielle dérivée plus haut :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec toujours $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$, ce qui conduit à

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$$

A Retenir

La **loi de composition des vitesses** pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation quelconque dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\vec{v}_M^{\mathcal{R}} = \vec{v}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$$

- $\vec{v}_M^{\mathcal{R}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel absolu, encore appelée **vitesse absolue** du point M.
- $\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$ est la vitesse du point M dans le référentiel relatif, encore appelée **vitesse relative** du point M.
- $\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$ est la vitesse absolue du point O'. Comme tous les point du référentiel $\mathcal{R}'$ ont le même vecteur vitesse, on interprète ce terme comme la vitesse absolue d'un **point coïncident** avec M, FIXE dans $\mathcal{R}'$ mais à la même position que M à l'instant t (donc coïncidant avec M à t). Cette vitesse est appelée **vitesse d'entraînement** et notée $\vec{v}_e$.

Remarque :
- On vérifie que l'on retrouve bien le cas rectiligne uniforme avec $\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}} = U\vec{u}_x$
- La vitesse d'entraînement $\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$ est indépendante du point M considéré (par définition d'un mouvement de translation), c'est pourquoi elle est notée $\vec{v}_e$
- La vitesse absolue est parfois notée $\vec{v}_a(M)$ et la vitesse relative $\vec{v}_r(M)$.

b) Loi de composition des accélérations

On peut dériver à nouveau par-rapport au temps dans $\mathcal{R}$ la loi de composition des vitesses :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

On reconnait immédiatement les accélérations de M et O' dans $\mathcal{R}$

$$\vec{a}_M^{\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'}^{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

À nouveau, on utilise la formule de dérivation vectorielle pour interpréter le troisième terme et reconnaître qu'il s'agit de $\vec{a}_M^{\mathcal{R}'}$

A Retenir

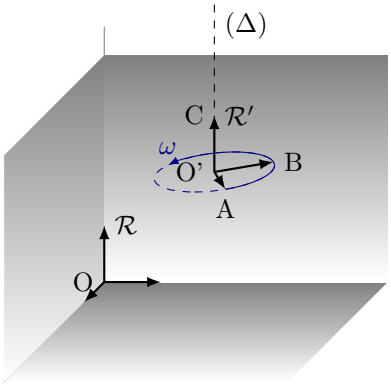
La **loi de composition des accélérations** pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation quelconque dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\vec{a}_M^{\mathcal{R}} = \vec{a}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'}^{\mathcal{R}}$$

- $\vec{a}_M^{\mathcal{R}}$ est l'accélération du point M dans le référentiel absolu, encore appelée **accélération absolue** du point M, parfois notée $\vec{a}_a(M)$.
- $\vec{a}_M^{\mathcal{R}'}$ est l'accélération du point M dans le référentiel relatif, encore appelée **accélération relative** du point M, parfois notée $\vec{a}_r(M)$
- $\vec{a}_{O'}^{\mathcal{R}}$ est l'accélération absolue du point O'. Comme tous les point du référentiel $\mathcal{R}'$ ont le même vecteur vitesse, on interprète ce terme comme l'accélération absolue du **point coïncident** avec M, FIXE dans $\mathcal{R}'$ mais à la même position que M à l'instant t (donc coïncidant avec M à t). Cette accélération est appelée **accélération d'entraînement** et notée $\vec{a}_e$.

3) Référentiel en rotation uniforme d'axe fixe dans $\mathcal{R}$

Dans ce paragraphe, $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe dirigé par $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ si bien que : $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\vec{u} = \vec{\omega}$.



Exemple : si $\mathcal{R}$ est le référentiel terrestre, $\mathcal{R}'$ st par exemple le référentiel lié à un manège, lorsque celui-ci tourne à vitesse angulaire constante, en régime permanent.

Par ailleurs, quitte à déplacer O sur l'axe de rotation de $\mathcal{R}'$, on peut toujours considérer que les origines O et O' sont confondues.

a) Loi de composition des vitesses

Dans ces conditions, la relation de Chasles écrite plus haut reste valable. On peut la dériver par-rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

Les termes 1 et 2 ont à nouveau des significations très claires : il s'agit respectivement de la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$ ($\vec{v}_M^{\mathcal{R}}$) et de la vitesse du point O' dans $\mathcal{R}$ ($\vec{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$). Pour interpréter le troisième terme, utilisons la formule de dérivation vectorielle, avec la condition O = O' :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

A Retenir

En définitive, la **loi de composition des vitesses** pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\vec{v}_M^{\mathcal{R}} = \vec{v}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- $\vec{v}_M^{\mathcal{R}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel absolu, encore appelée **vitesse absolue** du point M, souvent notée $\vec{v}_a(M)$.
- $\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$ est la vitesse du point M dans le référentiel relatif, encore appelée **vitesse relative** du point M, souvent notée $\vec{v}_r(M)$
- $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est la vitesse absolue du **point coïncident** avec M, FIXE dans $\mathcal{R}'$ mais à la même position que M à l'instant t (donc coïncidant avec M à t). Cette vitesse est appelée **vitesse d'entraînement** et notée $\vec{v}_e(M)$.

Remarque : La vitesse d'entraînement dépend ici du point M considéré, contrairement au cas de la translation.

b) Loi de composition des accélérations

On peut dériver à nouveau par-rapport au temps dans $\mathcal{R}$ la loi de composition des vitesses :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{\omega}$ étant un vecteur constant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{a}_M^{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M^{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

En utilisant (encore...) la formule de dérivation vectorielle et la loi de composition des vitesses, on obtient

$$\vec{a}_M^{\mathcal{R}} = \vec{a}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$$

A Retenir

La **loi de composition des accélérations** pour un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\vec{a}_M^{\mathcal{R}} = \vec{a}_M^{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$$

- $\vec{a}_M^{\mathcal{R}}$ est l'accélération du point M dans le référentiel absolu, encore appelée **accélération absolue** du point M, parfois notée $\vec{a}_a(M)$.
- $\vec{a}_M^{\mathcal{R}'}$ est l'accélération du point M dans le référentiel relatif, encore appelée **accélération relative** du point M, parfois notée $\vec{a}_r(M)$
- $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ est l'accélération absolue du **point coïncident** avec M, FIXE dans $\mathcal{R}'$ mais à la même position que M à l'instant t (donc coïncidant avec M à t). Cette accélération est appelée **accélération d'entraînement** et notée $\vec{a}_e(M)$.
- Il faut enfin rajouter l'**accélération de Coriolis** notée $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_M^{\mathcal{R}'}$