Informatique du Tronc Commun

TD n°3 Programmation dynamique

Parcours possibles

- ♪ Si vous avez des difficultés en python : exercices n°1, n°2.
- ♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°2, n°3.
- ♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, n°4, n°5.

I Exercices fondamentaux

Exercice n°1 Suite de Fibonacci ♪

On s'intéresse à la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Q1. Écrire une fonction récursive `fibo_rec(n:int)->int` « naïve » qui renvoie la valeur de F_n.

Q2. Quels sont les calculs effectués en appelant `fibo_rec(5)` ? Combien de fois est calculé F_2 ? Pour cela, représenter schématiquement les appels successifs (comme nous avons fait dans le cours pour les coefficients binomiaux). Commenter.

Q3. Pourquoi est-il intéressant d'utiliser la programmation dynamique ?

On envisage les différentes façons de programmer la suite de Fibonacci par programmation dynamique.

Q4. Solutions de haut en bas avec mémoïsation :

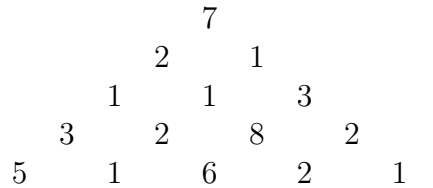
(a) Adapter la fonction récursive précédente pour écrire la fonction `fibo_mem1(n:int,d={}:dict)->int` avec un dictionnaire initialisé au dictionnaire vide.

(b) Compléter la fonction ci-dessous, où le dictionnaire `d` est une variable globale de `fibo_mem3` mais locale pour `fib`.

```
def fibo_mem3(n):
    d={}
    def fib(i): # sous fonction qui calcule f_i
        if ...
            ....
        else:
            if ... :
                ...
            else:
                ...
            ...
        return ...
    return ...
```

Q5. On envisage maintenant une solution ascendante. Écrire la fonction `fibo_asc(n:int)->int` qui remplit un dictionnaire (initialisé avec les deux premières valeurs F_0 et F_1) au fur et à mesure du calcul des termes successifs de la suite de Fibonacci. Les clés seront les entiers i et les valeurs associées les F_i.
La fonction renvoie F_n.

Exercice n°2 Coût d'un chemin ♪♪



On considère une pyramide de nombres comme celle de l'exemple ci-contre. En partant de celui du haut (ici 7), le but est de trouver le chemin vers le bas qui maximise la somme de tous les nombres parcourus. Chaque entier peut être suivi d'une des deux cases inférieures.
Dans cet exemple, on peut espérer obtenir : $25 = 7 + 1 + 3 + 8 + 6$

Pour représenter la pyramide précédente, on utilise une liste de listes :

```
P = [
    [7],
    [2, 1],
    [1, 1, 3],
    [3, 2, 8, 2],
    [5, 1, 6, 2, 1]
    ]
```

On cherche à écrire une fonction prenant comme argument la liste `P`, une ligne `i` et une colonne `j`, et renvoyant la somme maximale vers le bas de la pyramide à partir du nombre d'indices `i` et `j`.

Q1. Questions préliminaires sur la liste de listes `P`.

(a) Quelle valeur renvoie `P[3][1]` ?

(b) Quels sont les deux nombres situés en dessous de `P[i][j]` dans la pyramide ?

Q2. Que doit renvoyer la fonction dans le cas où `i` correspond à la dernière ligne ? Quel est le rang de la dernière ligne ?

Q3. À partir de la case `(i,j)`, quelles sont les deux possibilités à envisager ? Laquelle faut-il choisir ?
Exprimer récursivement le résultat qui donne la somme maximale à partir de la case `(i,j)`.

Q4. Écrire la fonction récursive `somme_rec(P:list[list],i:int,j:int)->int` qui renvoie la la somme maximale vers le bas de la pyramide à partir du nombre d'indices `i` et `j`.

Q5. Comment obtenir la somme maximale de la pyramide ?

Q6. Évaluer la complexité de la fonction précédente.

On cherche à présent à mettre en place une programmation dynamique. Pour cela, il faudra mémoïser les résultats intermédiaires à l'aide d'un dictionnaire dont la clé est un 2-uplet des deux indices du nombre correspondant et la valeur la somme maximale à partir de ce nombre.

Q7. Recopier et compléter la fonction suivante afin d'écrire la version dynamique à la fonction récursive précédente `somme_mem(P:list[list],i:int,j:int,dico={})`.

```
def somme_mem(P,i,j,dico={}):
    if ... :
        return ...
    elif i== ... :
        c= ...
    else:
        a = ... # valeur de la somme si on part à gauche
        b = ... # valeur de la somme si on part à droite
        c = ...
    ... # mémoïse
    return ...
```

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Plus longue séquence commune ♪ ♪

La distance d'édition permet de mesurer le degré de similarité de deux chaînes. Elle ne donne pas d'information quant aux séquences maximales communes aux deux chaînes. Or, en génétique par exemple, il peut s'avérer très important de savoir quels sont les points communs de deux génomes. Le problème de la plus longue sous-chaîne permet d'apporter une réponse à cette question.

Définition : Sous-chaine d'une chaîne de caractères

On appelle sous-chaine d'une chaîne de caractères $a = a_0...a_{n-1}$ toute chaine de caractères s extraite de a telle que $s = a_i...a_k$ où $0 \leq i... \leq k \leq n-1$ et $\forall p \in \{i, ..., k\}, a_p \in$. Les caractères de s n'apparaissent pas nécessairement de manière consécutive dans la chaîne a.

Définition : Plus longue sous-chaine commune

Soit $a = a_1...a_q$ et $B = b_1...b_p$ deux chaines de caractères non vides. On appelle plus longue sous-séquence commune à a et b toute sous-chaîne commune à a et b de longueur maximale.

Si l'une des chaînes a ou b est vide ou si a et b n'ont aucune sous-chaîne commune, la chaine vide est alors l'unique plus longue sous-chaîne commune à a et b.

On note $\mathcal{L}(a, b)$ la fonction qui renvoie la longueur maximale d'une sous-chaîne commune à a et b.

Q1. On considère les chaines `a="AATGCG"` et `b="TATTAGC"`, identifier la (les) plus longues sous-chaînes communes et donner la valeur de $\mathcal{L}(a, b)$.

Soient les deux chaines de caractères a et b de longueurs n_a et n_b.

Soit $\ell(i, j)$ la longueur de la plus longue sous-séquence des chaines extraites $a_0a_1...a_{i-1}$ et $b_0b_1...b_{j-1}$ de longueurs i et j, des chaînes a et b, de longueurs n_a et n_b.

Q2. On cherche à établir la relation de récurrence permettant d'exprimer $\ell(i, j)$.

(a) Si l'une des deux chaînes extraites est vide (c'est-à-dire $i = 0$ ou $j = 0$), que vaut $\ell(i, j)$?

(b) Si $a_{i-1} = b_{j-1}$, par quel caractère termine la plus longue sous-séquence commune ?
Quel est le lien entre la longueur de la plus longue sous-séquence commune de $a_0...a_{i-1}$ et $b_0...b_{j-1}$, et celle entre les chaînes privées de leur dernier caractère (a_{i-1} et b_{j-1}) ?
En déduire l'expression de $\ell(i, j)$ en fonction de $\ell(i-1, j-1)$.

(c) Si $a_{i-1} \neq b_{j-1}$, il faut chercher la plus longue sous-séquence commune entre la chaine extraite de a privée de a_{i-1} et b, et le cas inverse.
Exprimer $\ell(i, j)$ en fonction de $\ell(i-1, j)$ et $\ell(i, j-1)$.

(d) Compléter la relation de récurrence ci-dessous :

$$\forall i \in [\![0, n_a]\!], \forall j \in [\![0, n_b]\!], \ell(i, j) = \begin{cases} \text{.....} & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ \text{.....} & \text{si } a_{i-1} = b_{j-1} \\ \text{.....}\big(\ell(\text{.....}, \text{.....}), \ell(\text{.....}, \text{.....})\big) & \text{si } a_{i-1} \neq b_{j-1} \end{cases}$$

Q3. Pour la résolution de bas en haut, on utilise un tableau dans lequel on stocke les résultats au fur et à mesure, en partant de la plus petite chaine possible (la chaine vide) en allant jusqu'au problème souhaité.

On s'intéresse à la recherche de la longueur de la plus longue sous-séquence commune entre `a="AATGCG"` et `b="TATTAGC"`.
Pour cela recopier et remplir le tableau ci-contre, qui contient dans la case (i, j) la longueur de la plus longue sous-séquence commune à la chaine `a[:i]` (les i premiers caractères de a) et à la chaine `b[:j]` (les j premiers caractères de b).

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								

Q4. Compléter la fonction `L_bh(ch1:str,ch2:str)->int` qui résout $\mathcal{L}(ch1, ch2)$ avec la programmation dynamique de bas en haut, c'est-à-dire qui renvoie la plus longue sous-séquence commune aux deux chaines de caractères `ch1` et `ch2`.

ATTENTION il y a un décalage de 1 entre la place dans le tableau et la place du caractère dans la chaîne de caractères, quand on remplit la case `tab[i][j]` on compare les caractères situés, dans les chaines de caractères, aux places `i-1` et `j-1`.

```
def L_bh(ch1:str,ch2:str)->int:
    n1,n2=len(ch1),len(ch2)
    # initialisation du tableau avec des 0
    tab=
    for i in range(1,n1+1):
        for j in range(1,n2+1):
            if                                    : # le dernier caractère
  de ch1[:i] est identique au dernier caractère de ch2[:j]
                tab[i][j]=
            else:
                a=                              # longueur de la plus longue
  chaine commune à ch1[:i-1] et à ch2[:j]
                b=                              # longueur de la plus longue
  chaine commune à ch1[:i-1] et à ch2[:j]
                tab[i][j]=                      # on choisit la plus longue
  des deux précédentes
    return                        # dernière case du tableau
```

Q5. Compléter la fonction `L_mem(ch1:str,ch2:str,d={})->int` ci-dessous qui résout $\mathcal{L}(ch1, ch2)$ récursivement, donc de haut en bas, avec mémoïsation.

On stocke les calculs successifs dans le dictionnaire `d` dont la clé est un 2-uplet des deux chaines considérées, et la valeur associée est la longueur de la plus longue sous chaine commune à ces deux chaines.

```
def L_mem(ch1:str,ch2:str,d={})->int:
    if (ch1,ch2) in d: # le calcul a déjà été fait pour ces deux chaines

    else:
        if                  : # si l'une des chaines est vide
            c=
        elif                : # si les deux derniers caractères sont
  identiques
            c=
        else:
            a=               # longueur de la plus longue sous-séquence
  commune à ch1 privée du dernier caractère, et à ch2
            b=               # longueur de la plus longue sous-séquence
  commune à ch2 privée du dernier caractère, et à ch1
            c=               # max des deux longueurs précédentes
        d[(ch1,ch2)]=       # on enregistre la valeur calculée
        return dico[(ch1,ch2)]
```

Exercice n°4 Partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs ♪ ♪ ♪

Vous partez en randonnée avec un.e ami.e. Vous avez un certain nombre, noté n, de choses à emporter : tente, victuailles, duvets, ... Vous souhaitez répartir toutes les choses à porter sur vos deux dos de la façon la plus équitable possible. Nous cherchons un algorithme pour répartir ces choses de façon optimale.
On note $C = \{i\}_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ l'ensemble des choses à emporter, chacune de masse en gramme, m_i, avec $m_i \in \mathbb{N}$.
On note C_1 l'ensemble des choses que vous allez devoir porter, de masse $M_1 = \sum_{k\in C_1} m_k$, et C_2 l'ensemble des choses que votre ami.e va devoir porter, de masse $M_2 = \sum_{k\in M_2} m_k$.
Ainsi, on cherche C_1 et C_2 tel que $C_1 \cup C_2 = C$, avec $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, en minimisant $|M_1 - M_2|$.

Q1. Quelle est la valeur de M_1 et M_2 qui minimise $|M_1 - M_2|$ (c'est-à-dire égal à 0, même si ce n'est pas atteignable) ? On note cette valeur M_I.

Q2. Combien de partitions faudrait-il évaluer si l'on voulait trouver la partition optimale en les énumérant toutes ? Commenter.

Q3. Soit $P(i,m)$ une fonction booléenne qui indique s'il existe un sous-ensemble des i premières choses, $\{0,1,\dots,i-1\}$, dont la masse totale est exactement m. Compléter la définition de $P(i,m)$ par récurrence ci-dessous.

$$P(i,m) = \begin{cases}
\begin{array}{|llll|c|}\hline
 & & & & \text{True / False} \\ \hline
\text{si} & i = 0 & \text{et} & m = 0 & \\ \hline
\text{si} & i = 0 & \text{et} & m \neq 0 & \\ \hline
\text{si} & P(i-1,m) & = & True & \\ \hline
\text{si} & P(i-1, m-m_{i-1}) & = & True & \\ \hline
\end{array}
\end{cases}$$

On envisage une approche ascendante, pour laquelle on stocke les résultats successifs en commençant par les plus petits sous-problèmes.

Q4. Compléter le tableau ci-dessous contenant les valeurs de $P(i,m)$ pour toutes les valeurs de $i \in [\![0,n]\!]$ et $m \in [\![0,M]\!]$ pour l'ensemble des masses suivantes : $m_0 = 8$, $m_1 = 5$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$ ($n = 4$). La masse totale est donc $M = 17$.

Chaque ligne du tableau correspond à une valeur de i et on rappelle la valeur des masses du sous-ensemble $\{0,1,...,i-1\}$. Chaque colonne correspond à une masse m de $[\![0,M]\!]$.

On mettra un « T » pour True, et on pourra se contenter d'un « · » pour False.

i \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$i = 0$ $\emptyset$																		
$i = 1$ $m_0 = 8$																		
$i = 2$ $m_1 = 5$																		
$i = 3$ $m_2 = 2$																		
$i = 4$ $m_3 = 2$																		

Q5. Quelle est la complexité d'un algorithme qui compléterait un tableau donnant toutes les valeurs $P(i,m)$?

Q6. À partir de P et M_I, comment peut-on donner la valeur minimale de $|M_1 - M_2|$?
Calculer la valeur minimale de $|M_1 - M_2|$ pour les masses $\{8,5,2,2\}$.

Q7. Expliquer à l'aide du tableau P comment trouver un groupe qui s'approche le plus du poids idéal ?

Q8. Écrire la fonction `tableau(C:list)->list` qui à partir de la liste des masses des objets renvoie le tableau des valeurs (`True` ou `False`) de P.

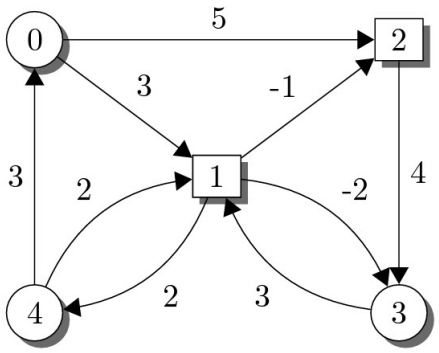
On fera attention au décalage de 1 entre le rang dans la liste `C` et le numéro de la ligne.

Q9. Écrire la fonction `partition(C:list)->(list,list)` qui à partir du tableau des valeurs de P renvoie les deux listes C_1 et C_2 des ensembles de choses à emporter tels que $|M_1 - M_2|$ soit minimal. Pour cela, il faut :

- Remplir le tableau des valeurs de P,
- Déterminer la masse atteignable la plus proche de $MI = M/2$. C'est M_I si dans le tableau dans la colonne `MI` ligne `n` il y a `True`. Sinon il faut la calculer : utiliser Q6.
- Utiliser Q7 pour finir.

Exercice n°5 Plus courts chemins dans un graphe : Algorithme Floyd-Warshall ♪ ♪ ♪

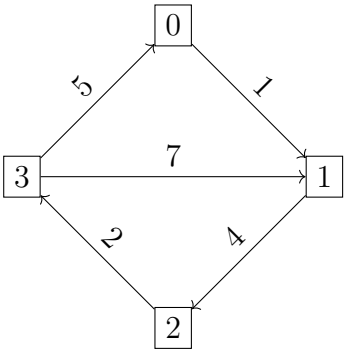
On considère un graphe orienté pondéré, par exemple :



Sous certaines conditions, l'algorithme Floyd-Warshall * calcule, pour chaque paire de sommets d'un graphe, la distance entre les deux sommets. La distance entre deux sommets est définie par la longueur du plus court chemin, s'il en existe au moins un, entre les deux sommets. Un chemin est une suite d'arcs et sa longueur est la somme des poids des arcs.

Une condition d'utilisation : le graphe n'a aucun cycle de poids négatif.

Principe d'optimalité : si A-K-F est le plus court chemin entre A et F, alors A-K est le plus court chemin entre A et K et K-F est le plus court chemin entre K et F. Dans une séquence optimale, chaque sous-séquence est optimale.



Q1. On considère le petit graphe ci-contre.

(a) Quels sont les deux chemins envisageables reliant 3 à 1 ? Indiquer pour chacun d'eux la distance associée ?

(b) Même question pour le trajet de 2 à 1.

(c) En quoi ces deux questions font apparaître un chevauchement de sous-problèmes ?

Q2. Pour résoudre le problème, on construit une matrice `D` initialisée par la matrice d'adjacence du graphe.

(a) Remplir la matrice `D` pour l'exemple du petit graphe étudié précédemment.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

(b) On considère à présent les trajets de `i` à `j` passant par le nœud (0). Sur que trajet `i` → `j`, la distance est-elle raccourcie ?

(c) Modifier alors une case de la matrice `D`, de sorte à ce que chaque cellule `(i,j)` indique toujours la valeur du chemin le plus court de `i` à `j`.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Comment cette cellule est-elle calculée à partir des autres coefficients de la matrice ?

∗. inventé par Bernard Roy en 1959 et publié en 1962 par Stephen Warshall puis Robert Floyd.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $D^{(k)}$ la matrice telle que $D^{(k)}_{i,j}$ est le poids d'un chemin de poids minimal de i vers j avec comme éventuels sommets intermédiaires uniquement des sommets entre 0 et $k-1$.

En particulier on a :

- $D^{(1)}_{i,j}$ est le minimum entre le poids de l'arc $i \to j$ (s'il existe) et le poids du chemin $i \to 0 \to j$ (s'il existe) ;
- $D^{(2)}_{i,j}$ est le poids d'un chemin de poids minimal qui part de i, arrive sur j, et ne peut avoir comme sommets intermédiaires que 0 et 1 (éventuellement un seul des deux ou aucun des deux).
- ...
- $D^{(n)}_{i,j}$ est le poids d'un chemin de poids minimal de i vers j, pouvant passer par n'importe quel sommet intermédiaire.

La matrice $D^{(n)}$ est donc la solution de notre problème, et les autres $D^{(k)}$ sont nos sous-problèmes.

Q3. Que vaut $D^{(0)}$ la matrice des distances minimales quand on passe par aucun sommet intermédiaire ?

Q4. On cherche la relation de récurrence entre $D^{(k+1)}_{i,j}$ en fonction des valeurs de $D^{(k)}_{p,q}$.

Il y a deux possibilités pour ce chemin minimal qui part du sommet `i` arrive en `j` et passe par des sommets de numéros inférieurs ou égaux à `k` :

(a) Soit il passe par le sommet k avec le parcours entre i et k puis k et j tous les deux minimaux.
Comment s'exprime la distance de ce parcours en fonction de $D^{(k)}_{i,k}$ et $D^{(k)}_{k,j}$?

(b) Soit il ne passe pas par le sommet k mais seulement par les précédents. Comment s'exprime $D^{(k+1)}_{i,j}$ en fonction de $D^{(k)}_{i,j}$?

(c) Comment choisir entre les deux valeurs précédentes ?

(d) En déduire la relation de récurrence écrite sous la forme :

$$D^{(k+1)}_{i,j} = \text{.....}\Big(\text{..... , ...}\Big)$$

Q5. Compléter la fonction `matriceSuivante(D:list[list],k:int)->list[list]` ci-dessous qui, si on lui donne comme argument une matrice `D` (liste de liste) correspondant à $D^{(k)}$, ainsi que `k`, et renvoie comme résultat la matrice (liste de liste) correspondant à $D^{(k+1)}$.

```
from copy import deepcopy
def matriceSuivante(D,k):
    Dsuiv=deepcopy(D) # copie en profondeur de D, permet de modifier Dsuiv sans modifier D
    n=len(D)
    for  i ..... : # parcours des lignes
        for j ..... : # parcours des colonnes
            dk = ..... # distance du parcours si pour aller de i à j on passe par k
            if ..... :  # si c'est plus court de passer par k que de ne pas y passer, pour aller de i à j
                Dsuiv[i][j] = ..... # modification de la distance minimale pour aller de i à j
    return Dsuiv
```

Q6. Écrire une fonction `FloydWarshall(M:list[list])->list[list]` qui prend comme argument la matrice `M` d'adjacence d'un graphe et renvoie la matrice `P` telle que $P_{i,j}$ donne le poids minimal d'un chemin de i vers j. On utilisera la fonction `matriceSuivante(D,k)`.

Q7. Adapter le code précédent pour pouvoir reconstituer un chemin réalisant le poids minimal.

Explicitement : écrire une fonction `FloydWarshallComplet(M)` qui prend comme argument la matrice d'adjacence d'un graphe et renvoie un couple (`P`, `C`), où `P` code la matrice telle que $P_{i,j}$ donne le poids minimal d'un chemin de i vers j, et `C` code la matrice telle que $C_{i,j}$ donne un chemin de poids minimal de i vers j (`C` est donc une liste de listes de listes).