Introduction

Ce chapitre constitue le premier chapitre de mécanique des fluides. Il est consacré à l'étude des écoulements de fluide. Il a pour objectif de présenter la méthode eulérienne qui permet de décrire très commodemment n'importe quel écoulement. Une fois la méthode présentée, la notion de dérivée particulaire sera définie et les différentes déformations que peut subir un fluide seront analysées. Enfin, les écoulements les plus fréquemment rencontrés tels que les écoulements stationnaires, les écoulements incompressibles ou les écoulements irrotationnels seront définis.

En conclusion, l'objet de ce chapitre est d'étudier d'un point de vue purement cinématique n'importe quel écoulement fluide sans se soucier des causes qui l'ont engendré.

Table des matières

I - Description d'un fluide en écoulement : approche eulérienne et dérivée particulaire **1**
1) Particule fluide et échelles d'étude . . . 1
2) Approche eulérienne . . . 3
3) Dérivée particulaire . . . 4
4) Éléments d'analyse vectorielle . . . 6

II - Équation locale de conservation de la masse **7**
1) Vecteur densité de courant de masse ; débits . . . 7
2) Équation locale de conservation de la masse . . . 9
3) Cas général de la conservation de la masse . . . 9

III - Les écoulements essentiels **10**
1) Écoulement stationnaire . . . 10
2) Écoulement incompressible . . . 10
3) Écoulement irrotationnel - potentiel des vitesses . . . 11
4) Exemples . . . 12

I - Description d'un fluide en écoulement : approche eulérienne et dérivée particulaire

1) Particule fluide et échelles d'étude

a) Qu'est ce qu'un fluide ?

En première année, en thermodynamique, la notion de fluide a déjà été abordée. On rappelle qu'un fluide est un état de la matière qui en dessous du point critique C est soit liquide soit gazeux. De plus, au dessus du point critique C, il n'est plus possible de distinguer le liquide du gaz, on parle alors de fluide supercritique.

La principale caractéristique d'un fluide est sa masse volumique notée ρ. Elle est définie comme le rapport d'une masse sur un volume et son unité dans le système international est le kilogramme par mètre cube ($kg.m^{-3}$). Elle dépend principalement de deux paramètres : la pression et la température. En général, si on se place assez loin du point critique, le rapport entre la masse volumique d'un liquide et celle du gaz correspondant est environ mille.

Enfin, l'une des caractéristiques d'un fluide est qu'il ne peut conserver la forme de son volume lorsqu'il est placé dans un récipient (pas de forme propre). En effet, à la différence d'un solide, si on place un fluide dans un certain récipient, il a naturellement tendance à prendre la forme de ce volume (gaz) ou à occuper une partie de ce dernier (liquide).

b) Échelles de description d'un fluide

Pour étudier l'écoulement d'un fluide, il existe plusieurs échelles de description possibles et ces échelles dépendent de l'écoulement lui-même.

- *Échelle microscopique ℓ*
  C ?est l'échelle des molécules du liquide ou du gaz. À cette échelle, le fluide est un milieu discontinu. Pour décrire l'écoulement à cette échelle, il faudrait appliquer les lois de la mécanique à chacune des molécules du fluide le composant. Vu le nombre astronomique de molécules contenues dans le fluide, il est illusoire de vouloir résoudre le système d'équations même avec les ordinateurs les plus puissants. Pour un gaz, la longueur caractéristique ℓ de l'échelle microscopique peut être le libre parcours moyen ℓ qui a été abordé en première année. Physiquement, on rappelle que le libre parcours moyen correspond à la distance moyenne parcourue par une molécule avant de

rentrer en collision avec une seconde molécule. Variable selon la nature du gaz considéré, il dépend fortement de la pression et de la température. L'ordre de grandeur du libre parcours moyen pour un gaz est environ quelques micromètres à un nanomètre (1 nm = 10^{-9} m). De la même manière, pour un liquide, la longueur caractéristique ℓ de l'échelle microscopique peut être la distance intermoléculaire ℓ. Variable selon le liquide considéré, la distance intermoléculaire est du même ordre de grandeur que la taille caractéristique d'une molécule du fluide, c'est-à-dire typiquement un Angström (1 Å = 10^{-10} m).

- *Échelle macroscopique L*
  C'est l'échelle caractéristique L de l'écoulement lui-même (diamètre d'une canalisation, largeur du lit d'un fleuve, profondeur de l'océan, diamètre d'un capillaire sanguin, longueur d'une aile d'avion, hauteur d'une casserole, ?).
  À cette échelle, le fluide est un milieu continu et toutes les grandeurs qui le décrivent sont des grandeurs moyennées. Enfin, cette échelle correspond en général à celle de la vie quotidienne.
- *Échelle mésoscopique a*
  C'est l'échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. À cette échelle, le fluide est un milieu continu. Pour un écoulement quelconque, la longueur caractéristique a de l'échelle mésoscopique doit vérifier l'inégalité suivante

$$\boxed{\ell \ll a \ll L}$$

Application :
Déterminer l'ordre de grandeur des trois échelles caractéristiques ℓ, a et L dans les situations suivantes :
(1) Eau dans une canalisation
(2) Sang dans un capillaire
(3) Crue dans une rivière
(4) Air autour d'une aile d'avion

c) Notion de particule fluide

Pour décrire un écoulement de fluide à l'échelle mésocopique, il est possible de découper ce dernier en cellules élémentaires appelées **particules de fluide**. Chaque particule de fluide de taille caractéristique a et de volume a^3 contient alors un très grand nombre de molécules N. À chaque particule fluide d'un écoulement, on peut lui associer une masse volumique, une température, une pression, une vitesse, ... Toutes ces grandeurs associées à la particule sont des grandeurs locales moyennées sur l'ensemble des molécules contenues dans la particule.

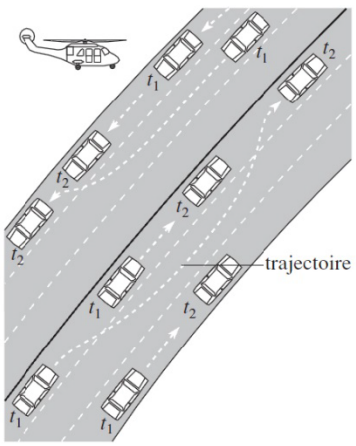
Remarque :
— Le découpage du fluide en particules de fluide revient à se placer dans *l'approximation des milieux continus* où l'on renonce donc à décrire le mouvement individuel de chaque particule du fluide pour tirer profit des comportements collectifs. On traite alors le fluide comme un *continuum*.
— **ATTENTION !** ne pas confondre *particule de fluide* (ou particule fluide) avec *particule du fluide*, qui désigne un atome ou une molécule à l'échelle microscopique.
— Ces trois échelles sont identiques aux échelles définies dans le début du cours de thermodynamique (sup).

Application :
Pour les situations décrites dans l'application précédente, donner l'ordre de grandeur du nombre de molécules contenues dans une particule fluide.

2) Approche eulérienne

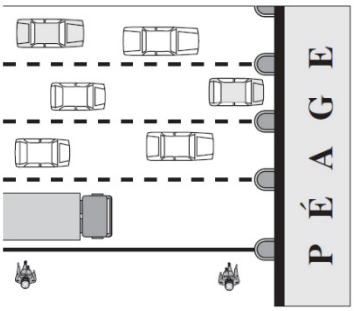
Pour décrire l'écoulement d'un fluide, deux approches différentes existent. Le point de vue de **Lagrange** consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celle d'**Euler** (la seule au programme...) se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps.

Description Lagrangienne



Lorsque nous observons les trajectoires des divers véhicules (entre $t = t_1$ et $t = t_2$), nous nous plaçons en formalisme lagrangien.

Description Eulérienne



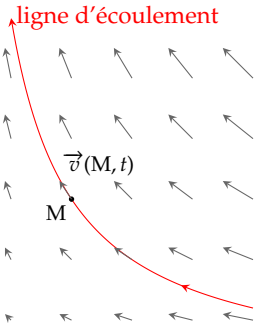
Les deux gendarmes observant les vitesses des véhicules se sont placés en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. À la même date t, ils n'observent pas les mêmes véhicules. Les deux gendarmes n'observent pas nécessairement la même vitesse.

Définition :
Soit M un point quelconque de l'écoulement. On définit le vecteur-vitesse $\vec{v}(M,t)$ de la particule de fluide passant par M à l'instant t comme la moyenne des vecteurs-vitesse des molécules contenues dans la particule de fluide centrée autour du point M. Cette démarche définit le **champ eulérien des vitesses** $\vec{v}(M,t)$.

Remarque :
- L'approche eulérienne introduite ici correspond à la vision d'une multitude d'observateurs fixes dans le référentiel d'étude (gendarmes). En un point M donné, chaque observateur voit passer des particules de fluide *différentes* au cours du temps. Dans l'approche lagrangienne (HP), on suit l'évolution au cours du temps de chaque particule de fluide (comme en mécanique du point, on voudra déterminer la trajectoire de chaque particule de fluide).
- L'approche eulérienne constitue l'approche naturelle en Physique des milieux continus : les champs rencontrés jusqu'à présent dans les fluides (pression, température, masse volumique, champ magnétique, etc) sont d'ailleurs tous des champs eulériens.

• **Notion de ligne et de tube de courant**

Définition :
- Les **lignes de courant** sont les lignes de champ du champ eulérien des vitesses $\vec{v}(M,t)$, soit encore les courbes tangentes en tout point M à $\vec{v}(M,t)$.
- Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Lorsqu'un écoulement a lieu dans une canalisation, la canalisation elle-même constitue un tube de courant.



Remarque :
Soit M un point d'une ligne de courant, et se déplaçant sur celle-ci. Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est donc tangent à la ligne de courant en M, il existe donc un facteur $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = k\vec{v}(M,t)$, qui permet de trouver l'équation cartésienne de la ligne de courant. On peut également utiliser de manière équivalente : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M,t) = \vec{0}$.

3) Dérivée particulaire

a) Dérivée particulaire de la masse volumique

On suit une particule fluide se trouvant au point M(t) à l'instant t ; à $t + \mathrm{d}t$, la particule fluide se trouve en M'($t + \mathrm{d}t$. Dans cette évolution, le volume de la particule est éventuellement modifié. On cherche ici à estimer la variation de la masse volumique lorsque le point M de coordonnées (x, y, z) à l'instant t passe au point M' de coordonnées (x', y', z') à l'instant $t' = t + \mathrm{d}t$. Les coordonnées deviennent alors

$$\begin{cases} x' = x + \mathrm{d}x \\ y' = y + \mathrm{d}y \\ z' = z + \mathrm{d}z \end{cases}$$

Définition :
La **dérivée particulaire** de la masse volumique est le taux d'accroissement noté $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$ obtenu en suivant une particule de fluide dans son mouvement

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\rho(M(t+\mathrm{d}t)) - \rho(M(t))}{\mathrm{d}t}$$

Puisque la position de la particule de fluide dépend non seulement de t mais aussi des coordonnées d'espace (la particule de fluide se déplace), un développement limité donne :

$$\rho(M(t+\mathrm{d}t)) = \rho(t+\mathrm{d}t, x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) \approx \rho(t,x,y,z) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}z$$

On en déduit alors l'expression de la dérivée particulaire :

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Le déplacement élémentaire de la particule de fluide s'écrit $\vec{v}(M,t)\mathrm{d}t$, ce qui conduit à des déplacements élémentaires dans les trois directions $\mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z = v_z\mathrm{d}t$, soit :

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

A RETENIR

En définitive, on peut obtenir une expression *intrinsèque* (ne dépendant pas du système de coordonnées) de la dérivée particulaire de la masse volumique :

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho)$$

La **dérivée locale** $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ rend compte du caractère variable de ρ avec le temps en un point donné.

La **dérivée convective** $\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho)$ résulte du caractère non uniforme de l'écoulement. Dans un écoulement stationnaire (voir plus loin) mais non uniforme, lors de son mouvement, une particule de fluide donnée explore des régions dans lesquelles la masse volumique peut varier.

b) Dérivée particulaire du champ de vitesse

La notion précédemment présentée de dérivée particulaire peut se généraliser à un champ vectoriel comme le champ des vitesses :

Définition :

La **dérivée particulaire** du champ des vitesses est le taux d'accroissement noté $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ obtenu en suivant une particule de fluide dans son mouvement

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{\vec{v}(M(t+\mathrm{d}t)) - \vec{v}(M(t))}{\mathrm{d}t}$$

On peut faire le même développement que précédemment sur chaque composante du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

On propose une transformation identique à celle réalisée pour la masse volumique pour obtenir :

A RETENIR

une expression *intrinsèque* (ne dépendant pas du système de coordonnées) de la dérivée particulaire du champ des vitesses : qui correspond donc à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point.

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$$

L'**accélération locale** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ rend compte du caractère variable du champ des vitesses avec le temps en un point donné.

L'**accélération convective** $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ résulte du caractère non uniforme de l'écoulement. Ce terme fait apparaître l'opérateur vectoriel $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)$ (prononcer "v scalaire gradient") qui correspond à :

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

à appliquer à chaque composante de $\vec{v}$.

Remarque : L'accélération convective peut se mettre sous la forme :

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

en utilisant des formulaires d'analyse vectorielle. Cette formulation est hors programme (mais bien utile en dynamique des fluides) et sera donc rappelée dans les données d'un problème. L'opérateur "$\overrightarrow{\mathrm{rot}}$" sera étudié dans la sous-partie suivante.

4) Éléments d'analyse vectorielle

Dans cette sous-partie, nous allons définir (avant d'utiliser...) les outils de l'analyse vectorielle utiles en mécanique des fluides et en électromagnétisme. On a déjà vu l'opérateur gradient donc, et l'opérateur "v scalaire gradient" pour exprimer l'accélération convective.

a) Opérateur divergence

Considérons un champ vectoriel (l'exemple sera pris sur le champ des vitesses, déjà connu) $\vec{v}$.

Définition :

On définit la **divergence** du champ des vitesses par la relation :

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}.\vec{v}$$

où $\vec{\nabla}$ correspond à l'opérateur "nabla" vu au chapitre 1 de Mécanique. Le point correspond au produit scalaire, bien entendu...

Expression en coordonnées cartésiennes

On peut exprimer $\mathrm{div}(\vec{v})$ à l'aide de l'expression de nabla :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

Expression en coordonnées cylindriques

On peut également exprimer $\mathrm{div}(\vec{v})$ à l'aide de l'expression de nabla :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

Expression en coordonnées sphériques

Enfin, on peut exprimer div($\vec{v}$) à l'aide de l'expression de nabla :

$$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}}$$

b) Opérateur rotationnel

On considère à nouveau le champ des vitesses.

Définition :

On définit le **rotationnel** du champ de vecteurs $\vec{v}$ par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Expression en coordonnées cartésiennes

Expression en coordonnées cylindriques

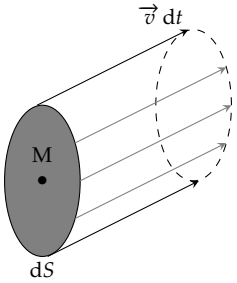
Expression en coordonnées sphériques

II - Équation locale de conservation de la masse

1) Vecteur densité de courant de masse ; débits

Un écoulement est un phénomène de transport puisqu'il s'agit d'un transfert de masse. C'est pourquoi il est naturel d'introduire la notion de vecteur **densité de courant de masse**.

Cherchons tout d'abord à exprimer la masse qui traverse une section (S) lors d'un écoulement. Considérons une section infinitésimale dS autour d'un point M et calculons la masse d^2m de fluide traversant dS pendant dt.



Cette masse se trouve dans le cylindre oblique dont la surface de base est $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (vecteur orthogonal à dS et de norme dS) et de génératrice $\vec{v}.\mathrm{d}t$. On a donc

$$\mathrm{d}^2m = \rho.\overrightarrow{\mathrm{d}S}.\vec{v}\mathrm{d}t$$

en sommant sur tous les points M de la surface (S), on obtient la masse qui traverse cette surface pendant dt notée dm ; et on en déduit la quantité de masse qui traverse (S) par unité de temps ou **débit de masse** $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$:

Définition :

$$D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint_{M\in(S)} \rho(M,t)\vec{v}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

exprimé en $\mathrm{kg.s^{-1}}$

La signification de ce débit de masse en terme de flux (voir Sup et le flux du champ magnétique) nécessite d'introduire le **vecteur densité de courant de masse** :

Définition :

Le vecteur **densité de courant de masse** est défini par

$$\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$$

Le débit de masse correspond alors au **flux du vecteur densité de courant de masse à travers la surface (S) orientée**.

Débit de volume

On peut également définir le débit de volume D_v :

Définition :

$$D_v = \iint_{M\in(S)} \frac{1}{\rho(M,t)}\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t} = \iint_{M\in(S)} \vec{v}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

qui correspond au flux du vecteur vitesse à travers la surface (S) orientée.

2) Équation locale de conservation de la masse

a) Cas unidimensionnel

3) Cas général de la conservation de la masse

La démonstration suivante est **Hors Programme** mais relativement classique tout de même.

On considère un volume $\mathcal{V}$ de fluide, délimité par une surface $\mathcal{S}$. Par définition, le flux de masse entrant au niveau de cette surface pendant dt est

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}\mathrm{d}t$$

Ce flux de masse au niveau de la surface entourant le volume est associé à une variation de masse entre t et $t + \mathrm{d}t$ à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$:

$$\Delta m = \iiint_{\mathcal{V}} (\rho(M,t+\mathrm{d}t) - \rho(M,t))\,\mathrm{d}^3\tau_M = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\right)\mathrm{d}^3\tau_M \mathrm{d}t$$

où $\mathrm{d}^3\tau_M$ est le volume de la particule de fluide autour du point M.

Comment relier ces deux masses ?

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est orienté vers l'extérieur du volume, donc on aura :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\right)\mathrm{d}^3\tau_M$$

Théorème :

En analyse vectorielle, le **théorème de la divergence** (également appelé **théorème de Green-Ostrogradski** ou théorème de flux-divergence), affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{F}$ sur un volume dans $\mathbb{R}^3$ et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}.\vec{F}(M,t)\mathrm{d}^3\tau_M = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Ici, l'égalité devient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\mathrm{div}(\vec{j}(M,t)) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\right]\mathrm{d}^3\tau_M = 0$$

Comme cette intégrale est nulle pour tout volume $\mathcal{V}$ non nul, on en déduit la généralisation :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{j}(M,t)) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) = 0}$$

III - Les écoulements essentiels

Nous allons, dans cette partie, lister des écoulements "modèles" pour lesquels la description cinématique du fluide est "simple". Ils sont au nombre de 3, et il faut donc les connaître très bien.

1) Écoulement stationnaire

Définition :
Un écoulement est dit **stationnaire** si le champ eulérien des vitesses est indépendant du temps.

Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend bien évidemment du référentiel. Prenons l'exemple d'une barque avançant à vitesse constante dans l'eau calme d'un canal. L'écoulement est stationnaire dans le référentiel de la barque. en revanche, les vagues produites à la surface de l'eau montrent que ce n'est pas le cas dans le référentiel lié à la rive.

On aura alors

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M,t) = \vec{0}}$$

Pour un système en écoulement stationnaire (voir tout début d'année...) il y a bien entendu **conservation du débit de masse**.

2) Écoulement incompressible

Attention, dans cette section nous parlons bien d'un *fluide compressible* qui peut se trouver mis en jeu dans un **écoulement incompressible**.

Définition : Un écoulement est **incompressible** si les particules de fluide conservent leur volume, c'est-à-dire encore qu'elles se déforment sans variation de masse volumique.

Remarque : Le modèle de l'écoulement incompressible décrit correctement l'écoulement des liquides qui relèvent de l'approximation du fluide incompressible indilatable.
En outre, il convient plus largement aux écoulements gazeux sous certaines conditions dont la discussion est délicate et dépasse le cadre du programme.

Pour que l'écoulement d'un fluide compressible soit considéré comme incompressible, il faut que la vitesse typique de l'écoulement U soit très petite devant la célérité c_{son} des ondes acoustiques dans le milieu. On peut définir le *nombre de Mach* $M = \frac{U}{c_{son}}$, qui doit rester petit devant 1. dans un gaz, $c_{son} \approx 300$ m.s^{-1} : les effets de compressibilité s'y manifestent donc pour des écoulements de vitesses élevées comme en aéronautique.

On aura ici :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0}$$

La notion de dérivée particulaire prend ici tout son sens, ainsi que son utilité !
On peut ouvrir un livre d'analyse vectorielle. On trouve : $\mathrm{div}(f.\vec{A}) = f\mathrm{div}(\vec{A}) + \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$. Appliqué ici à $\vec{j}$, on trouve :

$$\mathrm{div}(\vec{j}) = \rho\mathrm{div}(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho)$$

On peut également utiliser l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho) = -\rho\mathrm{div}(\vec{v})$$

Le terme de gauche est reconnaissable : il s'agit de la dérivée particulaire de la masse volumique

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

soit

A RETENIR

Un écoulement incompressible est caractérisé par :

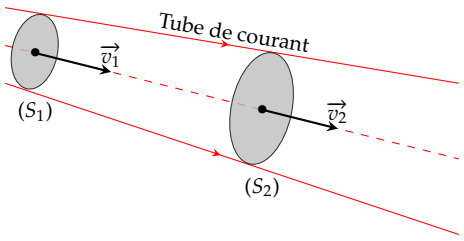
$$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, on en déduit

$$\iint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS} = 0$$

On dira que la vitesse est à *flux conservatif*.

Conséquence : conservation du débit de volume



$$\iint_{S_1} \vec{v}.\overrightarrow{dS_1} = \iint_{S_2} \vec{v}.\overrightarrow{dS_2}$$

soit $D_{v1} = D_{v2}$

Si on a un nœud (embranchement de plusieurs tuyaux dans l'écoulement), on peut démontrer une loi des nœuds en terme de débit volumique :

somme des débits volumiques entrants = somme des débits volumiques sortants

3) Écoulement irrotationnel - potentiel des vitesses

Définition :

On appelle **vecteur tourbillon** le vecteur $\vec{\Omega}(M,t)$ tel que :

$$\vec{\Omega}(M,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})(M,t)$$

On écoulement sera dit *irrotationnel* si $\vec{\Omega}(M,t) = \vec{0}$ pour tout point M et tout instant t, ce qui est équivalent à

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})(M,t) = \vec{0}}$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit rotationnel, ou **tourbillonnaire**.

Le vecteur tourbillon correspond au vecteur rotation (comme en mécanique du solide...) de la particule de fluide présente en M à t.

Lorsque l'écoulement est irrotationnel, un rapide coup d'œil sur un livre d'analyse vectorielle permet de déduire qu'il existe un potentiel $\phi(M,t)$ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)(M,t)$$

$\phi(M,t)$ est appelé *potentiel des vitesses*, et l'écoulement correspondant, un **écoulement potentiel**.

4) Exemples

- Écoulement uniforme $\vec{v} = U\vec{u}_x$
  Tracer profil, stationnaire, incompressible (particules de fluide gardent leur volume), irrotationnel $\phi = Ux + cte$
- Cisaillement simple $\vec{v} = \alpha y\vec{u}_x$
  Tracer profil, stationnaire, incompressible, tourbillonnaire (rot v = -alpha uz)
- Vortex plan $\vec{v} = \frac{\alpha}{2\pi r}\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires.
  Tracer profil, stationnaire, incompressible, irrotationnel ($\phi = \frac{\alpha\theta}{2\pi}$ convient)
- Écoulements sources et puits : ce sont des écoulements qui respectivement, divergent à partir d'un point ou convergent vers un point. A deux dimensions le champ des vecteurs vitesse associé est de la forme $\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r}\vec{u}_r$ (coord sphériques).
  Tracer profil, staionnaire, incompressible, irrotationnel ($\phi = \frac{Q\theta}{2\pi}$) convient.