Les expressions des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas données ; elles se trouvent dans le cours !

L'exercice 1 est constitué d'un vrai ou faux, très proche du cours. Vous pouvez également valider la fiche 25 du cahier d'entrainement. Les exercices 2 et 3 permettent de consolider l'utilisation des opérateurs vus pour décrire les écoulements "classiques". L'exercice 4 modélise de manière simplifiée un écoulement bidimensionnel est nécessite une plus grande capacité calculatoire. Les exercices 5 et 6 modélisent des écoulements réels, autour d'une sphère, ou l'écoulement de Couette cylindrique.

Exercice 1

Vrai ou faux

1. Une particule de fluide est un atome ou une molécule.
2. Les débits de volume et de masse sont associés au choix d'une surface orientée.
3. L'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\mathrm{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

   avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$
4. Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel.
5. Un écoulement incompressible est nécessairement l'écoulement d'un fluide incompressible.
6. Le lond d'une canalisation siège d'un écoulement stationnaire d'eau liquide, les débits se conservent.
7. Un écoulement dans lequel le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tout point est un écoulement uniforme : le fluide se translate en bloc.

Cahier d'entraînement

Fiche numéro 25

Exercice 2 : un premier écoulement

Dans le demi-espace $y > 0$, un fluide est caractérisé par un champ de vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = ae^{-ky}\cos(\omega t - ky)\vec{u}_x$$

Le champ de vitesse est-il stationnaire ? Incompressible ? Irrotatiionnel ? Quelle est la forme des lignes de courant ?

Exercice 3 : un deuxième écoulement

Un fluide s'écoule entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Les cylindres tournent à des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2. En coordonnées cylindriques, le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{u}_\theta$$

1. Le champ de vitesse est-il stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ? Quelle est la forme des lignes de courant ?
2. Le fluide est visqueux donc ne glisse pas sur les parois (voir chapitre 2 pour les justifications). En déduire les constantes A et B.
3. Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

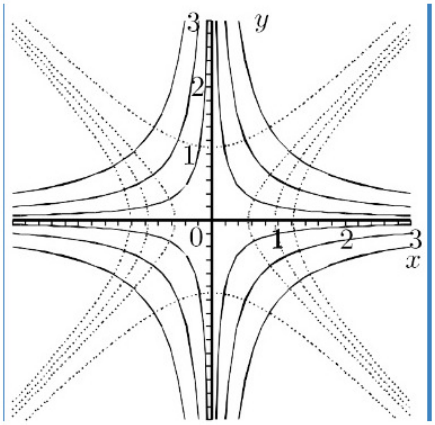
Exercice 4 : Champ de vitesse bidimensionnel

On considère un écoulement stationnaire dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y$$

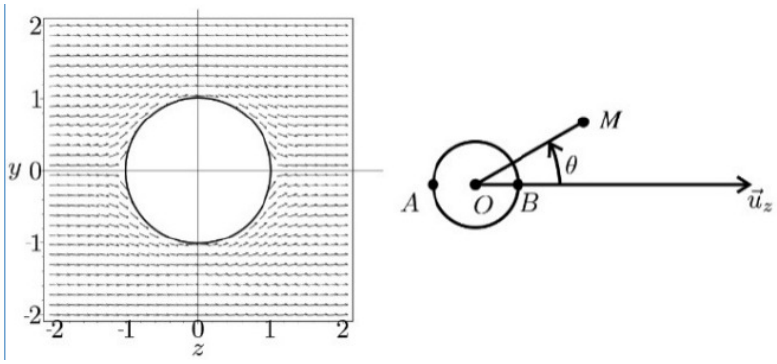
1. Déterminer la nature de l'écoulement et le potentiel des vitesses ϕ. On prendra $\phi(x = 0, y = 0) = 0$.

2. Calculer l'équation des lignes équipotentielles et des lignes de courant (ligne pour laquelle la vitesse est un vecteur tangent). Interpréter la figure suivante représentant les lignes équipotentielles et les lignes de courant.



Exercice 5 : Écoulement perturbé par une sphère

On considère un écoulement permanent uniforme : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel. Le champ des vitesses ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.



1. Montrer que le potentiel des vitesses vérifie $\Delta\phi = 0$ (équation de Laplace).
2. On cherche le potentiel des vitesses sous la forme :

$$\phi(r) = A.r\cos(\theta) + \frac{B}{r^2}\cos(\theta) + C$$

Déterminer A et B. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de v_0, r, R et θ.

3. Dessiner l'allure des lignes équipotentielles.

Exercice 6 : Écoulement de Couette cylindrique

Deux cylindres d'axe (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ sont mis en rotation à vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2. On souhaite étudier l'écoulement stationnaire du fluide pris entre les deux cylindres.

Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{u}_r + v_\theta(r)\vec{u}_\theta$.

1. Pourquoi peut-on supposer le champ des vitesses indépendant de θ ?
2. On suppose désormais l'écoulement incompressible. Préciser dans quelles conditions expérimentales concrètes cette approximation est validée.
3. Montrer que $v_r = 0$.
4. On cherche la composante orthoradiale $v_\theta(r)$ sous la forme $v_\theta(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}$ avec α et β constantes. Déterminer α et β en supposant que le fluide "accroche" aux cylindres à leur contact en $r = R_1$ et $r = R_2$.
5. Décrire l'écoulement si les deux cylindres tournent avec la même vitesse angulaire $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$.
6. Décrire l'écoulement si le cylindre extérieur ne tourne pas ($\Omega_2 = 0$) et que son rayon R_2 tend vers l'infini, ce qui revient à ne conserver que le cylindre intérieur.