

# Interférences à N ondes cohérentes entre elles

## Sommaire

<b>I Superposition de N ondes cohérentes entre elles</b>	<b>2</b>
I.1 Utilisation de la notation complexe . . . . .	2
I.2 Raisonnement qualitatif : influence de N sur l'intensité lumineuse . . . . .	3
I.3 Raisonnement quantitatif : expression de l'intensité lumineuse . . . . .	5
<b>II Application concrète de l'interférences à N ondes : le réseau de diffraction</b>	<b>7</b>
II.1 Pourquoi observe-t-on des interférences avec un réseau ? . . . . .	7
II.2 Formule des réseaux . . . . .	8
II.3 Montage expérimental . . . . .	9
II.4 Application : mesure des longueurs d'onde du spectre d'émission d'une source . . . . .	10
II.5 Minimum de déviation . . . . .	11
<b>Exercices</b>	<b>13</b>

## Questions de cours

- Superposition de  $N$  ondes cohérentes entre elles, de même amplitude et dont la différence de phase  $\varphi$  entre deux sources consécutives est constante : établir l'expression de l'intensité lumineuse en fonction de  $I_0$ ,  $N$  et  $\varphi$ . Donner la condition d'interférences constructives et interpréter l'effet de  $N$  sur la figure d'interférences.
- Partant de la formule des interférences à  $N$  ondes  $I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ , établir la demi-largeur des franges brillantes.
- Réseau en transmission : présentation, formule des réseaux (bien définir les grandeurs intervenant dedans !), application.

*Prise de notes* : Contexte concret : On a la lumière émise par une lampe spectrale (spectre de raies) : comment mesurer les différentes longueurs d'onde dans le spectre ?

- ★ • **Interféromètre des trous d'Young ou de Michelson** ? Non. Les ondes émises aux différentes longueurs d'onde ne sont pas synchrones entre elles : les différents systèmes de franges ou d'anneaux se somment et brouillage. On peut se servir du brouillage pour déterminer  $\Delta\lambda$  mais pas  $\lambda$ . (Dans certains cas, on peut déterminer le  $\lambda_0$  moyen, mais il faut alors que le brouillage intervienne loin de la frange centrale. C'est le cas avec le doublet du sodium.)

- **Utiliser un système dispersif** 2 systèmes différents :

- Prisme : Rappel sur ce qu'est la dispersion :  $v_\varphi(\omega) \Rightarrow n(\lambda)$ . Loi empirique de Cauchy :  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$  ( $A$  et  $B$  positifs) ( $n$  plus petit dans le rouge). En déduire les trajets des RL dans un prisme. Super pour visualiser à l'œil, mais pas pratique pour la mesure, car relation angle de sortie et  $\lambda$  compliquée...
- Réseau : Bien plus pratique pour faire des mesures précises. Principe global et en déduire le fait que  $N$  ondes cohérentes interfèrent entre elles.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Etablir l'expression de l'intensité lumineuse résultant de la superposition de  $N$  ondes cohérentes entre elles grâce à la notation complexe.
2. Utiliser la représentation de Fresnel pour interpréter efficacement l'effet de la superposition d'ondes cohérentes.
3. Etablir la formule des réseaux.

## I Superposition de N ondes cohérentes entre elles

Nous allons étudier la superposition de  $N$  ondes émises par  $N$  sources (sources secondaires) monochromatiques de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ , cohérentes entre elles. On suppose qu'au point  $M$  où elles interfèrent :

- les  $N$  ondes ont toutes la même amplitude  $s_0$ .
- la différence entre les retards de phase des ondes émises par 2 sources consécutives  $S_n$  et  $S_{n+1}$  est une constante :  $\varphi_{n+1}(M) - \varphi_n(M) = \text{cste} = \varphi$ .

On cherche à tracer et interpréter l'intensité lumineuse en fonction de  $\varphi$ . Ce graphe va dépendre de la valeur de  $N$ .

### I.1 Utilisation de la notation complexe

Posons  $s_n(M,t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi_n(M))$  la vibration lumineuse en  $M$ , émise par la source  $S_n$ . En notation complexe :  $\underline{s}_n(M,t) = s_0 e^{j(\omega t - \varphi_n(M))}$ .

Etant donné que les ondes sont cohérentes entre elles, il y a additivité des amplitudes complexes :  $\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^N \underline{s}_n(M,t)$ . L'intensité lumineuse totale est alors :

$$I = K |\underline{s}(M,t)|^2$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer  $|\underline{s}(M,t)|^2$ .

La vibration lumineuse émise par la source  $S_{n+1}$  est reliée à celle émise par  $S_n$  :

$$\star \quad \underline{s}_{n+1}(M,t) = s_0 e^{j(\omega t - \varphi_{n+1}(M))} \quad \text{avec} \quad \varphi_{n+1}(M) = \varphi_n(M) + \varphi$$

Donc :

$$\underline{s}_{n+1}(M,t) = \underline{s}_n(M,t) e^{-j\varphi}$$

Cette relation est vraie pour tout  $n$ . On reconnaît une suite géométrique de raison  $e^{-j\varphi}$ . On choisit alors d'exprimer toutes les vibrations lumineuses en fonction de  $\underline{s}_1(M,t)$  qui sera la vibration de référence :

$$\underline{s}_n(M,t) = \underline{s}_1(M,t) e^{-j(n-1)\varphi}$$



## I.2 Raisonnement qualitatif : influence de N sur l'intensité lumineuse

Pour raisonner qualitativement, utilisons la représentation graphique de Fresnel.

**Représentation de Fresnel** (rappel) :

La représentation de Fresnel consiste à représenter les amplitudes complexes dans le plan complexe (sous forme de vecteurs).

Quitte à redéfinir l'origine des temps, on peut toujours choisir l'un des retards de phase pour l'un des signaux comme étant nul. On choisit ici d'imposer une phase nulle pour  $\underline{s}_1(M,t)$ . On dit qu'on choisit  $\underline{s}_1$  comme origine des phases. Ainsi, on a  $\underline{s}_1(M,t) = s_0 e^{j\omega t} = \underline{S}_1 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{S}_1 = s_0$  l'amplitude complexe de  $\underline{s}_1$ .

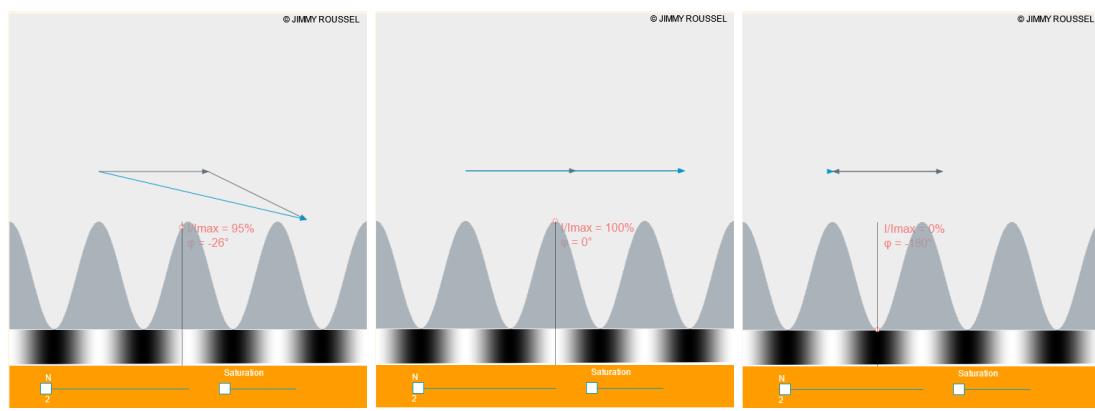
Réalisons par exemple la représentation de Fresnel dans le cas  $N = 4$ .

★ Représentation de Fresnel dans le cas  $N = 4$ .

Dans la suite, on se base sur la simulation <https://femto-physique.fr/simulations/reseaux-construction-de-fresnel.php> pour expliquer l'influence de la valeur de  $N$ .

Cas  $N = 2$  :

Ce cas correspond au chapitre OO2, dans le cas particulier où  $I_1 = I_2 = I_0$ .



(a)  $\varphi$  quelconque

(b)  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

(c)  $\varphi = \pi + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

★ Légender  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$  et  $\vec{S}$  sur le cas  $\varphi$  qq. Indiquer : intensité max : interf constructives / intensité min : interf destructives

## Cas $N$ quelconque :

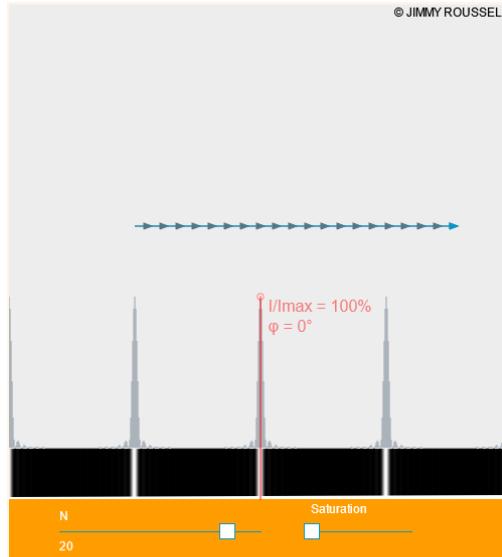


Figure 2:  $N = 20$  et  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

- ★ On aura une intensité maximale si tous les vecteurs  $\vec{S}_n$  sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire si  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

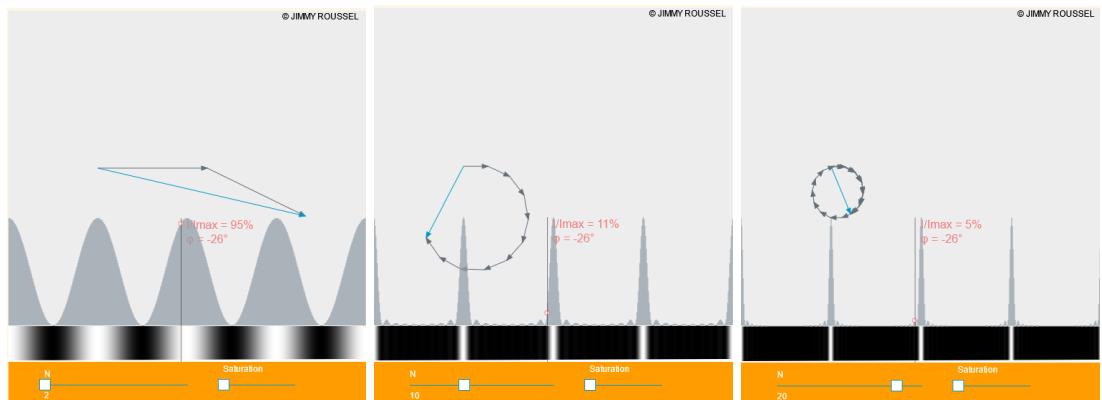
### Condition d'interférences constructives

Dans le cas d'interférences à  $N$  ondes, l'intensité lumineuse sera maximale si toutes les vibrations lumineuses sont en phase les unes avec les autres :  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'agit de la condition d'interférences constructives.

Cette condition est inchangée par rapport au cas  $N = 2$ .

- ★ On a alors  $\vec{S} = N\vec{S}_1 \Rightarrow I_{\max} = K \left\| \vec{S} \right\|^2 = K \left\| \vec{S}_1 \right\|^2 N^2 = N^2 I_0$ . Plus  $N$  est grand, plus l'intensité lumineuse maximale est grande.

On retiendra que l'intensité lumineuse maximale augmente en  $N^2$  : elle augmente donc très vite quand  $N$  augmente.



(a)  $N = 2$  et  $\varphi$  quelconque      (b)  $N = 10$  et  $\varphi$  quelconque      (c)  $N = 20$  et  $\varphi$  quelconque

Figure 3: La simulation est faite pour que la longueur de  $\vec{S}$  correspondant à  $I_{\max}$  soit toujours la même, quelque que soit  $N$  (redimensionnement de la longueur de  $\vec{S}$ ).

- ★ Partons de  $\varphi = 2k\pi$  et augmentons  $\varphi$ . L'intensité lumineuse diminue, d'autant plus rapidement que  $N$  est grand. On retiendra que les franges brillantes deviennent plus fines lorsque  $N$  augmente.

### I.3 Raisonnement quantitatif : expression de l'intensité lumineuse

Dans la sous-partie I.1, nous avons établi que, pour tout  $n$  compris entre 1 et  $N$  :

$$\underline{s}_n(M,t) = \underline{s}_1(M,t) e^{-j(n-1)\varphi}$$

Par additivité des amplitudes complexes (ondes cohérentes entre elles) :

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^N \underline{s}_n(M,t) = \underline{s}_1(M,t) \sum_{n=1}^N e^{-j(n-1)\varphi}$$

On reconnaît la somme des  $N$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $e^{-j\varphi}$ .  
Donc :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1(M,t) \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \quad \text{et} \quad I(M) = \underbrace{K |\underline{s}_1(M,t)|^2}_{=I_0} \left| \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \right|^2$$

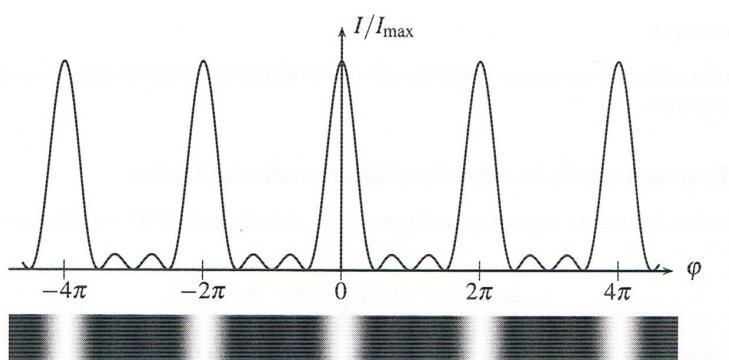
★ Maths (passer par la semi-somme) :

$$\left| \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

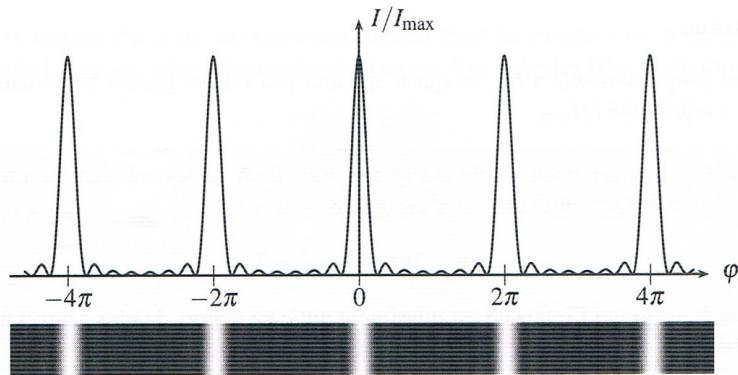
Ainsi :

$$I(M) = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

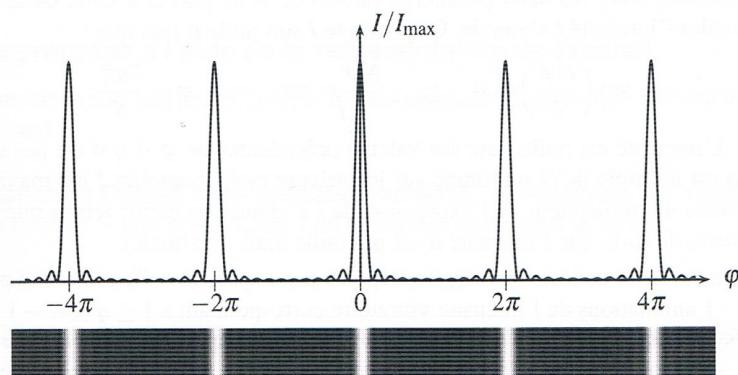
Sur les figures ci-dessous, on a représenté  $\frac{I}{I_{\max}}$  en fonction de  $\varphi$  pour différentes valeurs de  $N$ .  
 $I_{\max}$  est l'intensité lumineuse maximale.



Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 4$ .



Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 8$ .



Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 12$ .

On retrouve les conclusions faites avec le raisonnement qualitatif, que l'on va pouvoir compléter :

- On observe une série de pics au centre desquels l'intensité est maximale : on parle de maxima principaux. Ces maxima principaux sont atteints pour  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire lorsque les ondes sont toutes en phase. On retrouve la condition d'interférences constructives.
- Plus  $N$  est grand, plus la finesse des maxima principaux est grande.
- On observe en plus la présence de maxima secondaires entre deux maxima principaux. L'intensité de ces maxima secondaires est bien plus faible que celle des maxima principaux. Le nombre de maxima secondaires augmente quand  $N$  augmente.

Enfin, déterminons explicitement la largeur des maxima principaux en s'appuyant sur la formule déterminée.

#### Largeur des maxima principaux :

On cherche les valeurs de  $\varphi$  telles que  $I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = 0$ .

Ceci sera vérifié si  $\sin(N\varphi/2) = 0$  et que  $\sin(\varphi/2) \neq 0$ . Donc :

$$\frac{N\varphi}{2} = q\pi \iff \varphi = \frac{2q\pi}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{2} \neq k\pi \iff \varphi \neq 2k\pi$$



avec  $(q,k) \in \mathbb{Z}^2$ .

Représentation d'un maximum principal et représentation de la demi-largeur des maxima principaux  $\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2\pi}{N}$

On retrouve que plus  $N$  est grand, plus les maxima principaux sont fins.

### Demi-largeur des maxima principaux

Les maxima principaux ont une demi-largeur de

$$\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2\pi}{N}$$

Plus  $N$  est grand, plus ces maxima principaux sont fins.

**Remarque :** On peut interpréter la condition  $I = 0$  pour  $\varphi = \frac{2q\pi}{N} \neq 2k\pi$  dans la représentation de Fresnel. En effet, pour ces valeurs de  $\varphi$ ,  $N\varphi$  est un multiple de  $2\pi$  : les vecteurs mis bout à bout forment un cercle et induisent que l'intensité lumineuse résultante est effectivement nulle.

## II Application concrète de l'interférences à N ondes : le réseau de diffraction

### II.1 Pourquoi observe-t-on des interférences avec un réseau ?

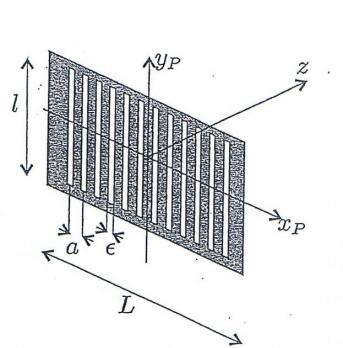
Un réseau est une surface diffractante sur laquelle un motif est répété un grand nombre  $N$  de fois. La période spatiale de répétition du motif s'appelle le **pas  $a$  du réseau**. Les motifs sont appelés les **traits du réseau**.

Un réseau peut être aussi caractérisé par son **nombre de traits par millimètre**.

Le motif sera généralement une fente, mais il existe d'autres réseaux avec un motif différent (par exemple, la surface d'un CD est formée de petits creux régulièrement espacés : cette surface agit comme un réseau).

Dans le cadre du cours, nous considérerons uniquement des réseaux par transmission pour lesquels la lumière traverse le réseau, mais il existe aussi des réseaux par réflexion (par exemple : le CD).

#### Modélisation d'un réseau par transmission :



On appelle :

- $a$  le pas du réseau
- $\varepsilon$  la largeur d'une fente et  $\ell$  sa hauteur
- $L$  la largeur éclairée du réseau et  $N$  le nombre de fentes éclairées :  $L \simeq Na$

#### Ordres de grandeur :

- Caractéristiques de la fente :  $\varepsilon \sim 500 \text{ nm à } 1 \mu\text{m}$  et  $\ell \sim 5 \text{ cm}$
- Caractéristiques du motif : environ 1000 traits/mm.

★ Le pas du réseau est donc  $a = \frac{1}{1000} \text{ mm}$ , soit  $a \sim 1 \mu\text{m}$ .

- Largeur éclairée par la source lumineuse :  $L \sim 1 \text{ mm}$ . On en déduit le nombre  $N$  de fentes éclairées :  $N = \frac{L}{a} \sim 1000$

On éclaire toujours un réseau par une onde plane incidente, c'est-à-dire un faisceau parallèle de rayons lumineux provenant du même point source primaire  $S$ .

### Conséquences des ordres de grandeur et des conditions d'éclairage :



- **Cohérence** : Les rayons lumineux arrivant sur toutes les fentes du réseau proviennent du même point source primaire : les ondes sont cohérentes spatialement entre elles.
- **Diffraktion** :  $\varepsilon < 1000\lambda$  : il y a diffraction dans la direction  $\vec{e}_x$ . Cela permet d'obtenir un champ d'interférences non nul. En revanche,  $\ell > 1000\lambda$  : pas de diffraction selon  $\vec{e}_y$ .
- **N ondes** :  $N \gg 1$  :
  - l'intensité des maxima principaux est beaucoup plus importante que celle des maxima secondaires : on n'observe que les maxima principaux.
  - les maxima principaux sont très fins.

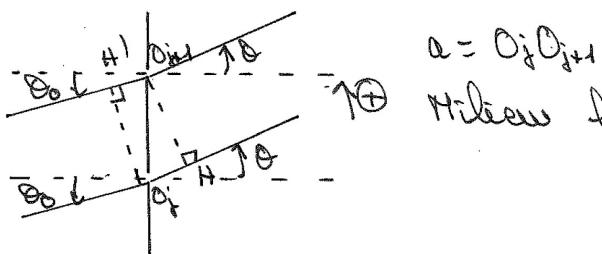
## II.2 Formule des réseaux

On considère un réseau éclairé par une source primaire  $S$  ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ . Cette source est **située à l'infini**. On appelle  $n$  l'indice optique du milieu homogène de propagation.

Appelons  $\theta_0$  l'angle d'incidence sur le réseau (par définition d'un angle d'incidence, il est défini par rapport à la normale du réseau).

On choisit d'étudier les **interférences à l'infini**, en un point  $M$ . Appelons  $\theta$  l'angle repérant la direction de diffraction associée au point  $M$ .

Soient  $O_1, O_2, \dots, O_N$  les centres des traits du réseau. Déterminons la différence de chemins optiques  $\delta(M)$  entre deux traits consécutifs.



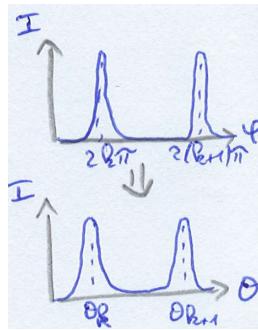
On définit :  $\delta(M) = (SM)_j - (SM)_{j+1}$ .

D'après le théorème de Malus,  $O_j$  et  $H'$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S$  :  $(SO_j) = (SH')$ . D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière,  $O_{j+1}$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde relative à  $M$  :  $(O_{j+1}M) = (HM)$ . Donc :  $\delta(M) = (O_jH) - (H'O_{j+1}) = n(O_jH - H'O_{j+1}) = n(a \sin(\theta) - a \sin(\theta_0))$

On en déduit la différence de phase entre deux ondes émises par deux traits successifs du réseau :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

Cette différence de phase entre deux ondes émises par deux traits successifs est constante. On est donc dans le cas traité dans la partie I.



On sait donc que le maximum principal d'ordre  $k$  vérifie  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc, les maxima principaux vérifient :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}na(\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0)) = 2k\pi \iff \sin(\theta_k) - \sin(\theta_0) = \frac{k\lambda_0}{na}$$

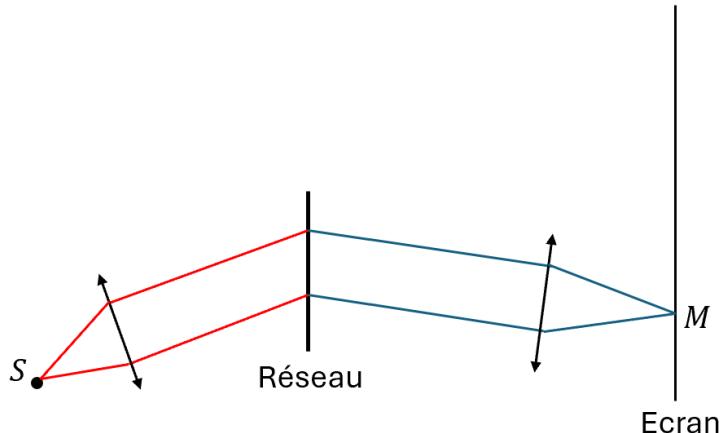
Formule des réseaux (A savoir par coeur)

On appelle alors  $k$  l'ordre de diffraction du réseau. Cette formule donne **la direction des maxima d'intensité derrière un réseau**.

## II.3 Montage expérimental

### Source primaire ponctuelle

On souhaite éclairer le réseau avec une onde plane : on place donc en pratique la source primaire  $S$  dans le plan focal objet d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ). On souhaite observer les interférences à l'infini : on place donc un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_2$ ).

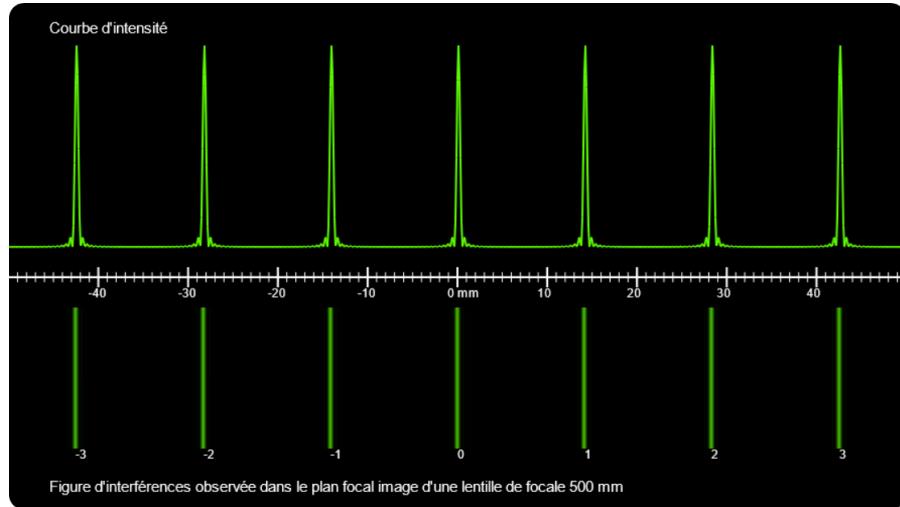


Concrètement, on utilisera un dispositif nommé spectrogoniomètre à réseau, dans lequel la lentille ( $\mathcal{L}_2$ ) pourra être déplacée. En la déplaçant, nous observerons successivement chacun des maxima d'intensité lumineuse, pour chaque ordre de diffraction  $k$ .

### Fente source primaire

Pour gagner en luminosité, on sera ammené à utiliser une fente source primaire plutôt qu'une source primaire ponctuelle. Cela ne pose aucun problème, car la diffraction n'a pas lieu selon la direction des fentes du réseau et que les différents points sources de la fente émettent des ondes incohérentes entre elles : les intensités lumineuses se somment sur l'écran.

On obtiendra alors des figures d'interférences de ce type :



**Exercice :** On éclaire un réseau ayant 500 traits par millimètre avec un faisceau incident parallèle normal de longueur d'onde  $\lambda = 600 \text{ nm}$ . On travaille dans l'air assimilable au vide. Déterminer le nombre maximal de pics de diffraction observables.

Sont fixés :  $a = \frac{1 \text{ mm}}{500} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\lambda$ ,  $n = 1$  et  $\theta_0 = 0$ . On a :

$$|\sin(\theta_k)| = \frac{|k| \lambda}{a} \leqslant 1 \Rightarrow |k| \leqslant \frac{a}{\lambda} = 3.3$$



Au maximum, on voit donc 7 pics de diffractions (ordres -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3).

En pratique, ordres  $\pm 3$  faiblement observables car peu d'intensité diffractée à ces grands angles. Et on retient : on ne pourra souvent pas faire de DL car pas de petits angles.

## II.4 Application : mesure des longueurs d'onde du spectre d'émission d'une source

Considérons désormais une source primaire (ponctuelle ou sous forme de fente) polychromatique éclairant un réseau. On réalise les montages expérimentaux précédents. Comme les ondes émises par différentes longueurs d'onde sont incohérentes entre elles, il y a additivité de l'intensité lumineuse résultant de chaque longueur d'onde  $\lambda_0$ . Ainsi la formule des réseaux s'applique pour chacune des longueurs d'onde  $\lambda_0$  :

$$\sin(\theta_k) = \sin(\theta_0) + \frac{k\lambda_0}{na}$$

**Ordre 0 :**

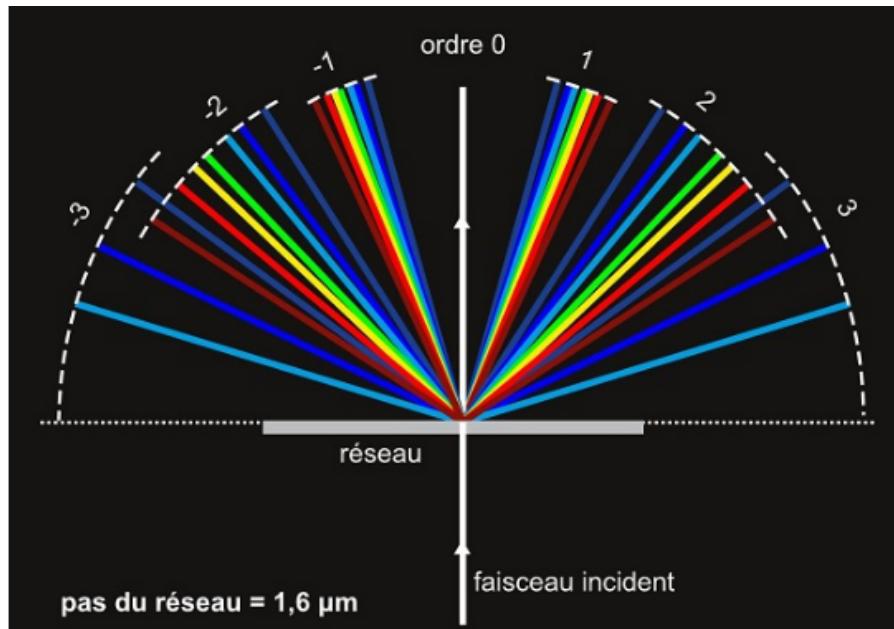
- ★ Quelque que soit  $\lambda_0$ ,  $\sin(\theta) = \sin(\theta_0) \Rightarrow \theta = \theta_0$  (angles compris dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ ).  
Ainsi, l'ordre 0 n'est pas dévié par le réseau : on dit que l'ordre 0 n'est pas dispersif.

Pour l'ordre 0, l'optique géométrique s'applique donc (aucune déviation par le réseau), et le point  $M$  est l'image géométrique de  $S$ .

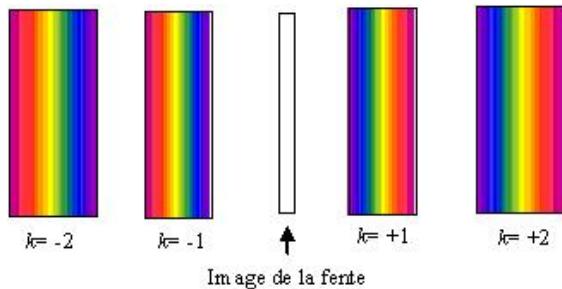
**Ordre  $k \neq 0$  :**

- ★ La position des maxima d'intensité dépend alors de  $\lambda_0$  : on parle d'ordres dispersifs.

Ainsi, si le pas du réseau  $a$  (ainsi que l'indice  $n$  du milieu de propagation) est connu, alors le réseau permet de mesurer les longueurs d'onde  $\lambda_0$  du spectre d'émission de la source. Le réseau est le constituant principal d'un **spectromètre**.



Exemple de figure obtenue sur un écran :



**Commentaires sur la figure d'interférences :**

- On observe bien la dispersion de la lumière pour tous les ordres  $k \neq 0$ .
- Dans un ordre  $k$  donné, en partant de  $\theta = \theta_0$ , on observe d'abord le bleu puis les différentes couleurs par ordre croissant de longueur d'onde puis en dernier le rouge.
- La différence entre les angles  $\theta$  relatifs aux couleurs rouge et bleu dans un ordre  $k$  augmente avec  $k$  : plus l'ordre est grand plus le réseau est dispersif et plus les différentes couleurs sont séparées angulairement.

**Remarque :** Pouvoir de résolution d'un réseau : Du fait de la largeur des maxima principaux, les pics de diffraction associées à des longueurs d'onde très proches peuvent se superposer. Un réseau a donc une certaine résolution spectrale et ne permet pas de distinguer des longueurs d'onde trop proches. La résolution augmente si l'ordre  $k$  augmente ou si le nombre  $N$  de fentes éclairées augmente.

## II.5 Minimum de déviation

Expérimentalement, il n'est pas aisément de déterminer précisément la direction de la normale au réseau (cela est possible, mais un peu technique). Le souci est que tous les angles  $\theta_k$  et  $\theta_0$  sont définis à partir de cette normale... Comment peut-on s'affranchir de la connaissance de la direction de la normale au réseau tout en déterminant néanmoins les longueurs d'onde  $\lambda_0$  ?

L'astuce est de mesurer non pas  $\theta_k$ , mais l'angle de déviation  $D_k = \theta_k - \theta_0$ . Cet angle dépend de l'ordre  $k$  et de la longueur d'onde  $\lambda_0$  étudiés. Considérons donc  $k$  et  $\lambda_0$  fixés. (Expérimentalement, cela revient à étudier l'une des raies visibles derrière le réseau.)

En faisant varier l'angle  $\theta_0$ , on se rend compte que  $D_k$  passe par un minimum, que l'on notera  $D_{k,m}$ . On cherche à exprimer théoriquement ce minimum de déviation.

**Etape 1 :** Différentions l'angle de déviation et plaçons nous au niveau du minimum de cet angle  $D_k$  :

$$dD_k = d\theta_k - d\theta_0 = 0 \Rightarrow d\theta_k = d\theta_0$$

**Etape 2 :** Différentions la relation des réseaux, sachant que seuls  $\theta_0$  et  $\theta_k$  peuvent être modifiés :

$$\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0) = \frac{k\lambda_0}{na} \Rightarrow \cos(\theta_k)d\theta_k - \cos(\theta_0)d\theta_0 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_k) = \cos(\theta_0)$$

Les angles  $\theta_k$  et  $\theta_0$  étant compris dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ , les deux solutions possibles sont :

- $\theta_k = \theta_0$  : c'est le cas de l'ordre 0, inintéressant dans le but d'accéder aux valeurs de  $\lambda_0$ . On exclut donc expérimentalement cette situation.
- $\theta_k = -\theta_0$  : situation intéressante. Le maximum d'intensité est donc dans une direction symétrique à la direction de l'ordre 0 par rapport à la normale du réseau.

En se plaçant donc au minimum de déviation, on a  $\theta_k = -\theta_0$ , soit  $D_{k,m} = \theta_k - \theta_0 = 2\theta_k$  et soit :

$$\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0) = 2 \sin(\theta_k) = \frac{k\lambda_0}{na}$$

On aboutit à la formule des réseaux exprimée avec le minimum de déviation :

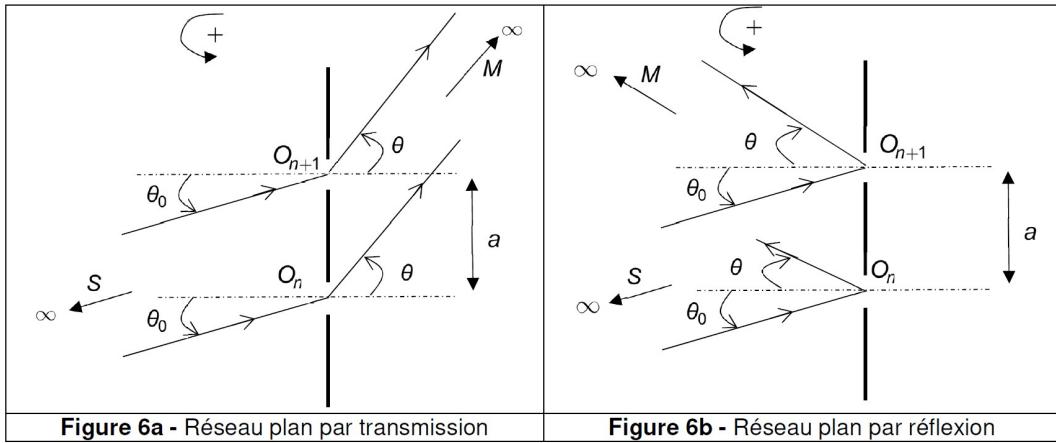
$$\sin\left(\frac{D_{m,k}}{2}\right) = \frac{k\lambda_0}{2na}$$

$D_{m,k}$  étant facile à mesurer en pratique, on en déduit aisément la valeur de  $\lambda_0$ .

## Exercices

### Ex. 1 (Ecrit CCINP TPC 2023) Couleur du canard colvert

Le canard colvert mâle possède, autour de son cou et de sa tête, un plumage dont la teinte varie selon la direction d'observation. Pour interpréter ce phénomène, il faut s'intéresser au plumage du canard, et en particulier à une structure de minces lamelles parallèles appelées microlamelles au sein de ce plumage. Chaque microlamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière. Entre deux lamelles se situe de la mélanine absorbant la lumière. Ainsi ces microlamelles s'apparentent aux traits d'un réseau plan qui peut être modélisé soit par la figure 6a, soit par la figure 6b :



La distance entre deux lamelles est notée  $a$ . On donne  $a = 0.56 \mu\text{m}$ .  $S$  représente une source ponctuelle de lumière monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$ , située à l'infini, envoyant un faisceau de rayons. L'observation se fait en un point  $M$  situé à l'infini.

1. La structure en microlamelles constitue-t-elle un réseau par réflexion ou par transmission ?
2. Dans le cas du réseau plan par transmission, on s'intéresse à deux rayons, l'un passant par  $O_n$ , l'autre par  $O_{n+1}$ . Justifier que ces deux rayons interfèrent ensemble au point  $M$ . Déterminer la différence de marche  $\delta(M)$ .
3. Pour quelles valeurs de  $\delta(M)$  les ondes interfèrent entre-elles de façon constructive ?
4. Dans le cas des réseaux par réflexion, montrer par analogie que les maxima d'intensité lumineuse sont donnés pour des angles  $\theta_k$  tels que :

$$\sin(\theta_k) + \sin(\theta_0) = \frac{k\lambda_0}{a}$$

avec  $k$  un entier relatif.

5. Application : de quelle couleur apparaît la tête d'un canard colvert, dont les microlamelles sont éclairées en incidence normale par des rayons provenant du Soleil, d'une part pour l'observateur A et d'autre part pour l'observateur B supposés suffisamment éloignés (figure 7) ? On justifiera que l'on ne tient compte que des ordres  $k = \pm 1$ .

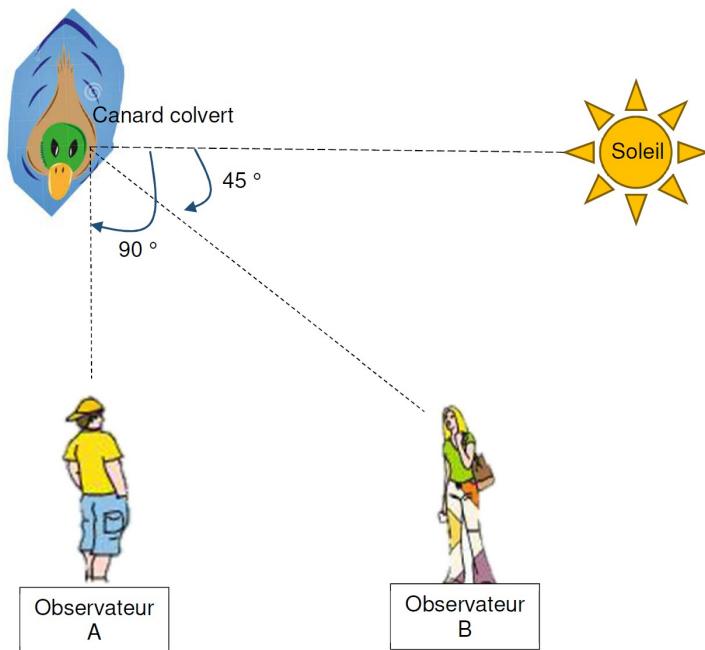


Figure 7 - Canard colvert éclairé par le soleil

### Correction de l'exercice 1

Q13. La structure en microlamelle constitue un réseau pour la diffraction, car chaque microlamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière.

Q14.  $\delta(M) = (SO_n M) - (SO_{n+1} M)$ , indice 1  
D'après le th. de Malus,  $O_{n+1} M$  et  $M$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S$ :  $(SO_n M) = (SO_{n+1} M)$ .  
D'après le th. de Malus et le principe de retour inverse,  $O_{n+1}$  et  $M'$  sont sur la même surface d'onde relative à  $M$ :  $(O_{n+1} M') = (M' M)$ . Donc:

$$\delta(M) = (SO_n M) + (H' O_{n+1}) + \cancel{(O_{n+1} M)} - \cancel{(SO_n M)} - (O_n H') - \cancel{(H' M)}$$

$$\delta(M) = 1 \cdot (H' O_{n+1} - O_n H') = a (\sin \theta_0 - \sin \theta)$$

Q15. Les interférences sont constructives si les ondes sont en phase  $\Delta \phi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda} = k \cdot 2\pi \Rightarrow \delta(M) = k \lambda, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \delta(M) = a (\sin \theta_0 - \sin \theta_k) = k \lambda_0, k \in \mathbb{Z}$$

Q.16. Par analogie:  
 $(SO_n) = (SH)$  et  $(H'M) = (O_{n+1}M)$   
 $\delta(M) = (SO_{n+1}M) - (SO_nM)$   
 $\delta(M) = (SH) + (H' O_{n+1}) - \cancel{(O_{n+1}M)}$   
 $- (SO_n) - (O_n H')$   
 $\delta(M) = 1 \cdot (H' O_{n+1} - O_n H') = a (\sin \theta_0 - \sin \theta)$   
 $\Rightarrow a (\sin \theta_0 + \sin \theta_k) = k \lambda_0, k \in \mathbb{Z}$   
 pour les maxima d'intensité  
 $\Rightarrow \sin \theta_k = - \sin \theta_0 + \frac{k \lambda_0}{a}, k \in \mathbb{Z}$ .

Q.17. Incidence normale:  $\theta_0 = 0 \Rightarrow \sin \theta_k = \frac{k \lambda_0}{a}$

\* Observateur A:  $\theta_k = 90^\circ \Rightarrow \sin(90^\circ) = 1 = \frac{k \lambda_0}{a}$

$$\begin{aligned} \bullet k=1 &\Rightarrow \lambda_0 = a = 0,56 \mu\text{m} = 560 \text{ nm: violet} \\ \bullet k=-1 &\Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{2} = 0,28 \mu\text{m} = 280 \text{ nm: m'appartient pas au domaine visible} \end{aligned}$$

\* Observateur B:  $\theta_k = -45^\circ \Rightarrow \sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k \lambda_0}{a}$

$$\begin{aligned} \bullet k=-1 &\Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,396 \mu\text{m} = 396 \text{ nm: violet} \\ \bullet k=-2 &\Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}} = 198 \text{ nm m'est visible.} \end{aligned}$$

## Ex. 2 Pouvoir de résolution d'un réseau

On éclaire un réseau par transmission de pas  $a = \frac{L}{N}$  ( $L$  représente la largeur utile du réseau et  $N$  le nombre de fentes éclairées) au moyen d'une source placée au foyer objet d'une lentille convergente et on observe l'intensité produite par celui-ci dans le plan focal image d'une lentille. Le réseau est éclairé en incidence normale. On appelle  $\theta$  l'angle d'émergence, variable, du réseau.

1. On suppose pour le moment que la source lumineuse ponctuelle est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Déterminer l'expression de la différence de chemins optiques entre deux ondes émises par deux fentes successives du réseau et interférant en un même point  $M$  de l'écran.

On donne l'expression de l'intensité lumineuse obtenue en un point  $M$  de l'écran :

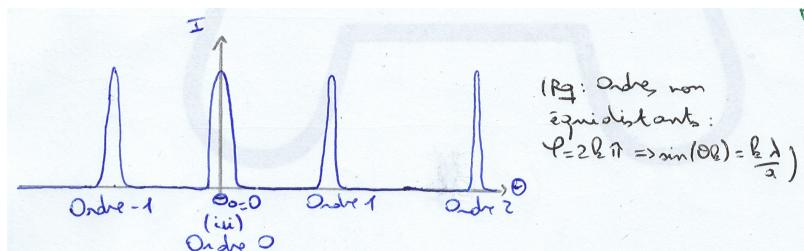
$$I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

avec  $\varphi$  le déphasage entre deux ondes émises par deux fentes successives du réseau.

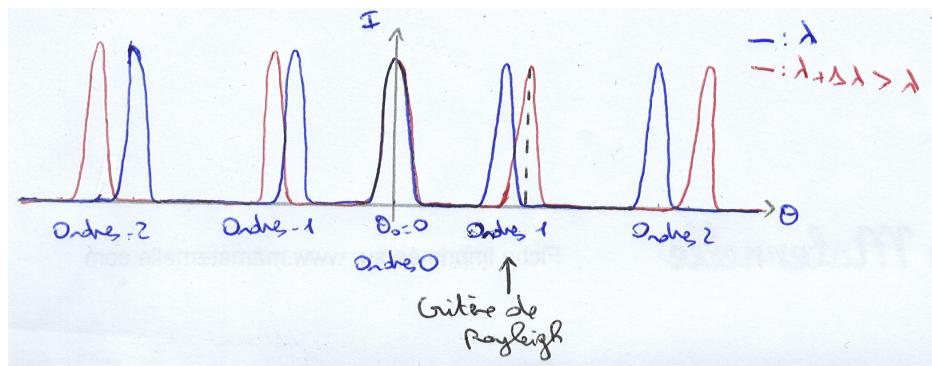
2. Expliquer comment procéder pour obtenir cette formule. Exprimer  $\varphi$  dans le cas du réseau par transmission.
  3. Obtenir l'expression de la demi-largeur en phase  $\Delta\varphi$  des maxima principaux de diffraction. Représenter alors le graphe de l'intensité lumineuse en fonction de l'angle  $\theta$ . Commenter.
  4. On considère désormais que la source émet deux radiations à des longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ . Représenter de nouveau l'intensité lumineuse en fonction de l'angle  $\theta$ .
  5. On cherche à déterminer l'écart minimal  $\Delta\lambda$  entre deux longueurs d'onde pour que celles-ci soient séparables par le réseau. On utilisera le critère de Rayleigh : deux longueurs d'onde sont séparables dans un ordre donné, si la distance entre les maxima principaux est supérieure ou égale à la demi largeur d'un maximum principal.
- Déterminer le pouvoir de résolution  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  pour un ordre  $k$  fixé. Commenter.

### Correction de l'exercice 2

1. Cours (faire directement un schéma sous incidence normale sur le réseau). On aboutit à  $\delta(M) = a \sin(\theta)$ .
2. Procédure pour obtenir l'intensité lumineuse :
  - (a) On exprime la vibration lumineuse complexe  $s_n$  émise par la fente  $n$  en fonction de la vibration lumineuse  $s_1$  prise comme référence.
  - (b) Comme les  $N$  ondes sont cohérentes entre elles, il y a additivité des vibrations lumineuses complexes :  $s(M,t) = \sum_{n=1}^N s_n(M,t)$ .
  - (c) On ré-écrit  $s(M,t)$  en reconnaissant une somme des premiers termes d'une suite géométrique.
  - (d) On en déduit  $I(M) \propto |s(M,t)|^2$ , que l'on ré-écrit pour obtenir l'expression demandée.  
Dans le cas du réseau par transmission en incidence normale,  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta)$ .
3. Les maxima principaux de diffraction sont atteints pour des ondes toutes en phase, soit  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  (on retrouve ceci en imposant que le dénominateur de  $I(M)$  s'annule). La demi-largeur des maxima principaux se détermine en cherchant les valeurs de  $\varphi$  telles que  $I(\varphi) = 0$ . Une condition nécessaire est d'imposer  $\sin(N\varphi/2) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2q\pi}{N}$  avec  $q \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, la première annulation suivant un maximum principal d'ordre  $k$  est atteint pour  $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{N}$ . La demi-largeur des maxima principaux est  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ .



Pour un réseau,  $N \gg 1$  : on n'observe que les maxima principaux de diffraction, qui sont fins, mais pas infiniment fins.



4.

5. On se place à la limite du critère de Rayleigh. Pour une même valeur de  $\theta$ , le centre du maximum principal d'ordre  $k$  associé à  $\lambda$  coïncide avec l'annulation du maximum principal d'ordre  $k$  associé à  $\lambda + \Delta\lambda$ . Ainsi :

$$\varphi_1 = 2k\pi + \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda}a \sin(\theta)$$

on en déduit :

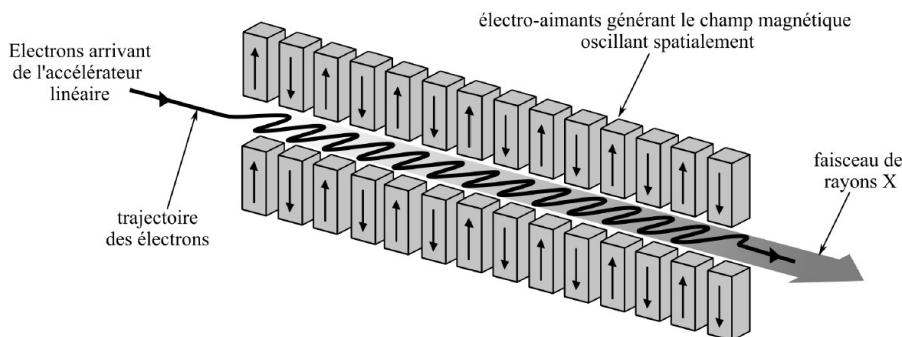
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nk$$

meilleure séparation si  $k$  augmente et si  $N$  augmente !

### Ex. 3 (Ecrit Centrale PC 2025) Rayonnement émis dans l'ondulateur du XFEL

Les lasers à électrons libres à rayons X (XFEL) produisent des rayons X cohérents en accélérant des électrons à travers des ondulateurs, qui sont des systèmes permettant de moduler spatialement le champ magnétique. Ces lasers génèrent des impulsions lumineuses ultra-brèves, de l'ordre de la femtoseconde ( $10^{-15}$  s), permettant d'étudier des dynamiques atomiques et moléculaires à des échelles temporelle et spatiale très fines, et très intenses. Il existe une dizaine de XFEL à travers le monde. Dans ce sujet, nous nous intéressons plus particulièrement au XFEL européen, installé près de Hambourg en Allemagne, qui a commencé à fonctionner en 2017.

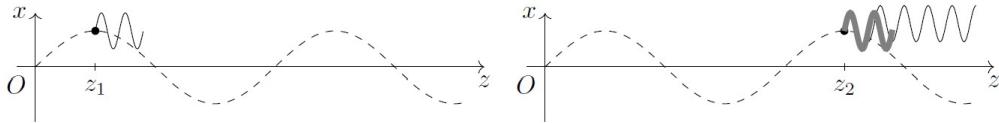
Après avoir été accélérés, les électrons abordent l'ondulateur qui est l'élément central du laser à électrons libres. Dans cette structure les électrons sont déviés par des champs magnétiques et suivent une trajectoire périodique dans l'espace : ils sont donc accélérés. Une particule chargée accélérée émet un rayonnement, ici sous forme d'impulsions ultracourtes de rayons X.



**Figure 8** – Représentation schématique du fonctionnement de l'ondulateur.

Les ondes électromagnétiques émises par l'électron au fur et à mesure de sa trajectoire dans l'ondulateur peuvent interférer. Nous allons étudier le résultat de ces interférences dans cette section.

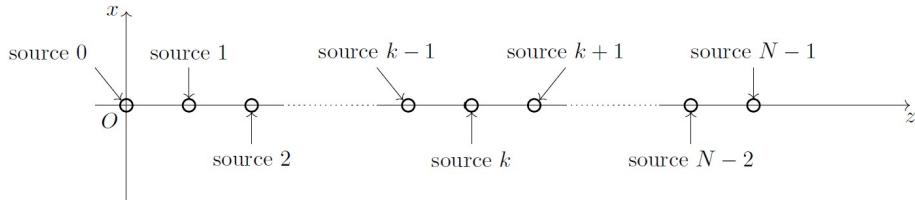
À l'instant  $t_1$ , l'électron se trouve en  $z = z_1$  lorsqu'il émet alors une onde électromagnétique. Sur le schéma de la figure 9, l'électron est représenté par un point, sa trajectoire est indiquée en pointillées, et l'onde qu'il est en train d'émettre est représentée très schématiquement en trait fin continu.



**Figure 9** – Représentation schématique de l'émission du rayonnement par l'électron à  $t_1$  et  $t_2$ .

À l'instant  $t_2$ , l'électron a parcouru une période de sa trajectoire sinusoïdale (voir la figure 9 à droite) : il se trouve en  $z_2 = z_1 + \lambda_u$  et rayonne alors une nouvelle onde électromagnétique. Cette onde qui est émise en  $t = t_2$  doit interférer constructivement avec l'onde qui a été émise par le même électron en  $t = t_1$ . Sur le schéma à droite de la figure 9 l'onde émise à l'instant  $t_1$ , qui s'est propagée, est dessinée en trait fin noir. L'onde qui est en train d'être émise à  $t = t_2$  est représentée en trait épais gris.

Pour modéliser le système, on considère un ensemble de  $N$  sources situées le long de l'axe ( $Oz$ ) (avec  $x = 0$ ), comme représenté sur la figure 10.



**Figure 10**

La  $p$ -ème source, qui se trouve en  $z_p = p\lambda_u$  émet une onde électromagnétique vers les  $z$  croissants que l'on écrit sous la forme :

$$s_p(z,t) = S_0 \cos \left( \alpha \times \left( t - p \frac{\lambda_u}{v_m} \right) - k \times (z - p\lambda_u) \right)$$

où  $S_0$ ,  $\alpha$  et  $k$  sont respectivement l'amplitude, la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique, et  $v_m$  est la vitesse moyenne de l'électron selon la direction  $z$ .

- Justifier l'expression de  $s_p$ .

On place un détecteur en un point  $M$  situé sur l'axe ( $Oz$ ) en un point de coordonnée  $z > N\lambda_u$ . Ce détecteur reçoit l'ensemble des ondes électromagnétiques émises par les sources. On introduit  $s_{tot,N}(t)$  le signal total reçu par le détecteur :

$$s_{tot,N}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} s_p(z,t)$$

- Montrer que l'amplitude de  $s_{tot,N}$  s'écrit sous la forme :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \frac{\sin \left( \frac{N}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha \lambda_u \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha \lambda_u \right)} \right|$$

Une étude mécanique montre que, dans le cadre de la relativité restreinte, la vitesse moyenne de l'électron dans la direction  $z$  est

$$v_m = c \left( 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left( 1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right)$$

avec  $\frac{K}{\gamma} \ll 1$  et  $\frac{1}{\gamma} \ll 1$  ( $\gamma$  est le facteur relativiste de Lorentz et  $K$  est une grandeur introduite par l'énoncé).

- Montrer que l'amplitude de  $s_{tot,N}$  est maximale pour les fréquences  $F_q$  telles que :

$$F_q = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} q$$

où  $q$  est un entier naturel non nul.

Pour l'ondulateur SASE1 du XFEL européen, on a  $K = 2$  et  $\lambda_u = 4.0\text{ cm}$  et les électrons ont une énergie cinétique égale à  $17.5\text{ GeV}$ , ce qui correspond à  $\gamma = 3.4 \times 10^4$ .

4. En déduire la longueur d'onde correspondant à la plus petite fréquence d'interférences constructives  $F_1$ .

### Correction de l'exercice 3

1. On considère que l'onde émise par l'électron en  $z = 0$  à l'instant  $t = 0$  (source 0) est une OPH se propageant dans le vide (on a d'après la relation de dispersion  $k = \frac{\alpha}{c}$ ).

Une nouvelle onde est émise par l'électron en  $z = p\lambda_u$  (source  $p$ ) à l'instant  $t = p\frac{\lambda_u}{v_m}$ . Cette onde est déphasée spatialement et temporellement par rapport à l'onde émise en  $z = 0$  à  $t = 0$ , ce qui explique la forme proposée pour  $s_p(z,t)$ .

2. Comme l'onde  $s_p(z,t)$  est une OPH, on passe en notation complexe :  $\underline{s}_p(z,t) = S_0 e^{j\left(\alpha\left(t - \frac{p\lambda_u}{v_m}\right) - k(z - p\lambda_u)\right)}$ . L'amplitude réelle de  $s_{tot,N}$  peut alors s'écrire :

$$S_{0,N} = |\underline{s}_{tot,N}(z,t)| = \left| \sum_{p=0}^{N-1} \underline{s}_p(z,t) \right| = S_0 \times 1 \times \left| \sum_{p=0}^{N-1} e^{jp\left(k\lambda_u - \frac{\alpha\lambda_u}{v_m}\right)} \right|$$

Avec la relation de dispersion dans le vide  $k = \frac{\alpha}{c}$ . Ainsi :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \sum_{p=0}^{N-1} e^{jp\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)} \right|$$

On reconnaît la somme des  $N$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $e^{j\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)}$ . On a donc :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \frac{1 - e^{jN\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)}}{1 - e^{j\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)}} \right|$$

En mettant en facteur la demi-somme des arguments des exponentielles du numérateur et du dénominateur :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \frac{e^{-j\frac{N}{2}\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)} - e^{j\frac{N}{2}\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)}}{e^{-j\frac{1}{2}\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)} - e^{j\frac{1}{2}\alpha\lambda_u \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{v_m} \right)}} \right| = S_0 \left| \frac{\sin \left( \frac{N}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha\lambda_u \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha\lambda_u \right)} \right|$$

3. Ce quotient sera maximal lorsque le dénominateur sera nul : il s'agit de la condition d'interférences constructives (le numérateur est alors aussi nul). On a donc :

$$\sin \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha\lambda_u \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_m} - \frac{1}{c} \right) \alpha\lambda_u = q\pi \quad \text{avec } q \in \mathbb{N}^*$$

car tous les termes sont positifs et que la pulsation  $\alpha$  ne peut pas être nulle. Ainsi, avec  $\alpha = 2\pi F_q$ , on a

$$F_q = q \frac{1}{\lambda_u} \frac{1}{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}}$$

En utilisant l'expression fournie de  $v_m$  et en réalisant un DL à l'ordre 2 en  $\frac{1}{\gamma}$ , on obtient

$$\frac{1}{v_m} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\gamma^2}} \frac{1}{1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}} = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left( 1 + \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right) \right)$$

Ainsi :

$$F_q = \frac{qc}{\lambda_u} \times \frac{1}{\frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)} = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} q$$

4. On calcule  $\lambda_1 = \frac{c}{F_1} = \frac{\lambda_u \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)}{2\gamma^2}$ . A.N. :  $\lambda_1 = 52 \text{ pm}$ , ce qui est bien dans le domaine des rayons X.