Exercice 1 : Vrai ou faux

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux
6. Faux
7. Faux (voir dernier exercice)

Exercice 2 : un premier écoulement

Le champ de vitesse est non stationnaire, incompressible et irrotatiionnel.
Les lignes de courant sont des droites, colinéaires à Ox

Exercice 3 : un deuxième écoulement

1. Le champ de vitesse est stationnaire, incompressible, potentiel. Les lignes de courant sont des cercles ($\vec{v}$ selon $\vec{u}_\theta$)
2. $v(R_1) = R_1\Omega_1$ et $v(R_2) = R_2\Omega_2$
3. Oui, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$

Exercice 4 : Champ de vitesse bidimensionnel

$$\vec{v} = -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y$$

1. Ecoulement incompressible et irrotationnel. $\phi(x, y) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$ convient.
2. $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y$ soit sur la ligne de courant $-k.x\mathrm{d}y - kx\mathrm{d}x = 0$ l'équation cartésienne des lignes de courant est alors $y = \pm\frac{1}{x}$, qui correspond aux traits pleins (hyperboles). Les équipotentielles vérifient $\phi(x, y) = cste$ qui sont des paraboles : courbes en trait pointillé. On observe que les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.

Exercice 5 : Écoulement perturbé par une sphère

1. $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ (écoulement incompressible) et $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ soit $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi\right) = \Delta\phi = 0$
2. $$\phi(r) = A.r\cos(\theta) + \frac{B}{r^2}\cos(\theta) + C$$

   On détermine $\vec{v}$ (formulaire) et on utilise les CL : en $r \to \infty$, $\vec{v} \to -v_0\vec{u}_z$ (projeter $\vec{u}_z$ dans la base polaire). en $r = R$, on doit avoir $v_r = 0$; on trouve $\vec{v} = v_0\cos(\theta)\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\vec{u}_r - v_0\sin(\theta)\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{u}_\theta$
3. Les équipotentielles sont orthogonales à $\vec{v}$ en tout point.

Exercice 6 : Écoulement de Couette cylindrique

1. Le mouvement de rotation des cylindres est uniforme et donc invariant par rotation autour de l'axe (Oz). Il en est de même pour leur forme géométrique. Or en régime stationnaire, l'écoulement est entièrement imposé par les cylindres par le biais de la viscosité du fluide. En effet, la quantité de mouvement a eu le temps de diffuser dans tout le volume du fluide. Le principe de Curie (voir chapitre 12) permet alors d'affirmer que le champ des vitesses est indépendant de θ en régime stationnaire.

2. Le modèle de l'écoulement incompressible convient à l'écoulement des fluides peu compressibles que sont les liquides ainsi qu'à l'écoulement des fluides compressibles, à condition qu'ils soient de vitesses faibles devant la vitesse du son dans le fluide considéré.

3. ▹ Traduisons le caractère incompressible de l'écoulement en utilisant le formulaire fourni :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{v} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z}.$$

Avec $v_z = 0$ et v_θ ne dépendant que de r, la relation précédente se simplifie en :

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d(r\,v_r)}{dr} \qquad \text{soit} \qquad r\,v_r = A \qquad \text{avec } A \text{ constante.}$$

▹ Écrivons les conditions aux limites sur les cylindres : s'agissant de parois indéformables, le fluide ne pénètre pas au-delà de $r = R_2$ et ne rentre pas non plus en deçà de $r = R_1$. De façon équivalente, le débit volumique élémentaire à travers tout élément de surface s'appuyant sur l'un des cylindres est nul. Il en résulte que la composante normale du champ des vitesses s'y annule, soit :

$$v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0.$$

▹ On en déduit que $A/R_1 = A/R_2 = 0$, soit $A = 0$. Ainsi, $v_r = 0$: le champ des vitesses est purement orthoradial.

4. ▹ Le cylindre i $(i = 1,2)$ étant en rotation à vitesse angulaire Ω_i, la vitesse d'un point quelconque du cylindre est $v_i = R_i\Omega_i$. Puisque le fluide « accroche » aux cylindres, la vitesse d'un élément du fluide au contact d'un point du cylindre coïncide avec celle de ce point, soit :

$$\begin{cases} v_\theta(R_1) = \alpha R_1 + \beta/R_1 = R_1\Omega_1 \\ v_\theta(R_2) = \alpha R_2 + \beta/R_2 = R_2\Omega_2 \end{cases}.$$

▹ Les combinaisons linéaires $R_1(\mathbf{4.})-R_2(\mathbf{4.})$ et $R_2(\mathbf{4.})-R_1(\mathbf{4.})$ fournissent respectivement :

$$\alpha = \frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{(R_1R_2)^2(\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. ▹ Si les deux cylindres tournent à la même vitesse angulaire, les expressions de α et β se simplifient en :

$$\alpha = \Omega \qquad \text{et} \qquad \beta = 0.$$

Le champ des vitesses est donc :

$$\overrightarrow{v} = r\Omega\,\overrightarrow{u_\theta}.$$

▹ On reconnaît le champ des vitesses d'un solide en rotation à vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz) : on parle de « rotation solide ».

Remarque

Remarquons que l'écoulement est alors tourbillonnaire, de vecteur-tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u_z}$, soit $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\Omega}$.

6. ▹ Dans le cas où $\Omega_2 = 0$, les expressions de α et β deviennent :

$$\alpha = \frac{-R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\Omega_1}{1-(R_2/R_1)^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{(R_1R_2)^2\,\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{R_2^2\,\Omega_1}{(R_2/R_1)^2 - 1}.$$

▹ En faisant enfin tendre mathématiquement R_2 vers l'infini, c'est-à-dire en considérant physiquement que $R_2/R_1 \gg 1$, il vient :

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = R_1^2\Omega_1 \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{v} = \frac{R_1}{r}R_1\Omega_1\,\overrightarrow{u_\theta}.$$

▹ On constate que le cylindre intérieur entraîne le fluide, de telle sorte que la vitesse du fluide coïncide avec celle du cylindre en $r = R_1$ (effet des conditions aux limites visqueuses étudiées au chapitre 10). Cependant, l'efficacité de cet effet d'entraînement décroît avec la distance à l'axe. En particulier, à l'infini, le fluide n'est pas affecté.