Informatique du Tronc Commun

Chapitre n°5 Théorie des jeux – *Complété*

Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier la théorie de certains jeux à deux joueurs où chaque joueur joue alternativement.

La théorie des jeux a été initiée par John Von Neumann pendant et après la seconde guerre mondiale. Il s'intéresse aux jeux à deux joueurs qui disposent d'un nombre fini d'actions et se poursuit avec le théorème général de Nash en 1950. Même si le mot jeu a un côté plaisant, amusant, la recherche sur les jeux est un domaine sérieux et a connu un essor très important avec des applications dans de nombreux domaines comme l'économie, la politique, la physique, la biologie. La recherche informatique s'est aussi développée avec les jeux sur les graphes qui ont des applications dans plusieurs domaines d'informatique théorique et des mathématiques en permettant de modéliser certains problèmes.

Tout comme les algorithmes d'IA développés aujourd'hui, cette théorie s'inscrit dans l'objectif d'aider à la décision lorsque l'environnement est incertain, c'est-à-dire complexe et imprévisible. Elle fait intervenir des joueurs considérés comme des individus rationnels, des règles et des contextes d'évolution du jeu.

Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont de :

- Assimiler la notion de jeux d'accessibilité à deux joueurs : vocabulaire, modélisation par un graphe biparti.
- Comprendre la notion de stratégie : déterminer une position gagnante, utiliser la notion d'attracteur, construire une stratégie gagnante.
- Connaître le fonctionnement de l'algorithme min-max.

Pré-requis

- Graphes

Plan du cours

I Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe **2**
I.1 Définitions 2
I.2 Modélisation par un graphe biparti 2
I.2.a) Graphe du jeu 2
I.2.b) Graphe biparti 3
I.2.c) Graphe du jeu de Nim 3
I.3 Stratégies et positions gagnantes 3
I.4 Calcul des positions gagnantes 4
I.4.a) Attracteurs 4
I.4.b) Algorithme de calcul de l'attracteur 7
I.5 Stratégie gagnante 10

II Heuristique. Algorithme Min-Max **11**
II.1 Heuristique 11
II.1.a) Définition 11
II.1.b) Exemple : puissance 4 11
II.2 Algorithme Min-Max avec heuristique . . . 12
II.2.a) Principe 12
II.2.b) Exemples simples de mise en œuvre 12
II.2.c) Écriture de l'algorithme 15

I Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe

I.1 Définitions

Définition : Jeux d'accessibilité

Un jeu d'accessibilité est un jeu à deux joueurs, à information complète et parfaite, séquentiel et pour lequel il n'y a pas de hasard.

- **jeux à information complète** : tous les joueurs ont une connaissance totale des données du jeu : règles, pièces, actions possibles, fonction de gain, objectifs des autres joueurs.
  Cela exclu la plupart des jeux de cartes puisqu'on ne connait pas le jeu de l'adversaire.
- **jeux séquentiels** : les joueurs décident de leur stratégie les uns après les autres et peuvent donc tenir compte des actions des joueurs précédents.
- **jeux sans mémoire** : le joueur qui doit jouer prend une décision en fonction de la situation présente et pas de situations passées.
- **jeux sans hasard** : dans une situation donnée, une décision amène toujours a la même nouvelle situation.

Exemple 1. Morpion, Dames, Echecs, Puissance 4

Exemple 2. Jeu de Nim

Un jeu de Nim est un jeu d'accessibilité dont il existe de nombreuses variantes. Il s'agit de déplacer, de poser ou de retirer un certain nombre d'objets simples (pièces, allumettes, graines, des billes ...). Le dernier à jouer gagne ou perd (variante misère). Le jeu de Nim fait donc nécessairement un perdant et un gagnant.
Une des « célèbres » variantes est le jeu des bâtonnets de Fort Boyard. Dans ce duel, le candidat et le Maître se retrouvent en face d'un alignement de plusieurs bâtonnets blancs en bois. Chacun leur tour ils peuvent en retirer un, deux, ou trois. Celui qui prend le dernier bâtonnet perd le duel.

FIGURE 1 – Jeu des bâtonnets

On se basera sur ce jeu pour l'ensemble du chapitre. Les deux joueurs seront notés J_1 et J_2 : J_1 est le premier joueur à jouer. Il ne peut pas y avoir de match nul, ni de partie infinie.

I.2 Modélisation par un graphe biparti

I.2.a) Graphe du jeu

Définition : Graphe du jeu

On modélise l'ensemble du jeu par un graphe orienté $G = (S, A)$, tel que chaque sommet dans S représente une position du jeu (à partir de laquelle J_1 ou J_2 doit jouer) et chaque arrête $a = (s_1, s_2) \in A$ signifie qu'un des deux joueurs peut passer de la position s_1 à la position s_2.

Le jeu peut être dans le même état au moment où soit J_1, soit J_2 joue : ce sont deux positions différentes (donc deux sommets différents).

I.2.b) Graphe biparti

Définition : Graphe biparti

Un graphe (S, A) est biparti s'il existe une partition de S en deux parties S_1 et S_2, telles qu'aucune arête de S ne relie deux sommets de S_1, ou deux sommets de S_2 (les joueurs jouent à tour de rôle).
Les sommets de S_1 représentent les situations où le joueur 1 joue (et donc choisit son coup), on dit que ces **sommets sont contrôlés** par J_1, les sommets de S_2 représentent les situations où le joueur 2 joue.

Une arête du graphe représente un coup que l'un ou l'autre des joueurs peut effectuer.

Remarques 1. *Le programme se limite aux **jeux d'accessibilité** pour lesquels :*

- *les **graphes** sont supposés **acycliques**, et donc toute partie est finie ;*
- *les **conditions de victoire** sont déterminées par les **positions (sommets) sans successeurs** : la partie est terminée et on sait si un joueur a gagné ou s'il y a match nul.*

I.2.c) Graphe du jeu de Nim

Pour le jeu de Nim, avec n bâtonnets au départ, on notera (k, i) la situation où le joueur i joue, avec k bâtonnets placés devant lui, et l'on aura donc :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(k,1) | 0 \leq k \leq n\} \\ S_2 &= \{(k,2) | 0 \leq k \leq n-1\} \end{aligned}$$

Si q est un élément de la règle (c'est-à-dire un nombre de bâtonnets que l'on peut retirer), et si $k - q \geq 0$, il y aura alors les arêtes suivantes (chaque joueur peut enlever q bâtonnets aux k bâtonnets présents, l'autre joueur se retrouve alors avec $k - q$ bâtonnets) :

$$\begin{aligned} (k,1) &\longrightarrow (k-q,2) \\ (k,2) &\longrightarrow (k-q,1) \end{aligned}$$

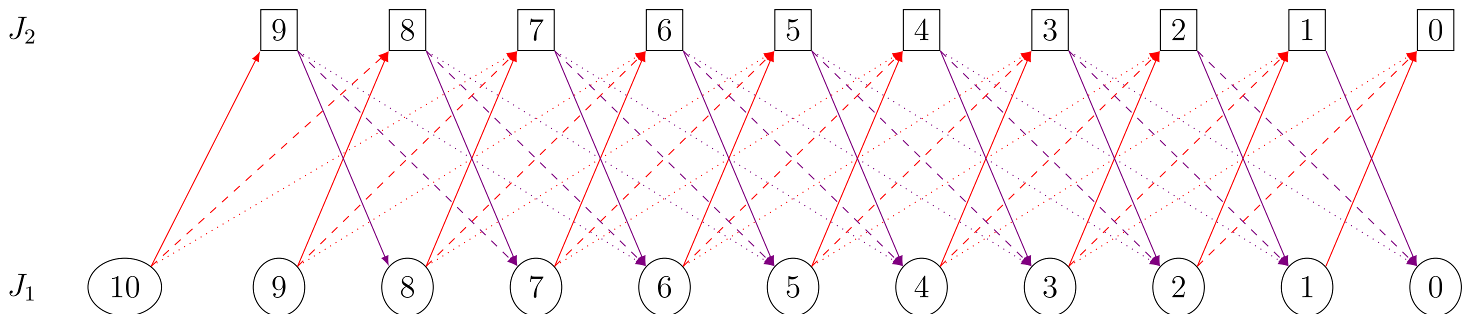


FIGURE 2 – Graphe biparti du jeu des bâtonnets, en partant de $n = 10$ bâtonnets, et la règle autorise le retrait de 1, 2 ou 3 bâtonnets.

I.3 Stratégies et positions gagnantes

Définition : Partie

Une partie est un chemin dans le graphe, c'est-à-dire une suite (s_n) de positions telle que pour tout i, $(s_i, s_{i+1}) \in A$.

On suppose qu'il existe des parties V_1 et V_2 de S, non vides et disjointes, qui représentent respectivement les ensembles de sommets où J_1 et J_2 gagnent la partie.

Définition : Partie gagnante

Une partie est dite gagnante pour J_1 si sa dernière position appartient à V_1, et si aucune de ses autres positions n'appartient à $V_1 \cup V_2$.
Une partie est dite gagnante pour J_2 si sa dernière position appartient à V_2, et si aucune de ses autres positions n'appartient à $V_1 \cup V_2$.

Rq : Un match nul est alors une partie se terminant en une position (pas dans $V_1 \cup V_2$) de laquelle ne part aucune arête.

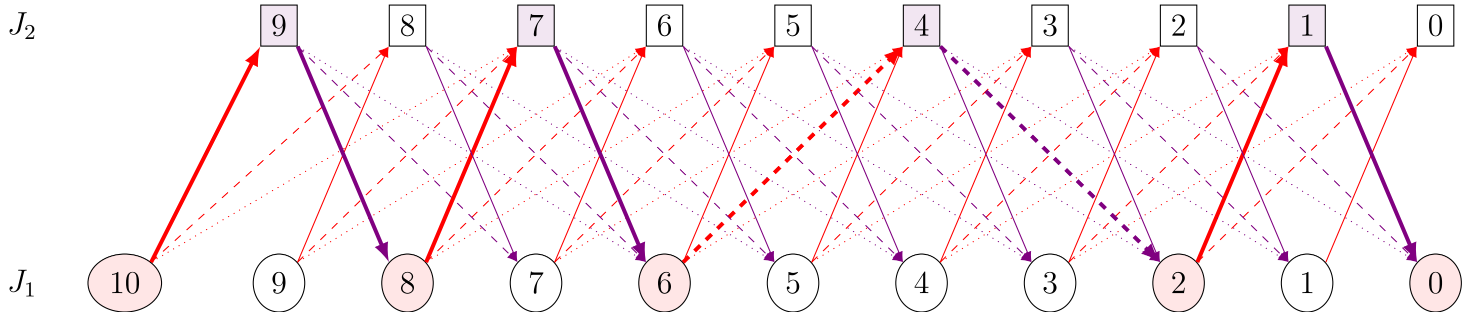


FIGURE 3 – Exemple d'une partie remportée par J_1.

Définition : Stratégie gagnante

On dit d'une **stratégie** qu'**elle est gagnante** pour le joueur J à partir d'un état S (sommet du graphe de jeu), si elle permet à J de gagner à coup sûr en partant de S.

Définition : Position gagnante

On dit d'un sommet S que c'est une **position gagnante** s'il existe une stratégie gagnante partant de S.

Les positions de V_1 sont bien évidemment gagnantes pour J_1. Nous allons voir comment calculer les autres positions gagnantes.

Exercice de cours A Déterminer les positions gagnantes pour J_1.

I.4 Calcul des positions gagnantes

I.4.a) Attracteurs

Dans un jeu d'accessibilité, **résoudre le jeu consiste essentiellement à calculer les positions gagnantes de chacun des joueurs**, et une **stratégie pour chacun** (définie sur chaque position gagnante que le joueur contrôle). On se concentre d'abord sur les positions gagnantes du premier joueur, qui doit, pour gagner, atteindre un ensemble V_1. L'outil adéquat est l'attracteur.

Ensemble définissant l'attracteur. On se donne un graphe biparti (arène) $G = (S, A)$, supposé acyclique et deux ensembles S_1 et S_2 formant une partition de S, et V_1 l'ensemble de sommets définissant la condition de victoire du premier joueur. Soit x une position du graphe.

— Si $x \in S_1$ et n'a pas de successeur, alors x est une position gagnante pour le joueur J_1.
— Si $x \in S_1$, et s'il existe au moins une arête $(x, y) \in A$ telle que y est une position gagnante pour J_1, alors x est aussi une position gagnante pour J_1. Une stratégie gagnante de J_1 est de jouer sur y.
— Si $x \in S_2$, et si pour toutes les arêtes $(x, y) \in A$ partant de x, y est une position gagnante pour J_1, alors x est aussi une position gagnante pour J_1, quelque soit la stratégie de J_2 en x, J_1 possède une stratégie gagnante pour les coups suivants.

On peut donc calculer les positions gagnantes par récurrence, à partir des positions de victoire V_1 pour J_1, et de V_2 pour J_2.

Définition : Suite des ensembles attracteurs

On note $\mathscr{A}_m^i$ l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur i en au plus m coups.
On définit pour le joueur 1 :

$$\begin{cases} m=0 & \mathscr{A}_0^1 = \left\{\text{positions gagnantes pour J1 en zéro coup}\right\} \\ \forall m\in\mathbb{N} & \mathscr{A}_{m+1}^1 = \begin{array}{l} \mathscr{A}_m^1 \cup \left\{\text{sommets de J1 permettant d'aller vers } \mathscr{A}_m^1\right\} \\ \cup \left\{\text{sommets de J2 allant nécessairement vers } \mathscr{A}_m^1\right\} \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=0 & \mathscr{A}_0^1 = V_1 \\ \forall j\in\mathbb{N} & \mathscr{A}_{m+1}^1 = \begin{array}{l} \mathscr{A}_m^1 \cup \left\{x\in S_1 \mid \exists (x,y)\in A, y\in S_2\cap \mathscr{A}_m^1\right\} \\ \cup \left\{x\in S_2 \mid \forall (x,y)\in A \Rightarrow y\in \mathscr{A}_m^1\right\} \end{array} \end{cases}$$

En français, l'ensemble $\mathscr{A}_{m+1}^1$ des positions gagnantes en au plus $m+1$ coups est constitué de :

— l'ensemble $\mathscr{A}_m^1$: des positions gagnantes en au plus m coups ;

— des sommets contrôlés par J_1 pour lesquels **il existe au moins** un arc permettant de rejoindre une position gagnante de $\mathscr{A}_m^1$ contrôlée par J_2 ;

— des sommets contrôlés par J_2 dont **tous** les arcs aboutissent à une position gagnante de J_1 des sommets de $\mathscr{A}_m^1$ (sommets contrôlés par J_2 qui font obligatoirement aboutir à une position gagnante de S_1).

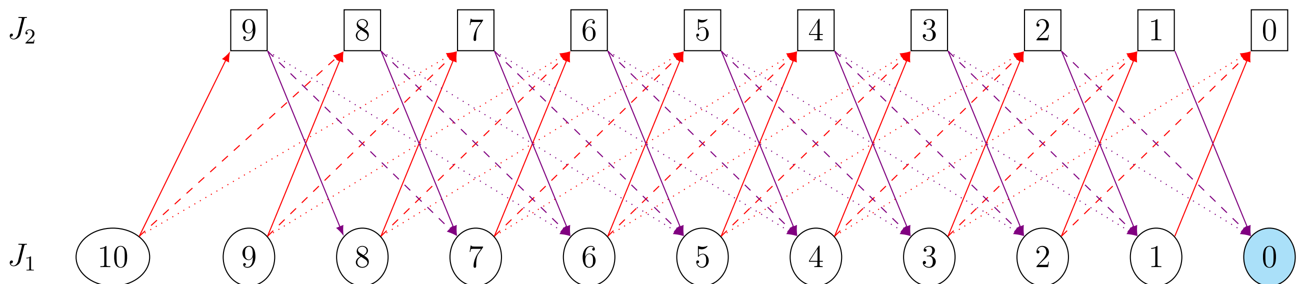
On arrive alors petit à petit à identifier toutes les positions gagnantes de J_1 jusqu'au sommet initial.

Exercice de cours B

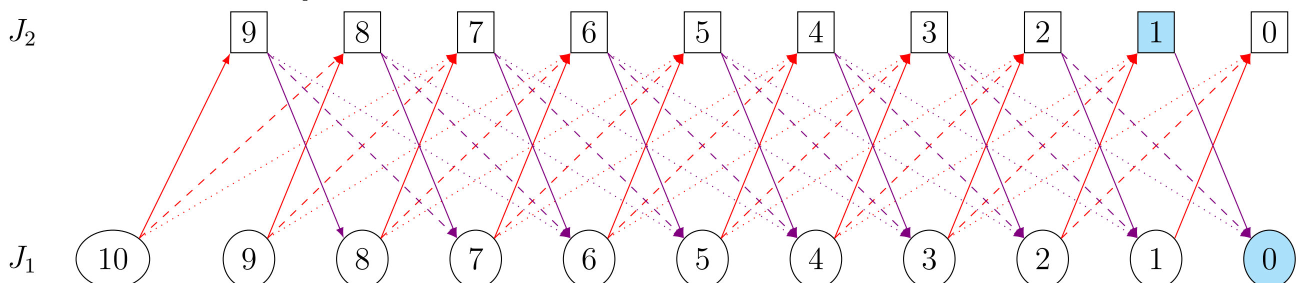
R1. Représenter les différentes étapes de l'évolution de l'attracteur du joueur J_1 pour le graphe de la figure 2 (reproduit ci-dessous figure 4).

Solution:

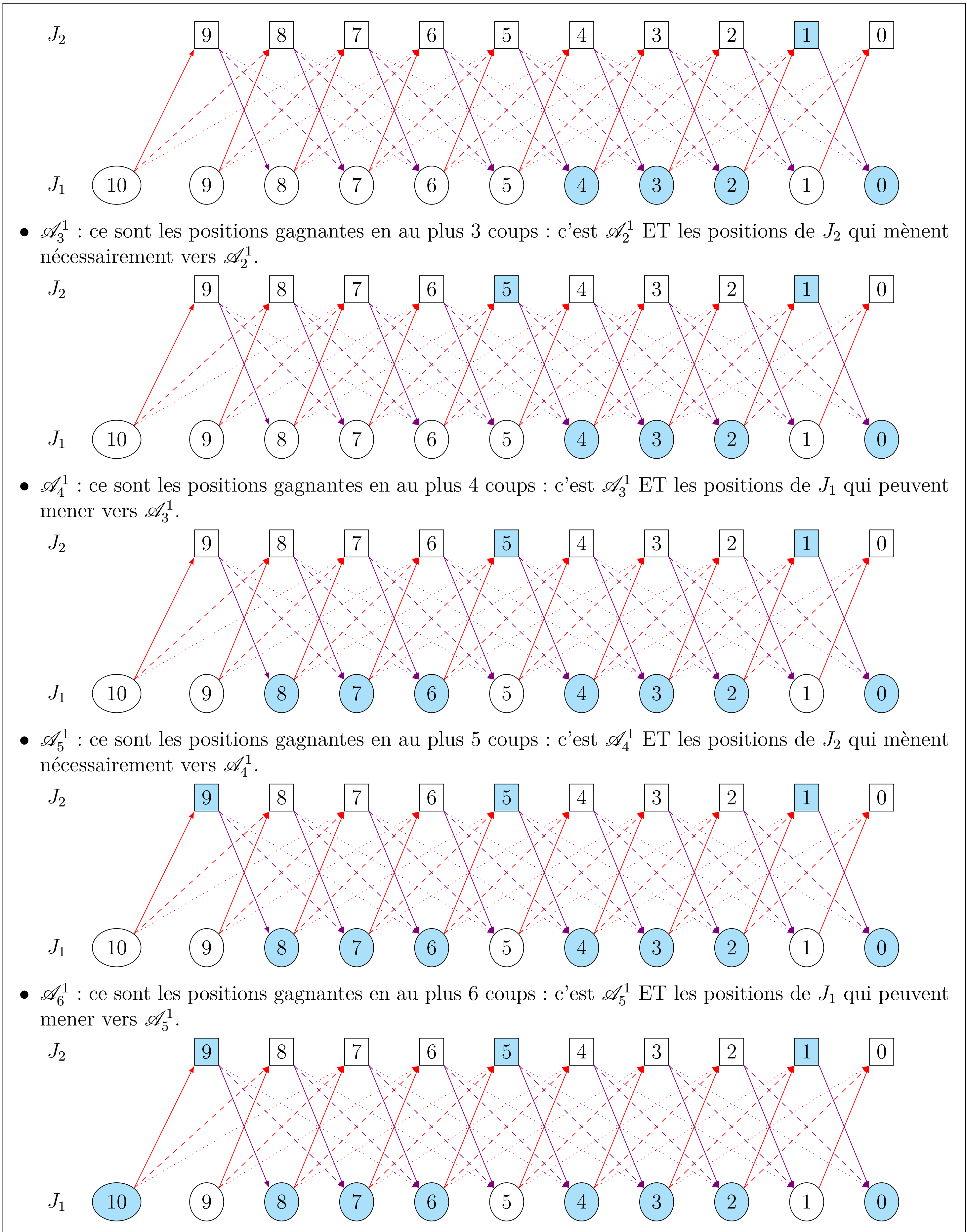
- $\mathscr{A}_0^1 = V_1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 0 coup.



- $\mathscr{A}_1^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 1 coup : c'est $\mathscr{A}_0^1$ ET les positions de J_2 qui mènent nécessairement vers $\mathscr{A}_0^1$.



- $\mathscr{A}_2^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 2 coups : c'est $\mathscr{A}_1^1$ ET les positions de J_1 qui peuvent mener vers $\mathscr{A}_1^1$.



- $\mathscr{A}_3^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 3 coups : c'est $\mathscr{A}_2^1$ ET les positions de J_2 qui mènent nécessairement vers $\mathscr{A}_2^1$.
- $\mathscr{A}_4^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 4 coups : c'est $\mathscr{A}_3^1$ ET les positions de J_1 qui peuvent mener vers $\mathscr{A}_3^1$.
- $\mathscr{A}_5^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 5 coups : c'est $\mathscr{A}_4^1$ ET les positions de J_2 qui mènent nécessairement vers $\mathscr{A}_4^1$.
- $\mathscr{A}_6^1$: ce sont les positions gagnantes en au plus 6 coups : c'est $\mathscr{A}_5^1$ ET les positions de J_1 qui peuvent mener vers $\mathscr{A}_5^1$.

R2. Que peut-on dire de la position de départ pour J_1 ?

Solution: La position de départ est gagnante pour J_1.
Conclusion : avec 10 bâtonnets, il faut choisir de jouer en premier pour gagner contre le maître du jeu !

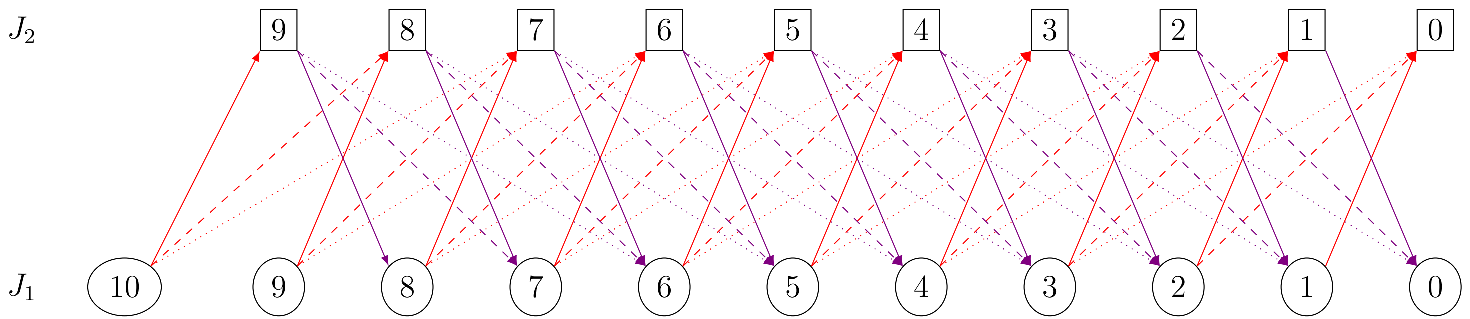


FIGURE 4 – Détermination de l'attracteur de J_1

Définition : Attracteur

L'**attracteur** du joueur i est l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur i, soit :

$$\mathscr{A}^i = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \mathscr{A}_j^i$$

L'attracteur $\mathscr{A}^i$ du joueur J_i contient exactement toutes les positions gagnantes de J_i. Les autres positions sont celles conduisant a priori à un match nul, si les deux joueurs jouent de manière optimale. Le calcul d'un attracteur permet de déterminer les positions gagnantes pour un joueur puis de construire une stratégie gagnante.

I.4.b) Algorithme de calcul de l'attracteur

i- Algorithme

Méthode : Calcul de l'attracteur de J_1

(1) On calcule les antécédents de chaque position (ce qui revient à déterminer le graphe obtenu à partir du graphe du jeu, et dont les flèches sont « renversées »).

(2) On calcule les degrés sortants de chaque position, que l'on affecte à une structure de données. Cette structure comptera le nombre de successeurs de chaque sommet qui ne sont pas des sommets gagnants pour J_1. Lorsque ce compteur atteindra 0 pour un sommet, on saura alors que ce sommet sera gagnant pour J_1.

(3) On crée un attracteur vide (cela peut-être un dictionnaire).

(4) On commence le calcul sur les positions de victoire de J_1, que l'on sait être des sommets gagnants. Pour chaque sommet que l'on sait être gagnant : si le sommet n'a pas déjà été rencontré, donc s'il n'est pas déjà dans l'attracteur que l'on est en train de construire :

   a) on ajoute ce sommet à l'attracteur

   b) pour chaque prédécesseur de ce sommet :

      i. on retranche 1 à son compteur de successeurs non gagnants ;

      ii. si ce prédecesseur est dans S_1, il est gagnant, on déclenche donc un appel récursif dessus ;

      iii. sinon, si ce prédecesseur n'a plus que des successeurs gagnants (ce qui se lit dans le compteur associé), il est gagnant, on déclenche donc un appel récursif dessus.

ii- Représentation du graphe

L'arène de jeu (c'est-à-dire le graphe) est représentée par un dictionnaire dont les clés sont les sommets et les valeurs la liste des successeurs de ce sommet.

```
# Création du graphe du jeu de Nim étudié précédemment
arene= {(0,1):[],(0,2):[], (1,1) :[(0,2)], (1,2) :[(0,1)],
```

```
        (2,2):[(1,1),(0,1)], (2,1):[(1,2),(0,2)] , ....,
        (10,1) :[(7,2),(8,2),(9,2)]}
# Sommets contrôlés par J1 et J2
Sommets1 = {(k,1) : True for k in range(11)}
Sommets2 = {(k,2) : True for k in range(10)}
# Positions gagnantes de J1 et J2
Victoire1 = {(0,1) : True} # J1  ne peut plus jouer, J2 a enlevé le dernier
Victoire2 = {(0,2) : True}
```

iii- En Python

On commence par écrire la fonction d'en-tête `transpose(G;dict)->dict` ( ) qui prend en entrée un graphe représentant l'arène de jeu, représenté sous la forme d'un dictionnaire des successeurs.

```
def transpose(G):
    """
    Argument : G : graphe, représenté par son dictionnaire d'adjacence
    Retour : Gt : transposé de G, les clés de Gt sont des sommets, la valeur correspondante est la liste des prédécesseurs
    """
    Gt={s:[] for s in G} # initialisation du graphe de la transposée avec toutes les clés de G
    for s in G: # pour chaque sommet de G
        for v in G : # parcours des successeurs v de s
            Gt[v].append(s)  # s est un prédécesseur de v : ajout de s à Gt[v]
    return Gt
```

Et la fonction d'en-tête `degres_sortants(G:dict)->dict` ( ) qui prend en entrée le graphe `G` de l'arène de jeu et renvoie un dictionnaire des degrés sortants des sommets de `G` (c'est-à-dire les degrés entrants des sommets de la transposée du graphe `G`).

```
def degres_sortants(G):
    """
    Argument :  G : graphe, représenté par son dictionnaire d'adjacence
    Retour : d, dictionnaire des degrés entrants des sommets du graphe transposé de G, donc des degrés sortants de G
    """
    deg_sort={} # dictionnaire des degrés sortants de G
    # calcul du degré sortant de chaque sommet de G
    for s in G:
        d_deg_sort[s]=len(G[s])
    return deg_sort
```

Puis on écrit la fonction d'en-tête `attracteur(G:dict,S1:dict,V1:dict)->dict` qui prend en entrée le graphe `G` du jeu (sous forme d'un dictionnaire), le dictionnaire `S1` des sommets contrôlés par J_1, le dictionnaire `V1` des positions de victoire de J_1 et renvoie `A` l'attracteur de J_1, sous la forme d'un dictionnaire dont les clés sont les positions gagnantes de J_1.

```
def attracteur(G,S1,V1):
    """
    Arguments :
    G : dictionnaire des successeurs (graphe de l'arène du jeu)
    S1 : dictionnaire des sommets contrôlés par J1
    V1 : dictionnaire des positions gagnantes de J1
    Renvoi:
    A : dictionnaire de l'attracteur
    """
    n=len(G)
    deg_succ=degres_sortants(G) # degrés sortant de G
    tG=transpose(G) # graphe transposé
    A={} # attracteur : dictionnaire des positions gagnantes
    def parcours(s): # sous-fonction récursive qui cherche les positions de victoire pour J1 en remontant le graphe (donc en parcourant la transposée) à partir du sommet s
        if s not in A: # mémoïse
            A[s]=True # on met le sommet dans l'attracteur
            for v in tG[s]: # pour les prédécesseurs de s dans G, donc successeur de s dans tG
                deg_succ[v]=deg_succ[v]-1 # s étant gagnant il y a un successeur de v non gagnant en moins
                if v in S1 or deg_succ[v]==0: # si le précédesseur est dans les positions contrôlées par  J1, ou s'il n'a pas de précédesseur
                    parcours(v) # on cherche les prédécesseurs qui amènent à une position de victoire
    for s in V1: # on part d'une position de victoire de J1
        parcours(s) # on cherche les prédécesseurs de s qui amènent à s
    return A
```

Pour le graphe étudié précédemment :

```
>>> attracteur(arene,Sommets1,Victoire1)
{(0, 1): True, (1, 2): True, (2, 1): True, (3, 1): True, (4, 1): True, (5, 2): True, (6, 1): True, (7, 1): True, (8, 1): True, (9, 2): True, (10, 1): True}
```

I.5 Stratégie gagnante

Pour déterminer le coup à jouer sur une position gagnante, il ne suffit pas de jouer sur une autre position gagnante, il faut jouer sur une position gagnante plus proche d'une condition de victoire (V_1 pour le joueur J_1).

Pour cela, lors du calcul de l'attracteur, on numérote les sommets gagnants, en partant de la valeur 0 sur la condition de victoire, et on l'incrémente de 1 à chaque appel récursif. Si un sommet gagnant est ainsi étiqueté avec la valeur $m \in \mathbb{N}$, cela signifie que son rang est inférieur ou égal à m, et que le joueur pourra gagner la partie en moins de m coups.

La nouvelle fonction d'en-tête `attracteur_strat(G:dict,S1:dict,V1:dict)->dict` renvoie un dictionnaire `A` des attracteurs de telle sorte que si `s` est une position gagnante, alors `A[s]` est un entier `m` qui indique que le joueur pourra gagner la partie en moins de m coups. Par exemple :

```
>>> attracteur_strat(arene,Sommets1,Victoire1)
{(0, 1): 0, (1, 2): 1, (2, 1): 2, (3, 1): 2, (4, 1): 2, (5, 2): 3, (6, 1):
    4, (7, 1): 4, (8, 1): 4, (9, 2): 5, (10, 1): 6}
```

```
def attracteur_strat(G,S1,V1):
    n=len(G)
    deg_succ=degres_sortants(G) # degrés sortant de G
    tG=transpose(G) # graphe transposé
    A={}
    def parcours(s,m): # cherche les positions de victoire pour J1 en
    remontant le graphe à partir de s
        if s not in A: # mémoïse
            A[s]=m # on met le sommet dans l'attracteur
            for v in tG[s]: # pour les prédécesseurs de s dans G
                deg_succ[v]=deg_succ[v]-1 # s étant gagnant il y a un
    successeur de v non gagnant en moins
                if v in S1 or deg_succ[v]==0: # si le précédesseur est dans
    les positions contrôlées par J1, ou s'il n'a pas de précédesseur non
    gagnant
                    parcours(v,m+1) # on cherche les prédécesseurs qui
    amènent à une position de victoire en un coup supplémentaire
    for s in V1: # on part d'une position de victoire de J1
        parcours(s,0) # on cherche les prédécesseurs de s qui amènent à s
    return A
```

```
def strategie(G,attr1,attr2,s):
    """
    créée la stratégie pour le joueur J1
    attr1 : attracteur de J1 ; attr2 : attracteur de J2
    s : une position contrôlée par J1
    """
    if s in attr1: # fait partie de l'attracteur de J1
        for x in G[s]: # on parcourt les sommets accessibles depuis s
            if x in attr1 and attr1[x]<attr1[s]: # sommet de l'attracteur de
     J1 qui permet d'atteindre la victoire en moins de coups
                return x
    elif s in attr2: # fait partie de l'attracteur de J2
        i=randint(0,len(G[s])-1) # choix d'un sommet quelconque de l'arène
    accessible depuis s
        return G[s][i]
    else: # renvoie un successeur de s qui n'est pas dans l'attracteur de J2
        for x in G[s]:
            if x not in attr2:
                return x
```

```
A1=attracteur_strat(arene,S1,V1)
A2=attracteur_strat(arene,S2,V2)
>>> strategie(arene,A1,A2,(10,1))
(9, 2)
```

II Heuristique. Algorithme Min-Max

La méthode des attracteurs peut devenir très lente puisqu'il faut itérer à chaque fois sur tout le graphe restant pour tester les sommets n'étant pas encore dans un attracteur. Elle devient totalement inadaptée pour des jeux plus complexes. Les échecs par exemple peuvent être représentés par un graphe d'environ 10^{50} nœuds. Ce nombre monte à 10^{100} pour le jeu de go !

Les intelligences artificielles comme Stockfish (aux échecs) ou AlphaGo (jeu de go) fonctionnent par anticipation des prochains coups envisageables. Même si elles peuvent imaginer les issues vraisemblables de nombreux tours en avance, il leur est toujours impossible d'être exhaustif quant aux situations possibles.

II.1 Heuristique

II.1.a) Définition

Définition : Heuristique

Pour un · e joueur · euse J, il peut être utile d'évaluer l'avantage que lui donne une certaine position p par un nombre. On va donc avoir besoin d'une fonction :

$$h : \begin{array}{rcl} \{ \text{ positions sur le graphe } \} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longrightarrow & h(p) \end{array}$$

de sorte que plus $h(p)$ est grand, plus la position p est avantageuse pour J. Une telle fonction est dite **heuristique**, ou d'évaluation.

REMARQUES

- Une position gagnante pour J devrait renvoyer $+\infty$, puisque ce nœud est infiniment intéressant (permet de gagner à coup sûr).
- Dans un jeu à deux joueur · euses, une position gagnante pour l'adversaire doit renvoyer $-\infty$.

La recherche d'une bonne heuristique est une tâche difficile. Pour certains jeux une heuristique est obtenue par un apprentissage supervisé d'une intelligence artificielle.

La notion d'heuristique a été vue en première année pour l'algorithme A* (comme amélioration de l'algorithme de Dijkstra).

II.1.b) Exemple : puissance 4

Le but du jeu du puissance 4 est d'aligner une suite de quatre pions de même couleur sur une grille comptant six rangées et sept colonnes. Tour à tour, les deux joueurs placent un pion dans la colonne de leur choix, le pion coulisse alors jusqu'à la position la plus basse possible dans la dite colonne à la suite de quoi c'est à l'adversaire de jouer. Le vainqueur est le joueur qui réalise le premier un alignement (horizontal, vertical ou diagonal) consécutif d'au moins quatre pions de sa couleur. Si, alors que toutes les cases de la grille de jeu sont remplies, aucun des deux joueurs n'a réalisé un tel alignement, la partie est déclarée nulle.

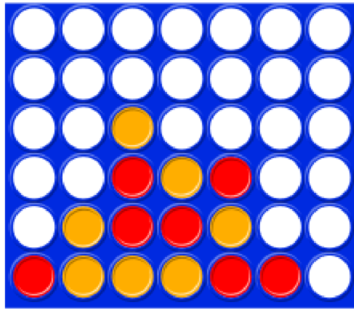


FIGURE 5 – Une position de puissance 4

3	4	5	7	5	4	3
4	6	8	10	8	6	4
5	8	11	13	11	8	5
5	8	11	13	11	8	5
4	6	8	10	8	6	4
3	4	5	7	5	4	3

FIGURE 6 – Les valeurs de chaque case pour l'heuristique utilisée

Une heuristique simple consiste à attribuer à chaque case une valeur, par exemple le nombre d'alignements potentiels de quatre pions lorsqu'on place un pion à cet emplacement, puis à sommer les cases occupées (positivement pour les pions de J_1, négativement pour ceux de J_2).

Par exemple, si on convient que les pions jaunes sont ceux de J_1, la valeur de l'heuristique de la position présentée figure 5 est égale à $4+5+7+6+8+13+11-3-5-4-8-10-11-11=2$.

L'heuristique sera égale à $+\infty$ pour une position gagnante pour J_1, et à $-\infty$ pour une position gagnante pour J_2.

Au moment où l'un des deux protagonistes doit jouer, plusieurs possibilités s'offrent à lui (entre une et sept pour le puissance 4). Une solution simple pour choisir le coup à jouer consiste à calculer l'heuristique correspondant à chacune des configurations atteignables et à jouer celle d'heuristique maximale (pour J_1) ou minimale (pour J_2).

II.2 Algorithme Min-Max avec heuristique

II.2.a) Principe

Méthode : Algorithme min-max

Lorsque J_1 doit jouer, il construit un arbre d'évolution du jeu, à partir du nœud auquel il se trouve. Il itère cela jusqu'à une profondeur k (nombre de coups d'avance).

Ensuite J_1 procède en partant de la dernière ligne de l'arbre et en remontant petit à petit, tout en évaluant chacun des nœuds de la manière suivante :

- une position contrôlée par J_2 prend comme valeur le minimum des scores lui succédant ;
- une position contrôlée par J_1 prend comme valeur le maximum des scores lui succédant ;
- s'il n'y a pas de nœud succédant, garde la valeur donnée par l'heuristique.

Une fois en haut de l'arbre, J_1 joue le coup ayant le plus grand score.

II.2.b) Exemples simples de mise en œuvre

Premier exemple Nous reprenons le jeu de Nim précédent avec un tas initial contenant cinq objets.

On construit l'arbre d'évolution de la partie pour une profondeur $k=4$ et on remplit les lignes une à une.

$$\forall p, h(p) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p = \boxed{1}_{J_2} \\ -\infty & \text{si } p = \textcircled{1}_{J_1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

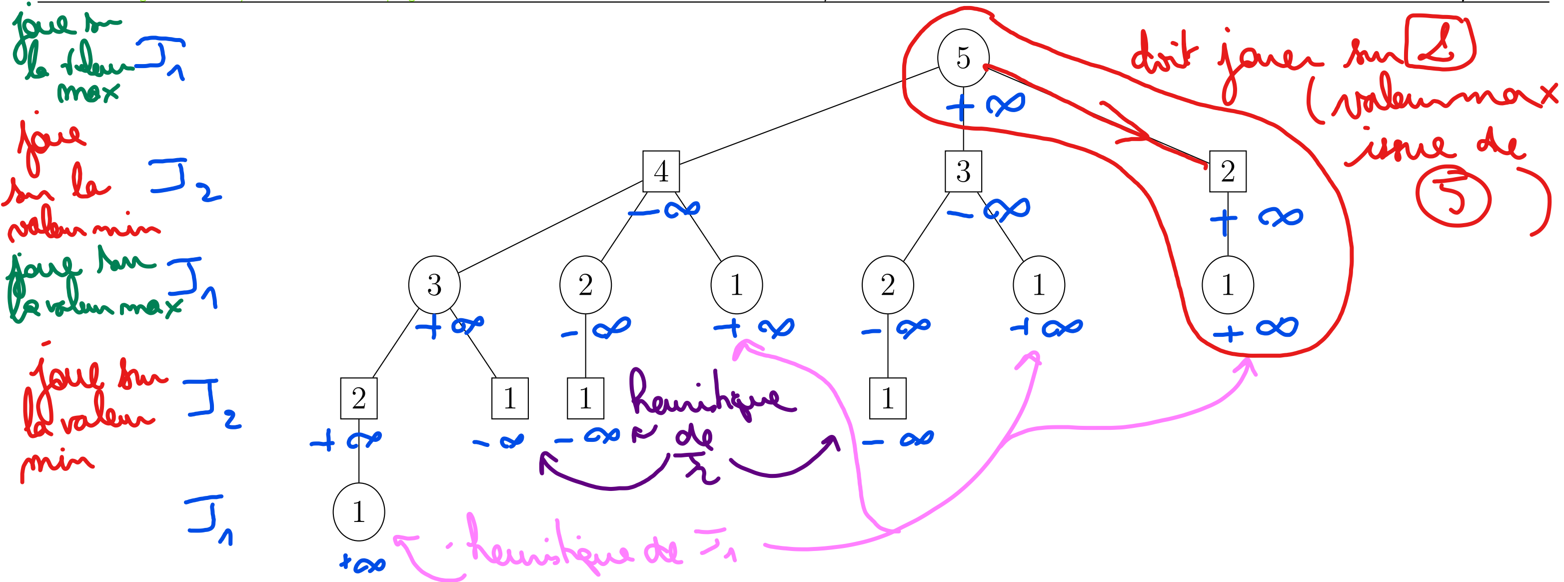


FIGURE 7 – Arbre de jeu.
Les ronds sont les positions contrôlées par J_1 et les carrés sont celles contrôlées par J_2.

Définition : Arbre

La **profondeur** d'un nœud est sa distance à la **racine** (la racine est donc l'unique nœud à profondeur zéro).
Pour la représentation graphique, tous les nœuds à une même profondeur sont représentés sur une même ligne horizontale.
Un nœud sans successeur est appelé une **feuille**, sinon c'est un **nœud interne**.

REMARQUES

— L'exemple ci-dessus est extrêmement simplifié.
L'utilisation de la méthode minimax par rapport à celle des attracteurs n'est techniquement pas justifiée. Cet algorithme manque d'intérêt dans ce jeu, où chaque nœud est soit gagnant, soit perdant.

— On voit bien que l'utilisation des fonctions Min et Max permet de simuler une partie où chaque joueur · euse joue toujours son coup optimal.

— On remarque une certaine redondance dans les racines de l'arbre. L'utilisation de la programmation dynamique est tout à fait bienvenue ici !

Traitons un autre exemple

- Dans l'exemple de la figure 8, J_1 choisira le coup le plus à gauche, correspondant à une évaluation égale à 10.

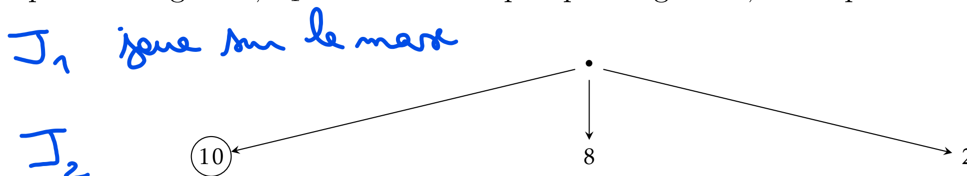


FIGURE 8 – J_1 doit jouer, 3 coups sont possibles, il joue sur l'heuristique maximale.

- Mais J_1 peut aussi tenir compte du coup que va jouer J_2 ensuite, et donc calculer l'heuristique de chacune des positions que J_2 pourra atteindre. Si on observe la figure 9, on constate qu'il vaut mieux pour J_1 de jouer le coup central, en partant du principe que J_2 joue au mieux son coup.

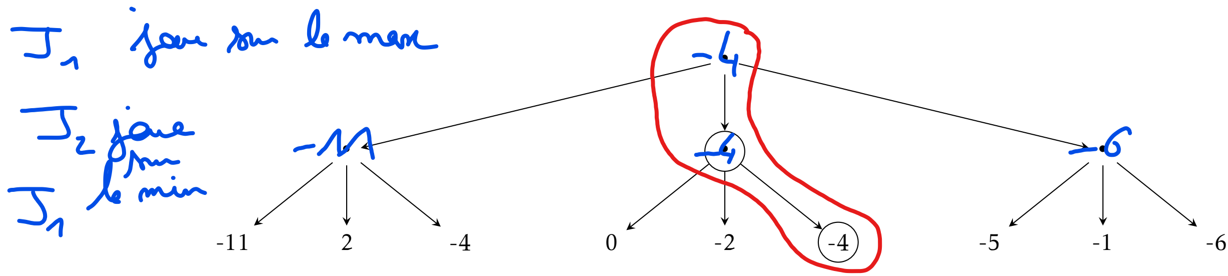


FIGURE 9 – C'est à J_1 de jouer, en tenant compte du coup suivant de J_2.

- Bien évidemment, on peut réitérer ce raisonnement et tenir compte du coup suivant, joué cette fois par J_1. La figure 11 montre qu'en tenant compte des deux coups suivant, J_1 a en fait intérêt à jouer le coup le plus à droite.

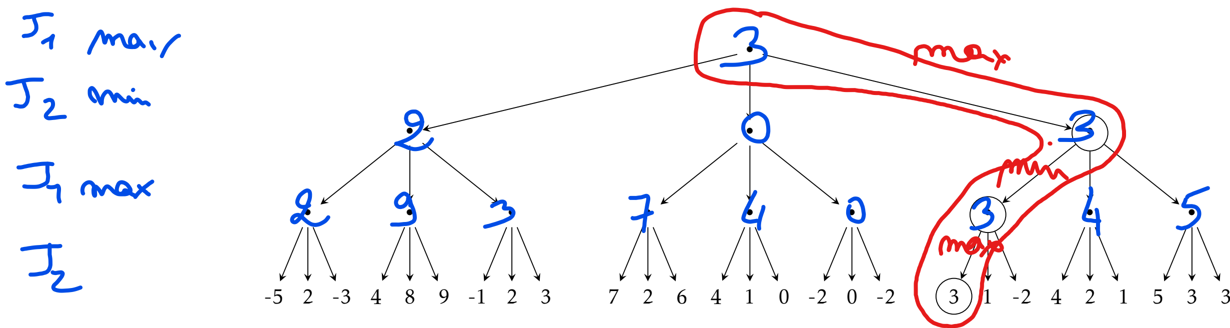


FIGURE 10 – Le meilleur coup de J_1, en tenant compte des deux coups suivants.

- On peut répéter ce raisonnement, mais le nombre de configurations à examiner ayant tendance à croitre exponentiellement, il est nécessaire de limiter la profondeur de la recherche

Pour calculer le meilleur coup de J_1, il faut donc :

— Commencer par calculer la valeur de l'heuristique de toutes les positions atteignables en n coups : les feuilles de l'arbre.

— Si n est pair, J_2 aura joué le dernier coup : le père de chacune de ces feuilles se verra donc attribuer le minimum des valeurs de ses fils.

— À l'inverse, si n est impair le père de chacune de ces feuilles se verra attribuer la valeur maximale de ses fils (car J_1 aura joué en dernier). Ainsi, de proche en proche chaque position de l'arbre se verra attribuer une valeur.

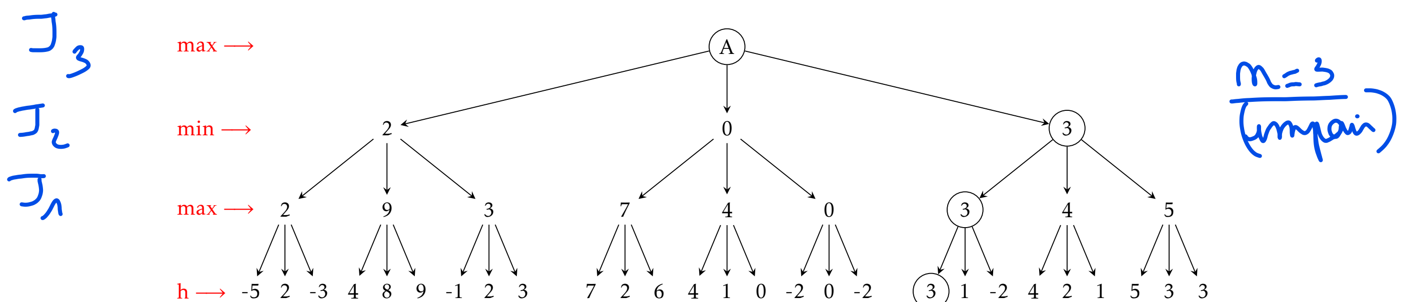
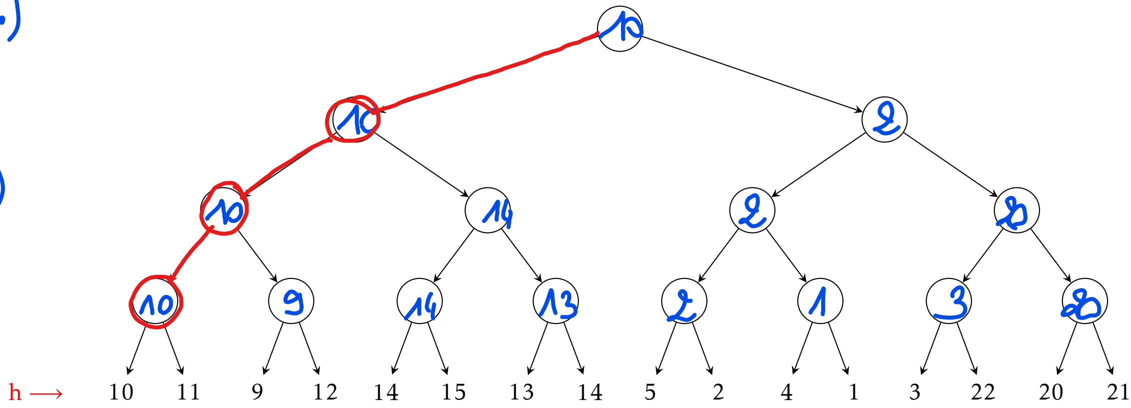


FIGURE 11 – Le résultat de l'algorithme min-max à une profondeur 3 où J_1 doit jouer

Exercice de cours C

Calculer la valeur de la position associée à l'arbre ci-dessous, dans le cas où c'est le joueur qui cherche à maximiser l'heuristique qui doit jouer.



II.2.c) Écriture de l'algorithme

On écrit la fonction `minimax(G:dict,p:tuple,h:funct,prof:int)` qui à partir du graphe de `G`, d'une position `p` du graphe (valeur de la position,numéro du joueur qui contrôle la position), de la fonction `h` de l'heuristique, et d'une profondeur `prof` renvoie le maximum de l'heuristique en considérant `prof` coups.

```python
def minimax(G,p,h,prof):
    """
    Arguments :
    G : dictionnaire du graphe (comme précédemment)
    p : position de départ (un noeud de l'arbre)
    h : fonction heuristique : h(p) donne la valeur associée à la position p
    selon la fonction h
    prof : profondeur
    """
    if prof==0 or G[p]==[]: #
        return h(p)
    elif p[1]==1: # J1 contrôle le noeud
    # on cherche le maximum des sous-arbres
        return max([minimax(G,n,h,prof-1) for n in G[p]])
    else : # J2 contrôle le no eud
    # on cherche le minimum des sous-arbres
        return min([minimax(G,n,h,prof-1) for n in G[p]])
```

Remarque. Pour établir la stratégie d'un joueur il suffit de retenir le mouvement qui a permis de minimiser ou maximiser la valeur à la première étape.

> **Remarques 2.** *Une technique courante pour construire cette heuristique (évaluation d'une position) est une méthode de Monte-Carlo : pour chaque position, on effectue un grand nombre de parties en faisant jouer les deux protagonistes au hasard (en supposant les parties tout de même assez courtes) et on attribue une valeur qui est la moyenne des gains des parties ainsi engendrées (en n'utilisant plus $\pm\infty$). Le programme AlphaGo qui a battu un grand maître de Go en 2016 a dans ses premières versions utilisé cette méthode.*