

# Actions de contact dans un fluide

## Sommaire

<b>I Forces volumiques et surfaciques dans un fluide</b>	<b>2</b>
I.1 Les forces volumiques . . . . .	2
I.2 Les forces de contact surfaciques . . . . .	2
<b>II Forces de pression</b>	<b>3</b>
II.1 Une force surfacique . . . . .	3
II.2 Équivalent volumique de la force de pression . . . . .	5
II.3 Statique des fluides . . . . .	6
<b>III Forces de viscosité</b>	<b>9</b>
III.1 Étude de l'écoulement de Couette plan . . . . .	9
III.2 Différents types de fluides . . . . .	11
III.3 Équivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible . . . . .	11
<b>IV Conditions aux limites</b>	<b>12</b>
IV.1 Conditions aux limites à une interface fluide/solide . . . . .	12
IV.2 Conditions aux limites à une interface entre deux fluides non miscibles . . . . .	13
<b>Exercices</b>	<b>15</b>

## Questions de cours

- Pression : définition, expression de la force de pression, démonstration de la force volumique de pression.
- Démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides, et l'appliquer à un liquide incompressible en présentant quelques applications.
- Démontrer l'expression du champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur. Interpréter physiquement en explicitant la signification du facteur de Boltzmann.
- Présenter l'écoulement de Couette plan. Interpréter physiquement la force de viscosité élémentaire  $\delta \vec{F}_v = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$ . Odg de la viscosité dynamique de l'eau. Démontrer l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas de l'écoulement de Couette plan, puis donner la forme générale.



Il existe de nombreuses expériences montrant l'importance des forces de pression : un verre rempli d'eau avec une feuille à son sommet ne se vide pas lorsqu'on le retourne, un plongeur décompresse lorsqu'il plonge dans l'océan, la cabine d'un avion est sous-pressurisée lors d'un vol... Cette force de pression est une action de contact s'exerçant sur la surface d'un système. Ce chapitre a pour but de décrire l'origine et de déterminer les expressions des actions de contact s'exerçant dans un fluide.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Démontrer l'équation fondamentale de la statique des fluides et l'appliquer pour déterminer la pression dans un fluide incompressible, puis dans un gaz parfait isotherme, puis l'équation d'une surface libre.
2. Comprendre que l'origine des forces de viscosité est l'adhérence entre particules de fluides.
3. Déterminer l'équivalent volumique des forces de viscosité.

## I Forces volumiques et surfaciques dans un fluide

Il existe deux types de forces extérieures s'exerçant sur un volume ( $\mathcal{V}$ ) de fluide.

### I.1 Les forces volumiques

Une force volumique est une force qui s'exerce sur tous les points du volume ( $\mathcal{V}$ ). On la caractérise par une densité volumique de force  $\vec{f}_v = \frac{\delta \vec{F}}{d\tau}$  où  $\delta \vec{F}$  est la force élémentaire s'exerçant sur l'élément  $d\tau$ . La force totale est alors l'intégrale de la densité volumique de force :

$$\vec{F} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{f}_v d\tau \quad (I.1)$$

Citons par exemple :

- le poids  $\delta \vec{P} = \delta m \vec{g} = \rho d\tau \vec{g}$  ( $\rho$  : masse volumique) conduisant à  $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$ .
- la force de Lorentz  $\delta \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  ( $\rho_c$  : densité volumique de charges) conduisant à  $\vec{f}_v = \rho_c (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ .

Dans un référentiel non galiléen, on doit prendre en compte des forces d'inertie, dont on peut aussi exprimer les équivalents volumiques.



- **Cas d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :**

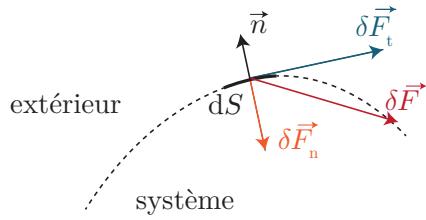
Force volumique d'inertie d'entraînement :  $\delta \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -\rho d\tau \vec{a}_e$  conduisant à  $\vec{f}_{v,ie} = -\rho \vec{a}_e$  avec  $\vec{a}_e$  : accélération de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- **Cas d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation autour d'un axe fixe d'un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :**

- $\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 \vec{H} \vec{M}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation.
- Force volumique d'inertie de Coriolis :  $\vec{f}_{v,c} = -2\rho \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$

### I.2 Les forces de contact surfaciques

Considérons un élément de surface infinitésimal  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  autour de  $M$ , avec  $\vec{n}$  la normale en  $M$  à cette surface. La force élémentaire  $\delta \vec{F}$  exercée sur la surface  $dS$  peut généralement se décomposer en une composante normale  $\delta \vec{F}_n$  correspondant à une force de pression, et une composante tangentielle  $\delta \vec{F}_t$  appelée force de cisaillement ou force de viscosité.



On peut ainsi définir une force surfacique, encore appelée contrainte, et exprimée en  $\text{N m}^{-2}$  ou en pascal :

$$\vec{\sigma} = \frac{\delta \vec{F}}{dS} = \frac{\delta \vec{F}_n}{dS} + \frac{\delta \vec{F}_t}{dS} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_t$$

On va étudier dans les deux prochaines parties ces deux types de contraintes, jouant un rôle essentiel dans l'écoulement des fluides.

### Problème des forces surfaciques lors de l'application du PFD :

Dans la suite, on appliquera le PFD à une particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire galiléen. Or, on a :

$$m \vec{a} = (\rho d\tau) \frac{d \vec{v}}{dt} = (\rho d\tau) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right)$$

★ On ne peut pas exprimer ce terme en faisant intervenir une surface élémentaire. Donc, le PFD s'écrira :

$$\rho d\tau \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v d\tau + \vec{\sigma}_n dS + \vec{\sigma}_t dS$$

qui dépend à la fois de  $d\tau$  et  $dS$ ... Pour se ramener à une équation universelle (ne dépendant pas de la forme de la particule de fluide), on va donc chercher un équivalent volumique de chacune des contraintes. (On simplifiera alors par  $d\tau$ .)

## II Forces de pression

### II.1 Une force surfacique

#### a Définition de la pression

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives (liées à l'agitation moléculaire et au principe d'exclusion de Pauli) et interactions attractives (Van der Waals par exemple). En un point  $M$  d'une surface délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par l'extérieur sur le système étudié s'écrit :

$$\delta \vec{F}_{\text{pressure}} = \pm P(M) d\vec{S} = \pm P(M) dS \vec{n}$$

avec  $dS$  la surface élémentaire autour de  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal. Ainsi on identifie la pression à la contrainte normale,  $\vec{\sigma}_n = \pm P(M) \vec{n}$ . On choisit le signe avec le sens physique tel que la force soit dirigée vers le système.

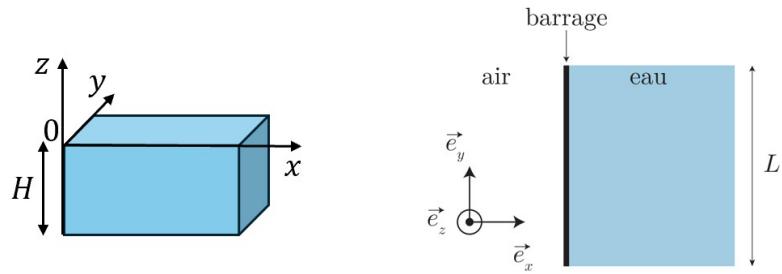
L'unité de la pression est le pascal (Pa), ou celle d'une force surfacique en  $\text{N m}^{-2}$ . On rencontre d'autres unités, dont une est à connaître :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

La force totale s'exerçant sur une surface  $S$  finie correspond alors à la somme des forces élémentaires :

$$\vec{F}_{\text{pressure}} = \iint_{(S)} \delta \vec{F}_{\text{pressure}} = \pm \iint_{(S)} P(M) dS \vec{n}$$

## b Calcul de la résultante des forces de pression sur une surface

### i) Force de pression sur une surface plane



Considérons un barrage plan de hauteur  $H$  et largeur  $L$ , soumis d'un côté aux forces de pression de l'air, et de l'autre à celles de l'eau. On se place en coordonnées cartésiennes, avec l'axe ( $Oz$ ) ascendant (origine placé à la surface de l'eau). On précise qu'il règne dans l'eau une pression  $P(z) = P_0 - \rho g z$ , avec  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $P_0 = 1$  bar la pression atmosphérique, et on supposera la pression de l'air uniforme, de valeur  $P_0$ . Calculons la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression sur le barrage.

Considérons un élément de surface  $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$ .

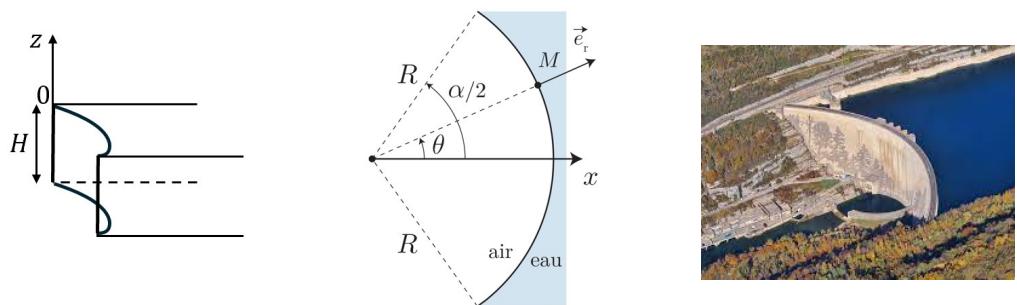
- $\vec{F}_{air \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$  (entre parenthèses :  $\vec{F}_{air \rightarrow barrage} = P_0 H L \vec{e}_x$ ).
  - $\vec{F}_{eau \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} -P(z) d\vec{S} = - \iint_{(S)} (P_0 - \rho g z) d\vec{S}$
- Donc, la résultante des forces sur le barrage s'écrit :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} \rho g z dy dz \vec{e}_x = \rho g \int_{y=0}^L dy \int_{z=-H}^0 z dz \vec{e}_x = -\rho g L \frac{H^2}{2} \vec{e}_x$$

On constate, et c'est souvent le cas, que seule la surpression dans l'eau  $P(z) - P_0$  joue un rôle dans le calcul des forces de pression.

**Remarque :** Le point d'application de la résultante des forces de pression, appelé centre de poussée  $P$ , est tel que la somme des moments en  $P$  de toutes les forces élémentaires de pression est nul  $\iint_{(S)} \vec{M}_P (\delta \vec{F}_{pressure}) = \iint_{(S)} \vec{P} \vec{M} \wedge (\pm P(M) d\vec{S}) = \vec{0}$ . Pour le barrage plan précédent, on sait par symétrie que  $P$  se trouve en  $y = L/2$  ; le calcul montre alors que  $P$  est à une hauteur  $z = H/3$ .

### ii) Force de pression sur une surface non plane



On considère un barrage constitué par une portion de cylindre, de rayon  $R$ , d'angle  $\alpha$  et de hauteur  $H$ . Il est soumis d'un côté aux forces de pression de l'air et de l'autre à celles de l'eau. On se place en coordonnées cylindriques, avec un axe ( $Oz$ ) ascendant ( $O$  est sur la surface de l'eau). La pression de l'eau s'écrit alors toujours  $P(z) = P_0 - \rho g h$ . On cherche à déterminer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression sur le barrage.

On introduit  $d\vec{S} = R d\theta dz \vec{e}_r$ .

- $\vec{F}_{air \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$

- $\vec{F}_{eau \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} -P(z) d\vec{S}$

Donc, la résultante s'écrit :

★

$$\vec{F} = \iint_{(S)} \rho g z R d\theta dz \vec{e}_r$$



La direction de  $\vec{e}_r$  dépend du point  $M$  considéré. Il ne faut jamais calculer une intégrale avec un vecteur mobile.

**Méthode pour calculer une force de pression sur une surface non plane :**

1. On détermine la direction de la force par symétrie.
2. On ne calcule que la projection de la force sur la direction déterminée.

Par symétrie, on a  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$ . On calcule donc :

★

$$F_x = \iint_{(S)} \rho g z R \cos(\theta) d\theta dz$$

Tous calculs faits, on trouve :

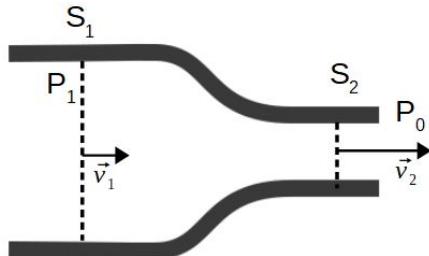
$$\vec{F} = -\rho g R H^2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_x$$

### iii) Cas d'un champ de pression uniforme

Lorsque le champ de pression est uniforme (ce sera fréquemment le cas dans les gaz),  $P(M) = P_0 = \text{cste}$ , on peut assez simplement calculer la résultante des forces de pression sur une surface fermée. Si on considère par exemple un cube de côté  $a$ , les forces de pression vont s'opposer deux à deux pour chaque face, et la résultante des forces de pression sur le cube est nulle. Le résultat peut se généraliser :

$$\iint_{(S)} P_0 dS \vec{n} = \vec{0} \quad (\text{II.1})$$

**Exemple :** On considère une lance à incendie de pompier, placée dans l'air de pression uniforme  $P_0$ . L'eau présente dans la lance passe par un rétrécissement du tuyau, passant de la surface  $S_1$  à la surface  $S_2$ . On cherche la résultante des forces de pression exercées par l'air sur la portion de tuyau entre  $S_1$  et  $S_2$ .



On étudie momentanément une situation fictive : on ferme le tuyau de part et d'autre et on le suppose entouré entièrement d'air. Schéma.

La surface étant fermée, on a (orienter  $\vec{e}_x$  vers la droite) :

★

$$\iint_{(S)} P_0 d\vec{S} = \vec{0} = \iint_{(S_{lat})} P_0 d\vec{S} + P_0 S_1 \vec{e}_x - P_0 S_2 \vec{e}_x \Rightarrow \iint_{(S_{lat})} P_0 d\vec{S} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$$

Dans la véritable situation, la résultante des forces de pression de l'air sur le tuyau est donc :  $\vec{F}_{p,air \rightarrow tuyau} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$ .

## II.2 Équivalent volumique de la force de pression

Les forces de pression peuvent s'exprimer avec une force volumique équivalente. Pour la déterminer, considérons une particule de fluide  $d\tau$ , cubique de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  en coordonnées cartésiennes.

Calcul de la résultante des forces de pression sur cette particule de fluide (schéma) :

$$\begin{aligned}
 \delta \vec{F} &= (P(x,y,z) - P(x + dx, y, z)) dy dz \vec{e}_x \\
 &+ (P(x,y,z) - P(x, y + dy, z)) dx dz \vec{e}_y \\
 &+ (P(x,y,z) - P(x, y, z + dz)) dx dy \vec{e}_z \\
 \star &= - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{e}_x + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{e}_y + \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{e}_z \right) dx dy dz = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de pression :

$$\vec{f}_{v, \text{ pression}} = - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Cela s'interprète aisément : la résultante des forces de pression sur un petit élément est dirigée dans le sens opposé du gradient de pression, c'est-à-dire des zones de fortes pressions vers celles de faibles pressions.

## II.3 Statique des fluides

### a Relation fondamentale de la statique des fluides

On se place dans un référentiel galiléen dans lequel le fluide est à l'équilibre (c'est-à-dire que toutes les particules de fluide sont à l'équilibre :  $\vec{v} = \vec{0}$ ). On suppose qu'en plus des forces de pression, le fluide est soumis à des forces dont la résultante est décrite par une densité volumique de force  $\vec{f}_v$ .

En appliquant le PFD à une particule de fluide à l'équilibre :

$$\vec{f}_{v, \text{ pression}} d\tau + \vec{f}_v(M) d\tau = \vec{0} \iff - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v(M) = \vec{0}$$

#### Relation fondamentale de la statique des fluides

Dans un référentiel galiléen, pour un fluide statique :

$$- \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v(M) = \vec{0}$$

avec  $\vec{f}_v$  la résultante des densités volumiques de forces extérieures. Si le fluide est statique dans un référentiel non galiléen, il faut ajouter les densités volumiques des forces d'inertie.

La résolution de cette équation peut nous permettre de déterminer le champ de pression au sein d'un fluide en statique, ce qu'on illustre par les différents exemples qui suivent.

### b Champ de pression dans un liquide incompressible soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Considérons le cas d'un liquide incompressible, de masse volumique constante et uniforme  $\rho$ , placé dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ . On suppose le fluide statique dans le référentiel terrestre.

- Référentiel terrestre galiléen
  - Repère cartésien (faire un schéma)
- La relation de la statique des fluides s'écrit :

$$-\vec{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z = \vec{0}$$

soit projetée selon les trois axes :

★

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{y,z} &= 0 \implies P(y,z) \\ \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{x,z} &= 0 \implies P(z) \\ \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{x,y} &= -\rho g \implies P(z) = P_0 - \rho g z \end{aligned}$$

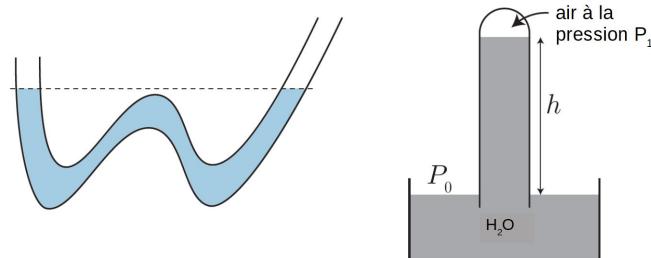
avec  $P_0 = P(z = 0)$ .

⚠ L'expression du champ de pression n'est valable que si l'axe vertical est orienté vers le haut, à l'opposé de  $\vec{g}$ . Si on inverse le sens de l'axe, on trouve  $P(z) = P_0 + \rho g z$ . De plus, il faut que l'origine de l'axe vertical soit placée de sorte que  $P(z = 0) = P_0$ .

On peut en conclure que la pression augmente avec la profondeur. On constate également que les surfaces de niveau isobares sont des plans horizontaux.

**Ordre de grandeur à retenir :**  $\rho g \simeq 0.1 \text{ bar m}^{-1}$  pour l'eau liquide, c'est-à-dire une augmentation de pression de 1 bar tous les 10 m.

### Quelques applications :



- deux points du même fluide situés à la même altitude ont la même pression. Les surfaces libres, soumises à la même pression atmosphérique  $P_0$  ont donc la même altitude (principe des vases communicants), et sont horizontales ;
- Au niveau de la surface libre en contact avec l'atmosphère, la pression dans le fluide est  $P_0$ . Donc, au sein du tube, la pression décroît avec l'altitude, jusqu'à une pression  $P_1 = P_0 - \rho g h$  au sommet du tube.

### c Champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Contrairement au cas des liquides, la masse volumique d'un gaz dépend de la pression. Donc, la relation :  $P = P_0 - \rho g z$  est fausse !!! Supposons que l'on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait dont la température  $T_0$  est constante (modèle de l'atmosphère isotherme).

**Exercice :** Déterminer l'expression de la pression dans l'atmosphère, dans le cadre du modèle isotherme. On supposera que l'air est statique dans le référentiel terrestre galiléen. On introduira une distance caractéristique  $H$  dont on donnera l'expression et dont on réalisera une application numérique.

- Référentiel terrestre galiléen
- Repère cartésien

$$\rho = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{n_{qm} M}{V} = \frac{M P}{R T_0}$$

En suivant le même calcul que précédemment, le système de trois équations devient (axe  $(Oz)$  orienté vers le haut) :

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{MP}{RT_0} g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P(z) = 0$$



en posant  $H = \frac{RT_0}{Mg}$  une hauteur caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 1. La condition à la limite  $P(z = 0) = P_0$  conduit alors à

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

- la pression diminue exponentiellement avec l'altitude, avec une distance caractéristique  $H$  valant pour l'air ambiant ( $M = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$ ) à la température  $T_0 = 288 \text{ K}$ ,  $H \simeq 8.4 \text{ km}$  ;
- on pourra considérer la pression constante à l'échelle de la centaine de mètres

**Interprétation avec le facteur de Boltzmann :**

Le terme exponentiel se met sous la forme  $e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$  avec  $m = \frac{M}{N_A}$ . La densité volumique de particules  $n = \frac{\delta N}{d\tau} = \frac{P}{k_B T_0} \propto e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$ . Ce terme correspond à un *facteur de Boltzmann*

qui traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle de pesanteur  $mgz$ , et l'agitation thermique, d'énergie  $k_B T$ , qui conduit les molécules de gaz à occuper tout l'espace.

## d Poussée d'Archimède

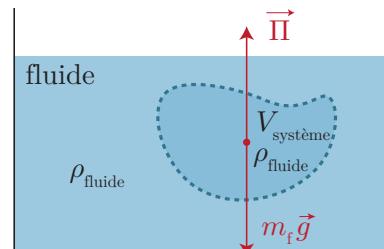
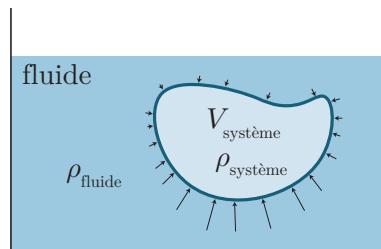
### Définition de la poussée d'Archimède

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la *poussée d'Archimède* est la *résultante des forces de pression* qui s'exerce sur un objet immobile dans  $\mathcal{R}$ , par le fluide au repos qui l'entoure.



Dans un exercice, ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède ET la résultante des forces de pression : c'est la même force qui a deux noms différents !!!

Considérons le cas d'un objet plongé dans un fluide, et entièrement entouré par du fluide. On se place dans un référentiel galiléen. Seuls les champs de pression et de pesanteur sont considérés ici.



En STATIQUE, le champ de pression dans le fluide entourant l'objet est identique que l'objet soit présent ou non. En effet, dans le fluide, on vérifie toujours :  $\vec{0} = -\nabla P + \rho \vec{g}$  et on peut bien intégrer ceci entre la surface et tout le reste du fluide.

Donc, on peut considérer la situation fictive dans lequel l'objet est remplacé par le même volume de fluide  $V_{\text{système}}$ . En statique, on applique le PFD à ce volume de fluide :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0} \iff \vec{\Pi} = -m_f \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g}$$

### Expression de la poussée d'Archimède

Un corps entièrement plongé dans un fluide au repos dans un référentiel galiléen subit une force verticale ascendante opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -m_f \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g}$$

avec  $m_f$  la masse de fluide déplacé,  $\rho_{\text{fluide}}$  la masse volumique du fluide (pas du système), et  $V_{\text{système}}$  le volume occupé par le système.

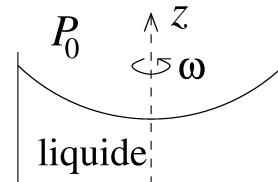


On ne peut appliquer la poussée d'Archimède qu'en statique, si le système a une surface fermée et s'il est entièrement entouré d'un ou de plusieurs fluides. Il n'est pas possible d'appliquer la poussée d'Archimède si le système est en contact avec une surface solide.

**Remarque :** La formule de la poussée d'Archimède est modifiée si l'étude est réalisée dans un référentiel non galiléen ou si d'autres forces extérieures que la force de pesanteur s'appliquent.

### e Surface libre dans le cas d'un référentiel non galiléen

Considérons la situation concrète suivante. Un récipient cylindrique contenant un liquide de masse volumique  $\rho$  est en rotation autour de son axe de révolution ( $Oz$ ) à la vitesse constante  $\omega$ . On note la pression atmosphérique  $P_0$ .



Deux référentiels doivent être distingués :

- le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide n'est pas statique.
- le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation à la vitesse  $\omega$  autour de l'axe fixe ( $Oz$ ) de  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le fluide est statique, ce qui rend l'étude plus simple.

On se place en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ).

Dans  $\mathcal{R}'$ , la relation fondamentale de la statique des fluides donne :

$$-\vec{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \omega^2 \vec{H} \vec{M} = -\vec{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \omega^2 r \vec{e}_r = \vec{0}$$

On cherche alors l'équation de la surface libre.

**Définition :** Surface libre

Interface entre un fluide et l'air.

Dans le cas d'un fluide statique sans tension superficielle, il y a continuité de la pression à l'interface fluide/air. Donc, la pression dans le fluide vaut  $P = P_0$  = cste au niveau de la surface libre.

Ainsi, si on se déplace de  $\vec{dr}$  sur la surface libre, on a  $dP = 0$  :  $\vec{\text{grad}}(P) \cdot \vec{dr} = 0$ . Donc :

$$\star \quad \rho g dz = \rho \omega^2 r dr \Rightarrow z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{cste}$$

La surface libre forme une parabole.

## III Forces de viscosité

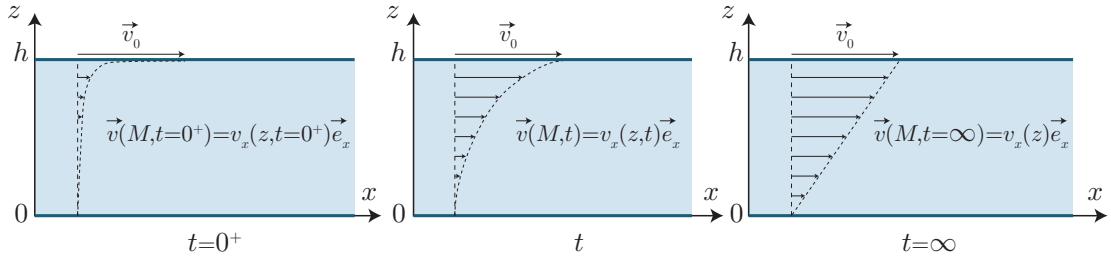
### III.1 Étude de l'écoulement de Couette plan

En mécanique des fluides, on étudie principalement trois types d'écoulement de fluides :

- l'*écoulement de Couette* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois ;
- l'*écoulement de Poiseuille* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite ;
- l'*écoulement gravitaire* est un écoulement de fluide provoqué par la pesanteur.

On va s'appuyer dans ce chapitre sur un premier type d'écoulement, appelé écoulement de Couette plan. Un fluide s'écoule entre deux plans parallèles, celui en  $z = 0$  est maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire, et celui en  $z = h$  se translate horizontalement (à partir de  $t = 0$ ) à la vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

### a Observation du champ de vitesse

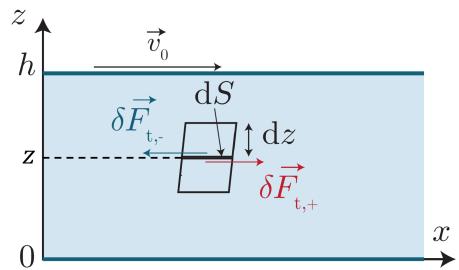


Lors de la mise en mouvement de la plaque, on observe un régime transitoire durant lequel les couches de fluide à son voisinage se mettent en mouvement, et transmettent de proche en proche de la quantité de mouvement à des couches de fluide plus éloignées. Au bout d'un certain temps, le profil de vitesse est linéaire.

L'écoulement de Couette plan est un exemple d'une famille d'écoulement appelée les **écoulements parallèles** ou **écoulements de cisaillement** : la vitesse dépend d'une coordonnée d'une direction transverse à la direction de l'écoulement.

### b Expression de la force de viscosité

Considérons deux particules de fluide de surface  $dS$  horizontale et de hauteur  $dz$  l'une au-dessus de l'autre, l'interface étant à une altitude  $z$ . On exprime la force élémentaire exercée par la particule de fluide du dessus sur celle du dessous :



$$\delta \vec{F}_{t,+} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$$

où  $\eta$  est appelé *viscosité dynamique* du fluide.

★ Unité de  $\eta$  :  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ , mais on utilise plus couramment une unité secondaire, le poiseuille (symbole  $P\ell$ ), correspondant à des Pas.

Commentaires sur la force de viscosité :

- **Attention aux variables/vecteurs :**

L'origine de la force de viscosité est la différence de vitesse entre deux particules de fluide. Ici, la vitesse des particules de fluide ne varie que selon  $z$  : il est donc

★ logique de faire apparaître  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  et non pas  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ . Par contre, la force est bien dirigée selon  $\pm \vec{e}_x$  (sens du mouvement).

- plus la différence de vitesse entre les deux particules est importante, plus la force est importante ;
- la particule de fluide va être freinée ou accélérée par la couche du dessus, selon la vitesse relative des deux : si  $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$ , celle du dessus est plus rapide et la force est bien dirigée selon  $+\vec{e}_x$  de sorte à l'accélérer, et *vice versa*
- plus la surface de contact est grande, plus la norme de la force est importante ;
- la force dépend du fluide choisi, caractérisé par le coefficient  $\eta$ .

La force exercée par la particule de fluide du dessous sur celle du dessus s'exprime par :

★

$$\delta \vec{F}_{t,-} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \quad (\text{III.1})$$

### Quelques ordres de grandeur de la viscosité dynamique :

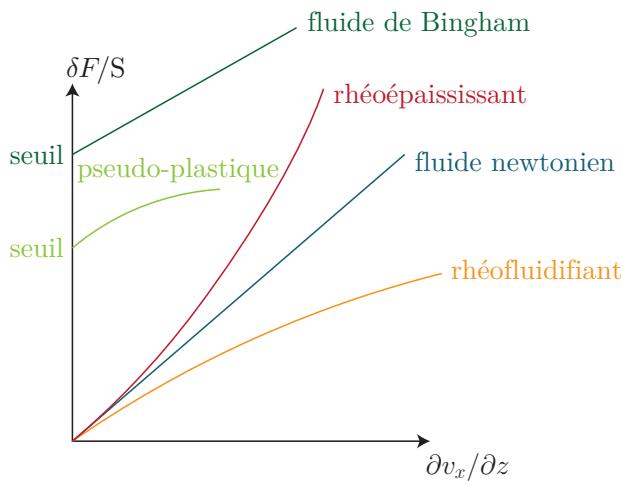
- l'hélium liquide à très basse température :  $\eta = 0$  (état superfluide, sans viscosité) ;
- air à  $T = 298\text{ K}$  et  $P = 1\text{ bar}$  :  $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\text{ Pl}$  ;
- eau à  $T = 298\text{ K}$  et  $P = 1\text{ bar}$  :  $\eta = 1.0 \times 10^{-3}\text{ Pl}$  (à connaître) ;
- glycérine pure :  $\eta = 0.80\text{ Pl}$  ;

## III.2 Différents types de fluides

Pour une grande majorité de fluides, qualifiés de *fluides newtoniens*, l'expression précédente est valable et la viscosité ne dépend que de la température et de la pression.

Cependant, certains fluides qualifiés alors de *non newtoniens* ont un comportement plus complexe. Citons notamment :

- les fluides rhéofluidifiants dont la viscosité décroît si la vitesse de cisaillement augmente (ketchup, moutarde, sables mouvants, sang) ;
- les fluides rhéoépaississants dont la viscosité croît si la vitesse de cisaillement augmente (ciment liquide, suspension de maïzéna) ;
- les fluides pseudo-plastiques (et les fluides de Bingham) présentent un seuil de contrainte en deçà duquel le fluide ne s'écoule pas (utile pour les peintures qui doivent pouvoir s'étaler et ensuite ne plus couler spontanément). Par exemple : le dentifrice, la mayonnaise, les fluides électro- ou magnétorhéologiques.



## III.3 Équivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible

De même que pour les forces de pression, malgré la nature fondamentalement surfacique de la force de viscosité, on peut en donner un équivalent volumique.

### a Cas particulier : écoulement parallèle à une dimension

On s'intéresse à un écoulement parallèle à une dimension d'un fluide newtonien, comme l'écoulement de Couette plan :  $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$ .

Considérons à nouveau le système : particule de fluide cubique, de volume  $d\tau$ . Schéma.

La particule de fluide en  $z + dz$  exerce une force  $\delta\vec{F}_{t,+} = +\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z+dz} dS \vec{e}_x$  avec  $dS = dx dy$ .

La particule de fluide en  $z$  exerce une force  $\delta\vec{F}_{t,-} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_z dx dy \vec{e}_x$

Ainsi, la résultante des forces de viscosité sur la particule de fluide est :



$$\delta\vec{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dz dx dy \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} d\tau \vec{e}_x$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de viscosité :

$$\vec{f}_{v, \text{viscosité}} = \eta \frac{\partial^2 \vec{v}(z)}{\partial z^2}$$

### b Cas général : écoulement incompressible d'un fluide newtonien

On admet alors la généralisation à trois dimensions de l'équivalent volumique de la force de viscosité :

#### Densité volumique de force de viscosité

Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, la densité volumique de force de viscosité est :

$$\vec{f}_{v, \text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v}$$

où le laplacien est ici l'opérateur vectoriel.

### c Interprétation physique : un phénomène de diffusion

Dans le cadre de l'écoulement de Couette plan, nous montrerons (cf. chapitre MF3) que l'application du principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen conduit à :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \Delta v_x \iff \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v_x = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Cela correspond à une équation de diffusion, de coefficient de diffusion  $D = \frac{\eta}{\rho} = \nu$ , appelé *viscosité cinématique*. Ainsi le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion, correspondant physiquement à la diffusion de quantité de mouvement de proche en proche au sein des différentes couches de fluide en mouvement.

## IV Conditions aux limites

### IV.1 Conditions aux limites à une interface fluide/solide

#### a Cas d'un fluide visqueux

##### Condition d'adhérence

★ À l'interface entre un fluide et un solide, du fait de la viscosité, le fluide adhère à la paroi solide :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t)$$

en notant  $M$  un point de l'interface,  $M_f$  un point appartenant au fluide infiniment proche de  $M$ , et  $M_s$  un point appartenant au solide infiniment proche de  $M$  également.

## b Cas d'un fluide non visqueux

On étudiera également une modélisation simplifiée des fluides appelée la modélisation des fluides parfaits. Ces fluides parfaits s'écoulent sans aucune viscosité : il n'y a donc aucune adhérence du fluide aux parois solides. On dit que le fluide glisse sur la paroi.

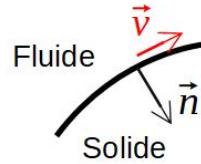
Il existe alors une autre condition aux limites, moins restrictive :

### Condition d'imperméabilité

Le fluide ne peut pas traverser la paroi solide :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t) \cdot \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  la normale à l'interface.



## IV.2 Conditions aux limites à une interface entre deux fluides non miscibles

### a Cas de deux fluides visqueux

#### Condition d'adhérence

A l'interface entre deux fluides non miscibles, du fait de la viscosité, les fluides adhèrent l'un à l'autre :

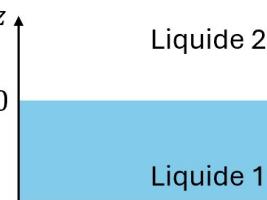
$$\vec{v}(M_1 \in \text{fluide 1}, t) = \vec{v}(M_2 \in \text{fluide 2}, t)$$

Dans le cas d'une interface entre deux fluides non miscibles, il existe une seconde condition limite. Nous allons ici prendre le cas simplifié d'une interface plane située en  $z = 0$ , mais les résultats se généralisent aisément au cas d'une interface non plane.

#### Conditions limites dynamiques

S'il n'y a pas de tension superficielle, alors il y a continuité des forces surfaciques à l'interface :

- continuité de la pression à l'interface (force surfacique normale) :  $P_1(z = 0) = P_2(z = 0)$
- continuité de la force surfacique tangentielle à l'interface :  
$$\eta_1 \frac{\partial v_{x,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\partial v_{x,2}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$
 et  
$$\eta_1 \frac{\partial v_{y,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\partial v_{y,2}}{\partial z} \Big|_{z=0}$$



### b Cas de deux fluides non visqueux

#### Condition d'imperméabilité

$$\vec{v}(M_1 \in \text{fluide 1}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_2 \in \text{fluide 2}, t) \cdot \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  la normale à l'interface.

Dans le cas d'une interface plane en  $z = 0$  :

#### Condition limite dynamique

Il y a continuité de la force surfacique normale :  $P_1(z = 0) = P_2(z = 0)$

### c Cas d'une interface liquide/air

Dans le cas d'une interface liquide/air, l'interface s'appelle une surface libre.

Comme la viscosité dynamique de l'air est bien plus faible que celle de la plupart des liquides, on considère souvent l'air comme un fluide non visqueux. Cela implique les conditions limites suivantes pour le fluide liquide :

#### Condition d'imperméabilité

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_a \in \text{air}, t) \cdot \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  la normale à l'interface.

Pour une interface plane en  $z = 0$  :

#### Conditions limites dynamiques

- continuité de la pression à l'interface (force surfacique normale) :  $P(z = 0) = P_0$  avec  $P_0$  la pression atmosphérique
- continuité de la force surfacique tangentielle à l'interface :  $\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$  et  
 $\eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$

## Exercices

### Ex. 1 Vol en ballon

Estimer le nombre de ballons d'hélium (et leur volume) pour soulever un homme.



---

### Correction de l'exercice 1

#### Appropriation :

Pourquoi l'homme décolle-t-il ? Parce que la masse volumique de l'hélium est plus faible que celle de l'air : la résultante de la poussée d'Archimète et du poids peut donc être dirigée vers le haut. (Même principe que la montgolfière.)

On se place à la situation limite du décollage : le passager est au sol, mais la réaction du support devient nulle. L'accélération du passager est nulle (elle est à la limite de devenir verticale ascendante). On est donc dans une situation statique : la poussée d'Archimète s'applique.

Quel système choisir ? Plusieurs choix sont possibles :

- Idée 1 : homme seul. Bilan des forces : poids, force des câbles sur l'homme. Mais la force des câbles est inconnue. Pour connaître cette force, il faut considérer un second système : ballons + câbles. Bilan des forces : poids, force de l'homme sur les câbles et poussée d'Archimète. Puis, il faut utiliser le principe des actions réciproques.

**Ce choix de systèmes rend la résolution longue, car on fait apparaître une force intermédiaire à déterminer : la force des câbles sur l'homme ou sa réciproque.**

- Idée 2 : homme + câbles + ballons. Bilan des forces : poids, poussée d'Archimète.

**Ce choix de système rend la résolution bien plus rapide, car la force des câbles sur l'homme devient une force interne au système, donc inutile dans les équations dynamiques.**

#### Stratégie :

1. Bilan des forces sur le système.
2. Détermination de la masse volumique de l'hélium et A.N.

#### Résolution :

1. Bilan des forces : poids sur l'homme, poids sur les ballons, poussée d'Archimète sur l'homme, poussée d'Archimète sur les ballons. On néglige la poussée d'Archimète sur l'homme devant le poids de l'homme ( $\rho_{\text{homme}} \simeq \rho_{\text{eau}} \gg \rho_{\text{air}}$ ) ou devant la poussée d'Archimète sur les ballons ( $V_{\text{homme}} \ll V_{\text{ballons}}$ ).

PFD en statique projeté sur  $\vec{e}_z$  vertical ascendant :

$$-mg + V_{\text{ballon}}g(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}) = 0 \Rightarrow V_{\text{ballon}} = \frac{m}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}}$$

2. **Masse volumique de l'hélium** : Comme pour tous les gaz, on utilise la relation des gaz parfaits pour

aboutir à :  $\rho_{He} = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{PM}{RT}$  avec  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $T = 300 \text{ K}$  et  $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  pour l'hélium (valeur à connaître, cf. tableau périodique). Donc :  $\rho_{He} = 0.16 \text{ kg m}^{-3}$ .

**Application numérique :** On prend  $m = 70 \text{ kg}$  et  $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ . On obtient :

$$V_{\text{ballons}} = 67 \text{ m}^3$$

Sur la photo, on estime  $R \sim 1 \text{ m}$ . Donc,  $N_{\text{ballons}} = 16$ .

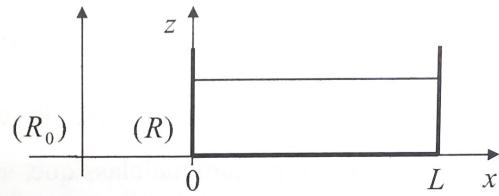
Si on prend un rayon de ballon plus faible :  $R \sim 50 \text{ cm}$ , on obtient  $N_{\text{ballons}} = 129$

**Validation :**

- Photo semble valider le résultat numérique obtenu (nombre de ballons entre les deux résultats déterminés).
- Si  $m$  augmente, le volume des ballons augmente. Le volume des ballons diminue si la différence des masses volumiques augmente : c'est bien la différence des masses volumiques qui est la cause du décollage.
- On confirme qu'on ne peut pas négliger le poids des ballons, sinon on obtiendrait  $V = \frac{m}{\rho_{\text{air}}}$  et on ferait une erreur relative de 20 % sur le résultat final...
- Bonus : Film Là-haut, pour la maison  $m \sim 10 \text{ t}$ , il faudrait  $V \sim 9.6 \times 10^3 \text{ m}^3$ . L'image du film (au moment du décollage) semble à peu près à l'échelle ! (Mais cela représenterait avec  $R = 1 \text{ m}$ , environ 18000 ballons, et il est sûr qu'il n'y a pas autant de ballons de représentés !)

## Ex. 2 Equilibre d'un fluide dans un récipient en translation

$(R_0)$  est le référentiel galiléen du laboratoire. Un récipient de longueur  $L$ , lié au référentiel  $(R)$ , contient de l'eau sur une hauteur  $z_0$  lorsqu'il est au repos.  $Oz$  est la verticale ascendante. La cavité possède dans  $(R_0)$  un mouvement de translation rectiligne d'accélération  $\vec{\gamma} = \gamma \vec{u}_x$  constante.

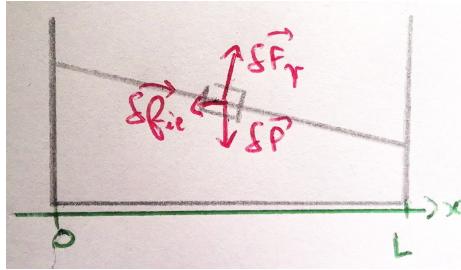


L'objectif de l'exercice est de déterminer le champ de pression  $P(x,z)$  dans tout le fluide, ainsi que l'équation de la surface libre  $z_s(x)$  en contact avec l'atmosphère de pression  $P_0$ . On suppose l'équilibre du fluide établi.

- On suppose  $\gamma > 0$ . Déterminer qualitativement la forme de la surface libre.
- En appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides, déterminer une équation reliant  $P(x,z)$ , la masse volumique  $\rho$  de l'eau, l'accélération de la pesanteur  $g$  et l'accélération  $\gamma$ . En déduire le champ de pression dans tout le fluide, en faisant intervenir une constante  $K$  que l'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.
- En déduire l'expression de la surface libre  $z_s(x)$  en fonction, entre autres, de la constante  $K$ .
- On cherche désormais à déterminer explicitement la constante  $K$ . En utilisant la situation au repos (accélération nulle du récipient dans le référentiel  $(R_0)$ ), exprimer la constante  $K$  et en déduire l'expression de la surface libre  $z_s(x)$  en fonction de  $z_0$ ,  $\gamma$ ,  $L$ ,  $g$  et  $x$ .
- On mesure la différence d'altitude maximale dans le fluide :  $z_{s,\text{max}} - z_{s,\text{min}} = \frac{L}{10}$ . En déduire la valeur numérique de  $\gamma$ .
- Pour finir, exprimer la pression  $P(x,z)$  en tout point du fluide, sans la constante  $K$ . Donner qualitativement la direction et le sens de la poussée d'Archimède sur un corps solide immergé dans le fluide.

### Correction de l'exercice 2

- Le fluide est à l'équilibre dans le référentiel  $(R)$  en translation par rapport au référentiel galiléen  $(R_0)$ . Considérons alors une particule de fluide à l'équilibre dans  $(R)$  au contact de la surface libre. Bilan des forces : le poids  $\delta \vec{P}$ , la force d'inertie d'entraînement  $\delta \vec{f}_{ie} = -(\delta m)\gamma \vec{e}_x$  et la résultante des forces de pression  $\delta \vec{F}_p$ .



Connaissant la direction de  $\vec{\delta F}_p$ , orthogonal à la surface libre, on en déduit la forme de la surface libre.

2. • Référentiel ( $R$ ) en translation par rapport à ( $R_0$ ) galiléen.

Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z - \rho \gamma \vec{e}_x = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \gamma \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

En intégrant une fois par rapport à  $x$  on aboutit à :  $P(x, z) = f(z) - \rho \gamma x$ . Puis avec l'équation portant sur  $z$ , on en déduit :

$$P(x, z) = K - \rho g z - \rho \gamma x$$

**Remarque :** On peut aussi de manière plus efficace ré-écrire l'équation vectorielle comme :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho g z + \rho \gamma x) = \vec{0}$$

menant au fait que la fonction  $P(x, z) + \rho g z + \rho \gamma x = K$  est une constante dans tout l'espace.

3. Au niveau de la surface libre, il y a continuité de la pression :  $P = P_0$ . Donc :

$$P_0 = K - \rho g z_s(x) - \rho \gamma x \Rightarrow z_s(x) = \frac{K - P_0}{\rho g} - \frac{\gamma}{g} x$$

La surface libre a donc l'allure d'une droite affine de pente  $-\frac{\gamma}{g}$  : cohérent avec la Q.1 et cohérent avec le fait que la surface est horizontale si  $\gamma = 0$ .

4. Par conservation du volume de fluide, on a :

$$V_{\text{repos}} = V_{\text{équilibre}} \Rightarrow z_0 L h = \int_{y=0}^h dy \int_{x=0}^L \left( \int_{z=0}^{z_s(x)} dz \right) dx$$

avec  $h$  la profondeur du récipient selon  $\vec{e}_y$ . Donc :

$$z_0 L = \int_{x=0}^L z_s(x) dx = \frac{K - P_0}{\rho g} L - \frac{\gamma}{2g} L^2 \Rightarrow K = P_0 + \frac{\gamma \rho}{2} L + z_0 \rho g$$

Ainsi :

$$z_s(x) = z_0 + \frac{\gamma L}{2g} - \frac{\gamma}{g} x$$

**Remarque :** Cela est intuitif avec un profil affine :  $z_0$  est l'altitude de la surface libre en  $x = L/2$ .

- 5.

$$z_{s,\max} - z_{s,\min} = \frac{\gamma}{g} L = \frac{L}{10} \Rightarrow \gamma = \frac{g}{10} = 0.98 \text{ m s}^{-2}$$

, ce qui est un ordre de grandeur réaliste de l'accélération d'un véhicule.

6. Avec la Q.2 :

$$P(x, z) = P_0 - \rho g(z - z_0) - \rho \gamma(x - L/2)$$

La pression augmente lorsque  $z$  diminue et lorsque  $x$  diminue. Ainsi, la résultante des forces de pression à l'équilibre, i.e. la poussée d'Archimède, est dirigée du bas à gauche vers le haut à droite (si  $\gamma > 0$ ).

### Ex. 3 (D'après écrit Mines PC 2025) Pression dans l'atmosphère non isotherme

Il s'agit d'un sujet Mines-Pont : les calculatrices sont donc interdites. Pour les applications numériques demandées, on se contentera de 2 chiffres significatifs.

Données numériques :

- Champ de pesanteur au sol :  $g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-2}$
- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
- Masse molaire moyenne de l'air :  $M_{air} = 29 \text{ g mol}^{-1}$
- Pression au sol :  $P_0 = 1.0 \text{ bar}$
- Rayon terrestre :  $R_T = 6400 \text{ km}$
- $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- $\left(\frac{210}{300}\right)^5 \simeq 0.15$

L'atmosphère sera décrite comme un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire moyenne  $M_{air}$ , en équilibre dans le champ de pesanteur. Dans un premier temps, l'étude sera limitée aux couches les plus basses (la troposphère) dans lesquelles la température décroît linéairement de sa valeur  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  au sol à la valeur minimale  $T_h = -64^\circ\text{C}$  à l'altitude maximale  $h = 14 \text{ km}$ .

1. On confond les champs de pesanteur et de gravitation terrestre et on admet pour la Terre une symétrie sphérique de répartition des masses. Montrer que l'intensité  $g$  du champ de pesanteur dans la troposphère varie de moins de 0,5% par rapport à sa valeur au sol.

Dans la suite on négligera les variations de  $g$  mais aussi la courbure de la Terre et le sol est le plan  $z = 0$  où l'axe ( $Oz$ ) est vertical ascendant.

La pression  $P(z)$ , la température  $T(z) = T_0(1 - \Gamma z)$  et la masse volumique  $\rho(z)$  ne dépendent que de  $z$ . Les paramètres  $T_0$  et  $\Gamma$  sont constants.

2. Montrer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0}$$

et exprimer les altitudes caractéristiques  $H_0$  et  $H_1$  en fonction de  $M_{air}$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $T_0$  et de  $\Gamma$  respectivement, puis calculer numériquement  $H_0$  et  $H_1$ .

3. Montrer que  $P(z) = P_0 (1 - z/H_1)^k$  et déterminer  $k$  puis la valeur numérique  $P(h)$  de la pression au sommet de la troposphère.

Dans la suite de cet exercice, on se propose de déterminer le champ de pression dans toute l'atmosphère, que l'on suppose encore être un gaz parfait, mais non isotherme. On procèdera cette fois avec une résolution numérique. Dans le cadre du modèle ISA (International Standard Atmosphere), l'atmosphère est divisée en différentes couches, au sein desquelles la température est supposée suivre une loi affine. La valeur du gradient vertical de température dans chacune de ces couches est normalisée.

Couche atmosphérique	Altitude de la base (en km)	Gradient thermique vertical (en K/km)
Troposphère	0	- 6.5
Tropopause	11	0
Stratosphère	20	+ 1.0
Stratosphère	32	+ 2.8
Stratopause	47	0
Mesosphère	51	- 2.8
Mesosphère	71	- 2.0
Mesopause	85	-

On doit donc résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dz}(z) = k_{ISA}(z) \\ \frac{dP}{dz}(z) = -\frac{M_{air} g}{RT(z)} \times P(z) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(z=0) = T_{sol} \\ P(z=0) = P_{sol} \end{cases}$$

On propose de conduire la résolution numérique au moyen de la fonction `odeint`, disponible dans le module `scipy.integrate`, et dont l'importation a déjà été réalisée. L'appel de la fonction `odeint` requiert les trois arguments suivants :

- la fonction définissant le système différentiel à résoudre, qui doit elle-même présenter impérativement deux arguments : le vecteur inconnu que l'on souhaite déterminer, suivi de la variable d'influence par rapport à laquelle on conduit l'intégration numérique du système. Cette fonction retourne le vecteur dérivée première.
- les conditions initiales/aux limites du problème, données sous forme d'une liste ou d'un tableau numpy à une dimension.
- le tableau numpy des valeurs de  $z$  pour lesquelles on cherche à obtenir une estimation numérique de la solution ; le premier élément de ce tableau doit impérativement correspondre à "l'endroit" où les conditions initiales/aux limites précédemment données s'appliquent.

La fonction `odeint` retourne alors la solution du système différentiel sous la forme d'un tableau numpy, dans lequel le nombre de lignes correspond au nombre de valeurs  $z$  et le nombre de colonne correspond au nombre de coordonnées du vecteur cherché.

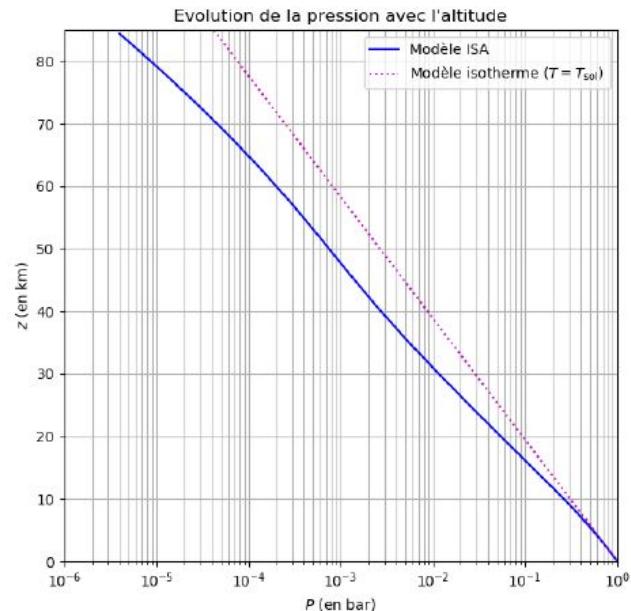
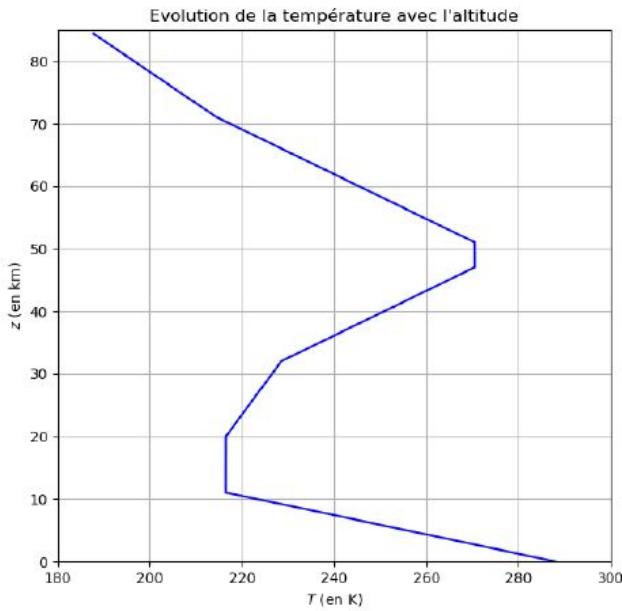
On donne un extrait du code Python déjà implémenté.

```

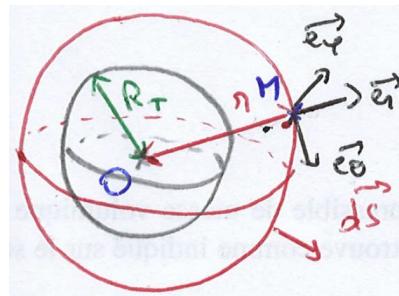
1 ## Definition des constantes du probleme
2 ## -----
3
4 g = 9.81
5 Mair = 29e-3
6 R = 8.314
7 Tsol = 288
8 Psol = 1.013e5
9
10 ## Definition du gradient thermique vertical selon le modele ISA
11 ## -----
12
13 def kISA(z):
14     """ z est l'altitude en metres. La fonction renvoie la valeur du gradient thermique
15     vertical a l'altitude z (en K/m). """
16     if 0 <= z < 11e3: return -6.5e-3
17     elif z < 20e3: return 0
18     elif z < 32e3: return 1.0e-3
19     elif z < 47e3: return 2.8e-3
20     elif z < 51e3: return 0
21     elif z < 71e3: return -2.8e-3
22     elif z < 85e3: return -2.0e-3
23     else: return None
24
25 ## Definition de l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles on cherche la solution
26 ## numerique approchee du systeme differentiel precedent
27
28 z = np.linspace(0, 85e3, 10000)      # on choisit 10000 points regulierement espaces entre 0
29                                         # et 85 km d'altitude

```

4. (a) Proposer des lignes de code permettant de calculer un tableau numpy à une dimension  $T$  et un tableau numpy à une dimension  $P$  solutions du système différentiel.
- (b) Commenter les graphiques des solutions numériques obtenues.



### Correction de l'exercice 3



- On cherche le champ gravitationnel créé par la Terre en un point  $M$  à l'extérieur de la Terre ( $M$  est situé dans la troposphère). Il s'agit d'un problème type champ électrostatique créé à l'extérieur d'une boule.
  - Coordonnées sphériques de centre  $O$ , le centre de la Terre. On cherche uniquement  $\vec{g}$  pour  $r \geq R_T$ .
  - Symétries : Les plans  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Donc,  $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$ .
  - Invariances par rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$  :  $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$
  - Surface de Gauss fermée et orientée : cf. schéma
  - Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{int} \Rightarrow g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_T \Rightarrow g(r) = -\frac{GM_T}{r^2}$$

avec  $M_T$  la masse de la Terre.  
Ainsi, la variation relative de  $g$  dans la troposphère est de :

$$V_R = \left| \frac{g(R_T) - g(R_T + h)}{g(R_T)} \right| = R_T^2 \left( \frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T + h)^2} \right) = 1 - \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2$$

A.N. : On calcule  $6.4^2 = 40.96$ , puis  $6.414^2 \simeq 41.14$ , donc  $\left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 = \frac{40.96}{41.14}$  et donc  $V_R = \frac{0.18}{41.14} \simeq 0.4\% < 0.5\%$

- Référentiel terrestre supposé galiléen  
 • Vu les simplifications de géométrie, on se place en coordonnées cartésiennes, d'axe ( $Oz$ ) vertical ascendant.  
 Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \rho(z)g = 0$$

car les fonctions ne dépendent que de  $z$  d'après l'énoncé.

Or, l'atmosphère étant supposé être un GP :

$$P(z)dt = dnRT \Rightarrow \rho(z) = \frac{\delta m}{dt} = \frac{P(z)M_{air}}{RT(z)}$$

Donc, la RFSF donne :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{M_{air}g}{RT(z)}P(z) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{M_{air}g}{RT_0(1-\Gamma z)}P(z) = 0$$

En séparant les variables, on aboutit à la solution fournie dans l'énoncé avec  $H_0 = \frac{RT_0}{M_{air}g}$  et  $H_1 = \frac{1}{\Gamma}$ .

A.N. : On calcule  $H_0 = \frac{2490}{284} \times 10^3 = 8.8 \text{ km.}$

A.N. :  $H_1 = \frac{1}{\Gamma} \text{ avec } -T_0\Gamma = \frac{T_b - T_0}{h}$ . Donc,  $H_1 = \frac{T_0h}{T_0 - T_b} = 46 \text{ km}$

3. On intègre l'équation aux variables séparées précédente :

$$\int_{P=P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = - \int_{z=0}^z \frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0} \Rightarrow \ln \left( \frac{P(z)}{P_0} \right) = \frac{H_1}{H_0} \ln \left( 1 - \frac{z}{H_1} \right) \Rightarrow P(z) = P_0 \left( 1 - \frac{z}{H_1} \right)^k$$

avec  $k = \frac{H_1}{H_0}$ .

A.N. :  $k = 5.2$ .

Pour  $P(h)$ , vu la donnée numérique  $(210/300)^5$  fournie, on comprend qu'il vaut mieux reformuler  $P(h)$  en faisant intervenir les températures. En effet, on a :

$$P(h) = P_0 \left(1 - \frac{h}{H_1}\right)^k = P_0 (1 - \Gamma h)^k = P_0 \left(\frac{T_h}{T_0}\right)^k$$

A.N. :  $P(h) \simeq 0.15$  bar

4. (a) On commence par définir la fonction utile pour  $odeint$ .

```

1             ## Definition du systeme differentiel a resoudre
2
3 def systDiff(TP,z):
4     """
5     TP designe le vecteur inconnu de dimension 2 (TP[0] : temperature ; TP[1] : pression
6     ) ;
7     z designe l'altitude.
8     La fonction renvoie un vecteur dont les composantes sont respectivement la derivee
9     de la temperature et la derivee de
10    la pression a l'altitude z.
11    """
12
13    # Lois prevues par le modele theorique
14    dT = kISA(z)                  # derivee verticale de la temperature
15    dP = - Mair*g/R*TP[1]/TP[0]    # derivee verticale de la pression
16
17    return [dT, dP]
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
279
280
281
282
283
284
285
286
287
287
288
289
289
290
291
292
293
294
295
296
297
297
298
299
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
589
590
591
592
593
594
595
596
597
597
598
599
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
689
690
691
692
693
694
695
696
697
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
788
789
789
790
791
792
793
794
795
796
796
797
798
799
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
888
889
889
890
891
892
893
894
895
896
896
897
898
899
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
979
980
981
982
983
984
985
986
986
987
987
988
989
989
990
991
992
993
994
995
995
996
997
998
999
999
1000
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1078
1079
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1086
1087
1087
1088
1088
1089
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1095
1096
1096
1097
1097
1098
1098
1099
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1128
1129
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1136
1137
1137
1138
1138
1139
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1145
1146
1146
1147
1147
1148
1148
1149
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1156
1157
1157
1158
1158
1159
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1165
1166
1166
1167
1167
1168
1168
1169
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1175
1176
1176
1177
1177
1178
1178
1179
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1185
1186
1186
1187
1187
1188
1188
1189
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1194
1195
1195
1196
1196
1197
1197
1198
1198
1199
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1205
1206
1206
1207
1207
1208
1208
1209
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1214
1215
1215
1216
1216
1217
1217
1218
1218
1219
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1224
1225
1225
1226
1226
1227
1227
1228
1228
1229
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1234
1235
1235
1236
1236
1237
1237
1238
1238
1239
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1244
1245
1245
1246
1246
1247
1247
1248
1248
1249
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1254
1255
1255
1256
1256
1257
1257
1258
1258
1259
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1264
1265
1265
1266
1266
1267
1267
1268
1268
1269
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1274
1275
1275
1276
1276
1277
1277
1278
1278
1279
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1284
1285
1285
1286
1286
1287
1287
1288
1288
1289
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1294
1295
1295
1296
1296
1297
1297
1298
1298
1299
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1304
1305
1305
1306
1306
1307
1307
1308
1308
1309
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1314
1315
1315
1316
1316
1317
1317
1318
1318
1319
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1324
1325
1325
1326
1326
1327
1327
1328
1328
1329
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1334
1335
1335
1336
1336
1337
1337
1338
1338
1339
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1344
1345
1345
1346
1346
1347
1347
1348
1348
1349
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1354
1355
1355
1356
1356
1357
1357
1358
1358
1359
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1364
1365
1365
1366
1366
1367
1367
1368
1368
1369
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1374
1375
1375
1376
1376
1377
1377
1378
1378
1379
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1384
1385
1385
1386
1386
1387
1387
1388
1388
1389
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1394
1395
1395
1396
1396
1397
1397
1398
1398
1399
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1404
1405
1405
1406
1406
1407
1407
1408
1408
1409
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1414
1415
1415
1416
1416
1417
1417
1418
1418
1419
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1424
1425
1425
1426
1426
1427
1427
1428
1428
1429
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1434
1435
1435
1436
1436
1437
1437
1438
1438
1439
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1444
1445
1445
1446
1446
1447
1447
1448
1448
1449
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1454
1455
1455
1456
1456
1457
1457
1458
1458
1459
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1464
1465
1465
1466
1466
1467
1467
1468
1468
1469
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1474
1475
1475
1476
1476
1477
1477
1478
1478
1479
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1484
1485
1485
1486
1486
1487
1487
1488
1488
1489
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1494
1495
1495
1496
1496
1497
1497
1498
1498
1499
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1504
1505
1505
1506
1506
1507
1507
1508
1508
1509
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1514
1515
1515
1516
1516
1517
1517
1518
1518
1519
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1524
1525
1525
1526
1526
1527
1527
1528
1528
1529
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1534
1535
1535
1536
1536
1537
1537
1538
1538
1539
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1544
1545
1545
1546
1546
1547
1547
1548
1548
1549
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1554
1555
1555
1556
1556
1557
1557
1558
1558
1559
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1564
1565
1565
1566
1566
1567
1567
1568
1568
1569
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1574
1575
1575
1576
1576
1577
1577
1578
1578
1579
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1584
1585
1585
1586
1586
1587
1587
1588
1588
1589
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1594
1595
1595
1596
1596
1597
1597
1598
1598
1599
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1604
1605
1605
1606
1606
1607
1607
1608
1608
1609
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1614
1615
1615
1616
1616
1617
1617
1618
1618
1619
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1624
1625
1625
1626
1626
1627
1627
1628
1628
1629
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1634
1635
1635
1636
1636
1637
1637
1638
1638
1639
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1644
1645
1645
1646
1646
1647
1647
1648
1648
1649
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1654
1655
1655
1656
1656
1657
1657
1658
1658
1659
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1664
1665
1665
1666
1666
1667
1667
1668
1668
1669
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1674
1675
1675
1676
1676
1677
1677
1678
1678
1679
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1684
1685
1685
1686
1686
1687
1687
1688
1688
1689
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1694
1695
1695
1696
1696
1697
1697
1698
1698
1699
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1704
1705
1705
1706
1706
1707
1707
1708
1708
1709
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1714
1715
1715
1716
1716
1717
1717
1718
1718
1719
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1724
1725
1725
1726
1726
1727
1727
1728
1728
1729
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1734
1735
1735
1736
1736
1737
1737
1738
1738
1739
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1744
1745
1745
1746
1746
1747
1747
1748
1748
1749
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1754
1755
1755
1756
1756
1757
1757
1758
1758
1759
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1764
1765
1765
1766
1766
1767
1767
1768
1768
1769
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1774
1775
1775
1776
1776
1777
1777
1778
1778
1779
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1784
1785
1785
1786
1786
1787
1787
1788
1788
1789
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1794
1795
1795
1796
1796
1797
1797
1798
1798
1799
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1804
1805
1805
1806
1806
1807
1807
1808
1808
1809
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1814
1815
1815
1816
1816
1817
1817
1818
1818
1819
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1824
1825
1825
1826
1826
1827
1827
1828
1828
1829
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1834
1835
1835
1836
1836
1837
1837
1838
1838
1839
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1844
1845
1845
1846
1846
1847
1847
1848
1848
1849
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1854
1855
1855
1856
1856
1857
1857
1858
1858
1859
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1864
1865
1865
1866
1866
1867
1867
1868
1868
1869
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1874
1875
1875
1876
1876
1877
1877
1878
1878
1879
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1884
1885
1885
1886
1886
1887
1887
1888
1888
1889
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1894
1895
1895
1896
1896
1897
1897
1898
1898
1899
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1904
1905
1905
1906
1906
1907
1907
1908
1908
1909
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1914
1915
1915
1916
1916
1917
1917
1918
1918
1919
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1924
1925
1925
1926
1926
1927
1927
1928
1928
1929
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1934
1935
1935
1936
1936
1937
1937
1938
1938
1939
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1944
1945
1945
1946
1946
1947
1947
1948
1948
1949
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1954
1955
1955
1956
1956
1957
1957
1958
1958
1959
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1964
1965
1965
1966
1966
1967
1967
1968
1968
1969
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1974
1975
1975
1976
1976
1977
1977
1978
1978
1979
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1984
1985
1985
1986
1986
1987
1987
1988
1988
1989
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1994
1995
1995
1996
1996
1997
1997
1998
1998
1999
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2004
2005
2005
2006
2006
2007
2007
2008
2008
2009
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2014
2015
2015
2016
2016
2017
2017
2018
2018
2019
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2024
2025
2025
2026
2026
2027
2027
2028
2028
2029
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2034
2035
2035
2036
2036

```

Puis, on définit les conditions aux limites :

```
1 ## Definition des conditions aux limites
2
3 CAL = [Tsol, Psol]
```

Il ne reste plus qu'à appeler `odeint`

```

1 TP = odeint(systDiff, CAL, z)
2 T = TP[:,0] # extraction des valeurs de la temperature
3 P = TP[:,1] # extraction des valeurs de la pression
4
5

```

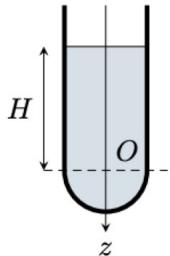
(b) Le graphique de la température avec l'altitude correspond directement au modèle ISA : rien à redire.

Sur le graphique de la pression, on peut réaliser plusieurs commentaires :

- le modèle isotherme correspond bien à une décroissance exponentielle de la pression avec l'altitude, ce qui se traduit par une droite dans un diagramme semi-log. On retrouve qu'au bout de 8.5 km, la pression a chuté de 63 % par rapport à sa valeur initiale (typique d'une décroissance exponentielle).

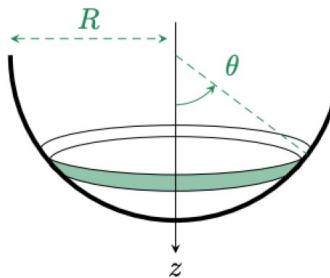
- sur les premiers km, il y a égalité des deux modèles. Cela est cohérent : la température est environ constante et égale à celle au sol.
- La température en altitude reste toujours inférieure à celle au sol. Dans la forme théorique, ceci devrait se traduire par un gradient de la pression qui est donc plus grand en valeur absolue que dans le cas isotherme. On retrouve effectivement une pression qui décroît plus rapidement avec l'altitude que dans le cas isotherme.
- Chaque changement de pente de  $T(z)$  se traduit par une cassure de la courbe de  $P(z)$  : cohérent.

## Ex. 4 (Oral banque PT) Force de pression sur un tube à essais



On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$ . On raisonne sur un axe vertical  $z$  descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

1. Calculer la pression  $P(z)$ .
2. Donner sans calcul la direction de la résultante des forces de pression subies par le tube.
3. Faire le calcul. Commenter.



Données :

- Aire d'une couronne sphérique élémentaire (ci-contre) :  $dS = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$ .
- Aides au calcul :
$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = -\frac{\cos(2\theta)}{4} + cte$$

$$\int \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = -\frac{\cos^3(\theta)}{3} + cte$$

### Correction de l'exercice 4

1.
    - Référentiel du laboratoire supposé galiléen
    - Repère cartésien avec un axe ( $Oz$ ) descendant, cf. schéma de l'énoncé
- RFSF :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Les projections selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  donnent que  $P(z)$ . La projection selon  $\vec{e}_z$  donne :

$$-\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \Rightarrow P(z) = \rho g z + \text{cste}$$

On détermine la constante avec la CL à la surface libre en  $z = -H$  :  $P(-H) = P_0$  avec  $P_0$  la pression atmosphérique. Ainsi :  $P(z) = P_0 + \rho g(z + H)$

2. Décomposons le tube à essais en deux sous-surfaces : la surface latérale cylindrique entre  $z = -H$  et  $z = 0$  et la surface sphérique entre  $z = 0$  et  $z = R$ .

Sur la portion cylindrique, par symétrie, les forces de pression se compensent et la résultante est nulle.

Sur la portion sphérique, par symétrie, la résultante des forces de pression est portée par l'axe ( $Oz$ ) :  $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ .

3.
  - Etant donné que seule la surface sphérique est utile pour le calcul de  $F_z$ , on passe en coordonnées sphériques de centre  $O$ .

A ce stade, il y a deux possibilités de rédaction. L'énoncé a tendance à nous faire privilégier la seconde méthode de rédaction.

- (a) Posons  $d\vec{S} = R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$ . En prenant en compte les forces de pression de l'air sur le tube et du liquide sur le tube, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} -P_0 d\vec{S} + \iint_{(S)} P(z) d\vec{S} = \iint_{(S)} \rho g(z + H) R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

La projection selon  $\vec{e}_z$  est donc :

$$F_z = \iint_{(S)} \rho g(z + H) R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\varphi$$

avec en coordonnées sphériques  $z = R \cos(\theta)$ . Donc :

$$F_z = \rho g R^2 \underbrace{\left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right)}_{=2\pi} \left( \int_{\theta=0}^{\pi/2} (R \cos(\theta) + H) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) = 2\pi R^2 \rho g \left( \frac{R}{3} + \frac{H}{2} \right)$$

- (b) Posons  $d\vec{S} = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta \vec{e}_r$  la surface élémentaire de la couronne sphérique. En prenant en compte les forces de pression de l'air sur le tube et du liquide sur le tube, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} -P_0 d\vec{S} + \iint_{(S)} P(z) d\vec{S} = \iint_{(S)} \rho g(z + H) dS \vec{e}_r$$

en utilisant l'uniformité de la pression sur la couronne sphérique. La projection selon  $\vec{e}_z$  est donc :

$$F_z = \int \rho g(z + H) 2\pi R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

avec en coordonnées sphériques  $z = R \cos(\theta)$ . Donc :

$$F_z = \rho g 2\pi R^2 \left( \int_{\theta=0}^{\pi/2} (R \cos(\theta) + H) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) = 2\pi R^2 \rho g \left( \frac{R}{3} + \frac{H}{2} \right)$$

Ainsi, on conclut

$$\vec{F} = \rho g \left( \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 H \right) \vec{e}_z$$

Cette force est bien dirigée selon  $+\vec{e}_z$  : cohérent. Cette force est égale au poids du fluide dans le tube à essais ! Ceci est attendu, étant donné que le fluide est statique (on peut par exemple appliquer le PFD au tube à essais + fluide et en déduire la force de l'opérateur sur le tube à essais, puis appliquer le PFD au tube à essais seul et en déduire la résultante des forces de pression). Cette force de pression est ici très faible (poids d'une cinquantaine de mL de liquide).

## Ex. 5 (Ecrit Mines PSI 2020) Lévitation acoustique

| Il s'agit d'un sujet Mines-Pont : les calculatrices sont donc interdites.

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport contrôlé de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une gouttelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience a priori ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques.

En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande stabilité donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

## I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface  $S = 10 \text{ cm}^2$ , est en vibration au voisinage de la hauteur  $h$  à la vitesse  $\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t) \hat{e}_z$  avec  $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il génère une onde sonore de fréquence  $f = 20 \text{ kHz}$  supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totalelement* réfléchie par une paroi fixe placée en  $z = 0$ .

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique  $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires; la température  $T_0$  étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de  $z$  soit  $P_0 = P_0(z)$ .

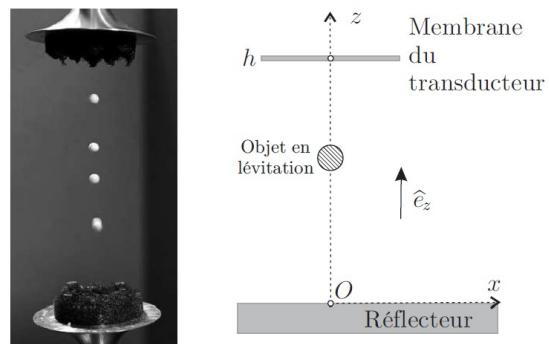


FIGURE 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité  $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) &= P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) &= \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) &= v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Une étude des ondes acoustiques montre que la surpression  $p_1$  s'écrit

$$p_1(z,t) = \frac{\mu_0 c U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde acoustique).

12. On considère une bille, de rayon  $a \ll \lambda$  et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle  $\langle \vec{F} \rangle$ . Le modèle proposé permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

On modifie la hauteur  $h$  de sorte à augmenter l'amplitude  $V_1$  de la vitesse associée à l'onde acoustique jusqu'à  $V_1 = 50 \text{ m s}^{-1}$ .

On pose maintenant :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ 13 — On admet que la surpression  $p_2(z,t)$  est de la forme

$$p_2(z,t) = \frac{1}{4} \mu_0^\ell V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z) \cos(2\omega t)$$

où  $f(z)$  est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression.

Déterminer les valeurs des entiers  $\ell$  et  $q$ . Déterminer la moyenne temporelle  $\langle F_z \rangle(z)$  de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.

□ 14 — Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique  $\mu_b$  de la bille reste inférieure à une valeur  $\mu_{b,\max}$  dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne  $\langle F_z \rangle(z)$ , discuter la stabilité des positions d'équilibre.

□ 15 — Calculer  $\mu_{b,\max}$  et proposer une estimation de la masse maximale  $m_{b,\max}$  d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.

□ 16 — Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare ? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de  $\lambda$  et  $h$ .

## Correction de l'exercice 5

12. Etant donné qu'on considère que la bille correspond à un système infinitésimal du point de vue de l'onde acoustique, la résultante des forces de pression s'écrit directement :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)\frac{4}{3}\pi a^3$$

On calcule

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}(P_0) + \overrightarrow{\text{grad}}(p_1)$$

Concernant  $P_0$  : On se place en l'absence d'onde sonore : l'air est alors statique.

- Référentiel terrestre supposé galiléen

La RFSF donne :  $-\overrightarrow{\text{grad}}(P_0) + \mu_0 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(P_0) = \mu_0 \vec{g} = -\mu_0 g \vec{e}_z$

Concernant  $p_1$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \vec{e}_z$$

Ainsi, finalement :

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 \left( g + \frac{\omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \right) \vec{e}_z$$

En moyenne :  $\langle \vec{F} \rangle = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 g \vec{e}_z$ , c'est-à-dire une résultante des forces de pression opposée au poids de l'air déplacé par la bille. Ce modèle ne permet pas de mettre en lévitation une bille de masse volumique différente de celle de l'air.

13. **Remarque :** On pousse l'étude à l'ordre 2, ce qui rend les EDP des ondes acoustiques non linéaires. Cela se voit très bien dans l'expression de  $p_2$  qui oscille à  $2\omega$ , alors que la membrane du haut-parleur bouge à  $\omega$ . On mène une analyse dimensionnelle.

$$[p_2] = \frac{M}{L \cdot T^2} ; \quad [\mu_0] = \frac{M}{L^3} ; \quad [V_1] = \frac{L}{T}$$

On en déduit que  $\ell = 1$  et  $q = 2$ .

Moyenne des forces de pression :

Le raisonnement est semblable à la Q. précédente. On calcule :  $\overrightarrow{\text{grad}}(p_2) = -\frac{1}{2}\mu_0 V_1^2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \vec{e}_z + \frac{df}{dz} \cos(2\omega t) \vec{e}_z$ . Ainsi, en moyenne :

$$\langle F_z \rangle = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 \left( g + \frac{V_1^2 \omega}{2c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \right)$$

14. • Référentiel terrestre galiléen

• Système : {Bille} de masse  $m_b = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_b$

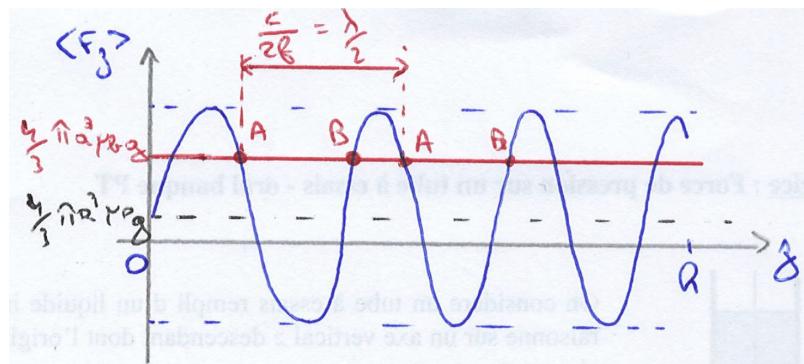
Les positions d'équilibre vérifient :

$$\langle F_z \rangle \vec{e}_z + m_b \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \mu_0 \left( g + \frac{V_1^2 \omega}{2c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \right) = \mu_b g$$

Au maximum,  $\sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) = 1$ . Donc,

$$\mu_{b,max} = \mu_0 \left( 1 + \frac{V_1^2 \omega}{2cg} \right) > \mu_0$$

Stabilité des positions d'équilibre



Position d'équilibre de type A : Perturbons l'état d'équilibre. Si la bille se décale vers les  $z$  croissants, alors  $\langle F_z \rangle$  diminue, et la résultante des forces de pression sur la bille est dirigée selon  $-\vec{e}_z$  : la bille redescend et revient à sa position d'équilibre. Ces positions d'équilibre sont stables.

Position d'équilibre de type B : Si la bille se décale vers les  $z$  croissants, la résultante des forces de pression augmente, et donc la résultante des forces de pression sur la bille est selon  $+\vec{e}_z$  : ces positions d'équilibre sont instables.

15. A.N. :  $\mu_{b,max} = 5.7 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$

Pour estimer la masse de la bille, il faut estimer son rayon  $a$ . On sait que  $a \ll \lambda$ . Or,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$ . A.N. :  $\lambda = 17 \text{ mm}$ . Prenons alors  $a = 1 \text{ mm}$ . On en déduit que :  $m_b = 0.24 \text{ g}$

Ces valeurs numériques sont faibles pour des matériaux solides (la masse volumique d'un métal est de l'ordre de  $10^6 \text{ kg m}^{-3}$ ) et les matériaux transportés ici doivent être nécessairement de rayon très petit ( $a < 1 \text{ mm}$ ). Néanmoins, ce calcul montre la possibilité d'application pour des matériaux peu denses et petits.

16. La distance minimale séparant deux objets lévitant est la distance entre deux positions d'équilibre stable consécutives, soit  $\frac{\lambda}{2}$ . Ainsi, sur la distance  $h$ , on peut faire léviter au maximum  $\frac{h}{\lambda/2} = \frac{2h}{\lambda}$  objets.

**Remarque :** Dans l'expérience réelle, plus on place d'objets, plus l'onde acoustique est perturbée (ce qu'on a ici négligé), et plus il est difficile de faire léviter de nouveaux objets.

## Ex. 6 Aplatissement de la Terre

Newton fut le premier à évaluer l'aplatissement de la Terre par rapport à une boule parfaite. Il a modélisé cet aplatissement en supposant que la Terre se comporte comme un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe ( $Oz$ ) des pôles (modèle valable pour des déformations de la Terre sur le temps long).

Cet exercice a pour but d'estimer l'aplatissement relatif de la Terre. Des données sont regroupées en fin d'énoncé.

1. Par un raisonnement qualitatif, déterminer si la Terre est aplatie au niveau des pôles ou au niveau de l'Équateur.

Pour déterminer quantitativement cet aplatissement, il nous faut commencer par exprimer les forces volumiques auxquelles sont soumises les particules de fluide.

2. Cette question porte sur le champ gravitationnel uniquement. En supposant, pour cette question seulement, que l'on peut approximer le champ gravitationnel créé par la Terre comme celui d'une boule moyenne de rayon  $R$  et de masse uniformément répartie en volume, exprimer le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre en fonction de la masse  $M$  de la Terre, de  $R$ , de  $\mathcal{G}$  et de la distance  $r$  au centre de la Terre.

Dans toute la suite, nous poserons la notation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ . On définit un système de coordonnées sphériques de centre  $O$ , le centre de la Terre, associé à un référentiel  $\mathcal{R}_T$  en rotation uniforme autour de l'axe ( $Oz$ ) des pôles à la vitesse  $\Omega$  par rapport au référentiel géocentrique. On suppose le référentiel géocentrique galiléen.

3. Justifier que le référentiel  $\mathcal{R}_T$  n'est pas galiléen.
4. Montrer que le champ de pression à l'intérieur de la Terre s'exprime par :

$$P(r, \theta) = \frac{\rho r^2}{2} (\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) + K$$

où  $K$  est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

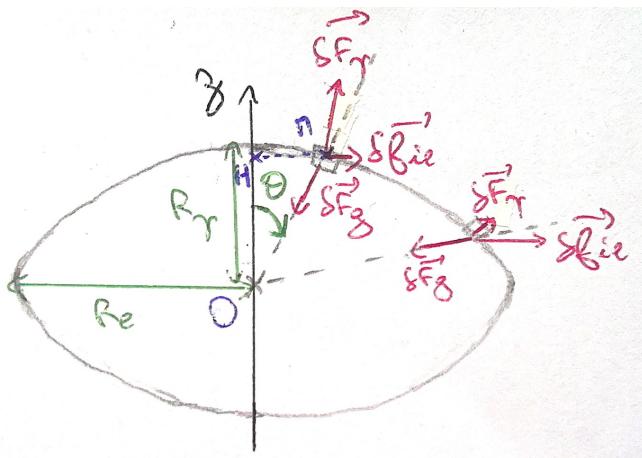
5. On s'intéresse désormais à la surface libre du fluide modélisant la Terre. On note  $R_p$  le rayon de la Terre aux pôles et  $R_e$  le rayon de la Terre à l'Équateur. Déterminer une relation reliant  $R_p$ ,  $R_e$ ,  $\Omega$  et  $\omega_0$ .
6. On suppose que l'aplatissement relatif de la Terre est petit devant 1, ce qui permet de supposer que  $R_e \simeq R$  et que  $|R_e - R_p| \ll R$ . Définir et déterminer l'expression de l'aplatissement relatif de la Terre. Réaliser l'application numérique.
7. La valeur de l'aplatissement relatif régulièrement utilisé en physique est de 0.3%. Commenter le résultat déterminé à la question précédente.

**Données :**

- Masse de la Terre :  $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon moyen de la Terre :  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$
- Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour des pôles :  $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
- Constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

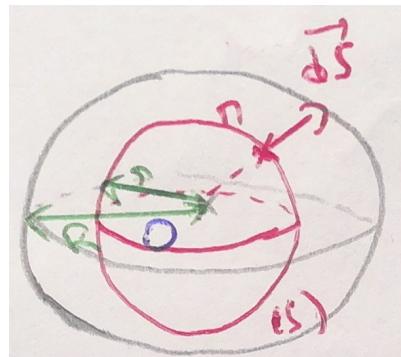
### Correction de l'exercice 6

1. On suppose que le fluide modélisant la Terre est en équilibre dans le référentiel terrestre. Raisonnons sur une particule de fluide au niveau de la surface libre. Bilan des forces : force gravitationnelle  $\delta\vec{F}_g$ , force d'inertie d'entraînement  $\delta\vec{f}_{ie}$  et résultante des forces de pression  $\delta\vec{F}_p$ .



Comme  $\vec{\delta f}_{ie}$  augmente en norme des pôles vers l'Equateur, on en déduit que la Terre est aplatie au niveau des pôles :  $R_p < R_e$ .

2. .



- Coordonnées sphériques de centre  $O$ , le centre de la Terre.
- Les plans  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Donc,  $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$
- Invariance de la distribution de masse par rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$  :  $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$ .
- Surface  $(S)$  de Gauss fermée et orientée : cf. schéma.
- Théorème de Gauss gravitationnel ( $r \leq R$ ) :

$$\iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{int}} = -4\pi G \times \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

pour  $r \leq R$  et avec  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$ . Donc :

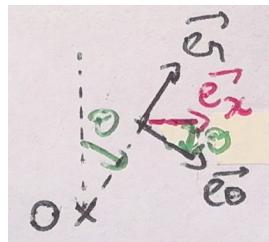
$$g(r) = -G \frac{M}{R^3} r \Rightarrow \vec{g}(r \leq R) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{e}_r = -\omega_0^2 r \vec{e}_r$$

3. Le référentiel  $\mathcal{R}_T$  n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique galiléen : le référentiel  $\mathcal{R}_T$  n'est donc pas galiléen.

4. • Référentiel  $\mathcal{R}_T$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen

La densité volumique de force gravitationnelle est donc  $\vec{f}_{v,g} = -\rho \omega_0^2 r \vec{e}_r$  et celle de force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 H M \vec{e}_x = \rho \Omega^2 (r \sin(\theta)) (\sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$



Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}}(P) + \vec{f}_{v,g} + \vec{f}_{v,ie} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \omega_0^2 r + \rho \Omega^2 \sin^2(\theta) r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho \Omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) r \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

On tire de la 3ème équation que  $P(r, \theta)$  (logique au vu de la symétrie du problème). En intégrant la première équation par rapport à  $r$ , on trouve :  $P(r, \theta) = \rho(\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) \frac{r^2}{2} + f(\theta)$  où  $f(\theta)$  est une fonction ne dépendant que de  $\theta$ . On détermine cette fonction  $f$  à l'aide de la 2ème équation :  $\frac{df}{d\theta} = 0$ . Donc,  $f(\theta) = K$  avec  $K$  une constante. On trouve donc le résultat donné dans l'énoncé.

5. Au niveau de la surface libre, la pression vaut  $P_0$  la pression atmosphérique. En exprimant les deux relations pour  $r = R_p$  ( $\theta = 0$ ) et  $r = R_e$  ( $\theta = \pi/2$ ) et en les soustrayant, on aboutit à :

$$R_e^2 \Omega^2 + \omega_0^2 (R_p^2 - R_e^2) = 0$$

6. On définit l'aplatissement relatif de la Terre par  $A = \frac{R_e - R_p}{R}$ . Avec les approximations proposées, on arrive à :

$$R^2 \Omega^2 + \omega_0^2 (R_p + R_e)(R_p - R_e) \simeq R^2 \Omega^2 + 2\omega_0^2 R(R_p - R_e) = 0 \Rightarrow A = \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2}$$

A.N. :  $A = 0.17\%$ . Ce résultat valide l'approximation effectuée ci-dessus en considérant que  $R_e - R_p \ll R$  (et donc également celle  $R_e \simeq R$ ).

7. On a donc déterminé un résultat très proche du résultat utilisé couramment (0.2% au lieu de 0.3%). L'erreur effectuée peut provenir de la modélisation du champ gravitationnel, qui suppose que la Terre est sphérique, alors qu'on démontre dans la suite qu'elle ne l'est pas... Il faudrait procéder par itérations successives en corrigeant la détermination du champ gravitationnel à l'aide de la forme non sphérique de la surface libre déterminée, et déterminer une forme plus précise de la surface libre, et ainsi de suite.