

Actions de contact dans un fluide

Sommaire

I	Forces volumiques et surfaciques dans un fluide	2
I.1	Les forces volumiques	2
I.2	Les forces de contact surfaciques	2
II	Forces de pression	3
II.1	Une force surfacique	3
II.2	Équivalent volumique de la force de pression	5
II.3	Statique des fluides	6
III	Forces de viscosité	9
III.1	Étude de l'écoulement de Couette plan	9
III.2	Différents types de fluides	11
III.3	Equivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible	11
IV	Conditions aux limites	12
IV.1	Conditions aux limites à une interface fluide/solide	12
IV.2	Conditions aux limites à une interface entre deux fluides non miscibles	13
	Exercices	15

Questions de cours

- Pression : définition, expression de la force de pression, démonstration de la force volumique de pression.
- Démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides, et l'appliquer à un liquide incompressible en présentant quelques applications.
- Démontrer l'expression du champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur. Interpréter physiquement en explicitant la signification du facteur de Boltzmann.
- Présenter l'écoulement de Couette plan. Interpréter physiquement la force de viscosité élémentaire $\delta \vec{F}_v = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$. Ogd de la viscosité dynamique de l'eau. Démontrer l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas de l'écoulement de Couette plan, puis donner la forme générale.



Il existe de nombreuses expériences montrant l'importance des forces de pression : un verre rempli d'eau avec une feuille à son sommet ne se vide pas lorsqu'on le retourne, un plongeur décomprime lorsqu'il plonge dans l'océan, la cabine d'un avion est sous-pressurisée lors d'un vol... Cette force de pression est une action de contact s'exerçant sur la surface d'un système. Ce chapitre a pour but de décrire l'origine et de déterminer les expressions des actions de contact s'exerçant dans un fluide.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Démontrer l'équation fondamentale de la statique des fluides et l'appliquer pour déterminer la pression dans un fluide incompressible, puis dans un gaz parfait isotherme, puis l'équation d'une surface libre.
2. Comprendre que l'origine des forces de viscosité est l'adhérence entre particules de fluides.
3. Déterminer l'équivalent volumique des forces de viscosité.

I Forces volumiques et surfaciques dans un fluide

Il existe deux types de forces extérieures s'exerçant sur un volume (\mathcal{V}) de fluide.

I.1 Les forces volumiques

Une force volumique est une force qui s'exerce sur tous les points du volume (\mathcal{V}). On la caractérise par une densité volumique de force $\vec{f}_v = \frac{\delta \vec{F}}{d\tau}$ où $\delta \vec{F}$ est la force élémentaire s'exerçant sur l'élément $d\tau$. La force totale est alors l'intégrale de la densité volumique de force :

$$\vec{F} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{f}_v d\tau \quad (\text{I.1})$$

Citons par exemple :

- le poids $\delta \vec{P} = \delta m \vec{g} = \rho d\tau \vec{g}$ (ρ : masse volumique) conduisant à $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$.
- la force de Lorentz $\delta \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (ρ_c : densité volumique de charges) conduisant à $\vec{f}_v = \rho_c (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$.

Dans un référentiel non galiléen, on doit prendre en compte des forces d'inertie, dont on peut aussi exprimer les équivalents volumiques.



- **Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen :**

Force volumique d'inertie d'entraînement : $\delta \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -\rho d\tau \vec{a}_e$ conduisant à $\vec{f}_{v,ie} = -\rho \vec{a}_e$ avec \vec{a}_e : accélération de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

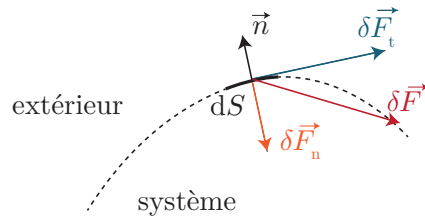
- **Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation autour d'un axe fixe d'un référentiel \mathcal{R} galiléen :**

- $\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

- Force volumique d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{v,c} = -2\rho \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$

I.2 Les forces de contact surfaciques

Considérons un élément de surface infinitésimal $d\vec{S} = dS \vec{n}$ autour de M , avec \vec{n} la normale en M à cette surface. La force élémentaire $\delta \vec{F}$ exercée sur la surface dS peut généralement se décomposer en une composante normale $\delta \vec{F}_n$ correspondant à une force de pression, et une composante tangentielle $\delta \vec{F}_t$ appelée force de cisaillement ou force de viscosité.



On peut ainsi définir une force surfacique, encore appelée contrainte, et exprimée en N m^{-2} ou en pascal :

$$\vec{\sigma} = \frac{\delta \vec{F}}{dS} = \frac{\delta \vec{F}_n}{dS} + \frac{\delta \vec{F}_t}{dS} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_t$$

On va étudier dans les deux prochaines parties ces deux types de contraintes, jouant un rôle essentiel dans l'écoulement des fluides.

Problème des forces surfaciques lors de l'application du PFD :

Dans la suite, on appliquera le PFD à une particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire galiléen. Or, on a :

$$m\vec{a} = (\rho d\tau) \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho d\tau) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right)$$

★ On ne peut pas exprimer ce terme en faisant intervenir une surface élémentaire. Donc, le PFD s'écrit :

$$\rho d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v d\tau + \vec{\sigma}_n dS + \vec{\sigma}_t dS$$

qui dépend à la fois de $d\tau$ et dS ... Pour se ramener à une équation universelle (ne dépendant pas de la forme de la particule de fluide), on va donc chercher un équivalent volumique de chacune des contraintes. (On simplifiera alors par $d\tau$.)

II Forces de pression

II.1 Une force surfacique

a Définition de la pression

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives (liées à l'agitation moléculaire et au principe d'exclusion de Pauli) et interactions attractives (Van der Waals par exemple). En un point M d'une surface délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par l'extérieur sur le système étudié s'écrit :

$$\delta \vec{F}_{\text{pression}} = \pm P(M) d\vec{S} = \pm P(M) dS \vec{n}$$

avec dS la surface élémentaire autour de M et \vec{n} le vecteur normal. Ainsi on identifie la pression à la contrainte normale, $\vec{\sigma}_n = \pm P(M) \vec{n}$. On choisit le signe avec le sens physique tel que la force soit dirigée vers le système.

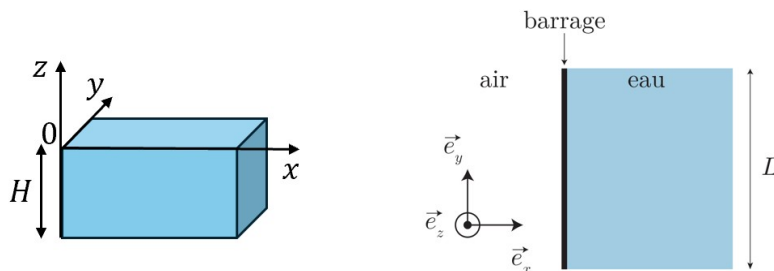
L'unité de la pression est le pascal (Pa), ou celle d'une force surfacique en N m^{-2} . On rencontre d'autres unités, dont une est à connaître : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

La force totale s'exerçant sur une surface S finie correspond alors à la somme des forces élémentaires :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \iint_{(S)} \delta \vec{F}_{\text{pression}} = \pm \iint_{(S)} P(M) dS \vec{n}$$

b Calcul de la résultante des forces de pression sur une surface

i) Force de pression sur une surface plane



Considérons un barrage plan de hauteur H et largeur L , soumis d'un côté aux forces de pression de l'air, et de l'autre à celles de l'eau. On se place en coordonnées cartésiennes, avec l'axe (Oz) ascendant (origine placé à la surface de l'eau). On précise qu'il règne dans l'eau une pression $P(z) = P_0 - \rho g z$, avec ρ la masse volumique de l'eau et $P_0 = 1$ bar la pression atmosphérique, et on supposera la pression de l'air uniforme, de valeur P_0 . Calculons la résultante \vec{F} des forces de pression sur le barrage.

Considérons un élément de surface $d\vec{S} = dydz\vec{e}_x$.

- $\vec{F}_{air \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$ (entre parenthèses : $\vec{F}_{air \rightarrow barrage} = P_0 H L \vec{e}_x$).

- $\vec{F}_{eau \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} -P(z) d\vec{S} = - \iint_{(S)} (P_0 - \rho g z) d\vec{S}$

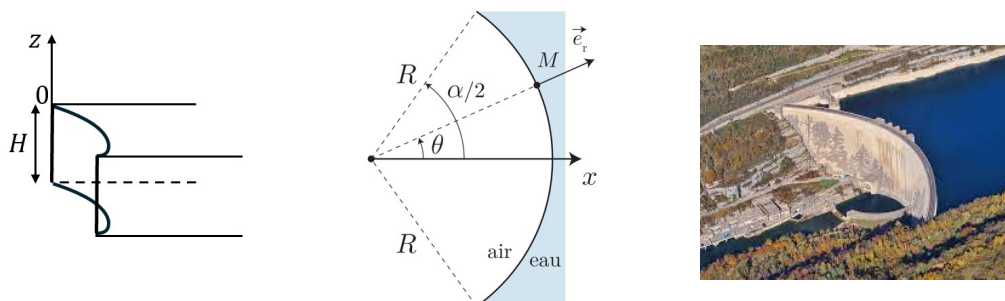
★ Donc, la résultante des forces sur le barrage s'écrit :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} \rho g z dy dz \vec{e}_x = \rho g \int_{y=0}^L dy \int_{z=-H}^0 z dz \vec{e}_x = -\rho g L \frac{H^2}{2} \vec{e}_x$$

On constate, et c'est souvent le cas, que seule la surpression dans l'eau $P(z) - P_0$ joue un rôle dans le calcul des forces de pression.

Remarque : Le point d'application de la résultante des forces de pression, appelé centre de poussée P , est tel que la somme des moments en P de toutes les forces élémentaires de pression est nul $\iint_{(S)} \vec{M}_P(\delta \vec{F}_{pression}) = \iint_{(S)} \vec{PM} \wedge (\pm P(M) d\vec{S}) = \vec{0}$. Pour le barrage plan précédent, on sait par symétrie que P se trouve en $y = L/2$; le calcul montre alors que P est à une hauteur $z = H/3$.

ii) Force de pression sur une surface non plane



On considère un barrage constitué par une portion de cylindre, de rayon R , d'angle α et de hauteur H . Il est soumis d'un côté aux forces de pression de l'air et de l'autre à celles de l'eau. On se place en coordonnées cylindriques, avec un axe (Oz) ascendant (O est sur la surface de l'eau). La pression de l'eau s'écrit alors toujours $P(z) = P_0 - \rho g h$. On cherche à déterminer la résultante \vec{F} des forces de pression sur le barrage.

On introduit $d\vec{S} = R d\theta dz \vec{e}_r$.

$$\bullet \vec{F}_{air \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$$

$$\bullet \vec{F}_{eau \rightarrow barrage} = \iint_{(S)} -P(z) d\vec{S}$$

Donc, la résultante s'écrit :

$$\star \quad \vec{F} = \iint_{(S)} \rho g z R d\theta dz \vec{e}_r$$



La direction de \vec{e}_r dépend du point M considéré. Il ne faut jamais calculer une intégrale avec un vecteur mobile.

Méthode pour calculer une force de pression sur une surface non plane :

1. On détermine la direction de la force par symétrie.
2. On ne calcule que la projection de la force sur la direction déterminée.

Par symétrie, on a $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$. On calcule donc :

$$\star \quad F_x = \iint_{(S)} \rho g z R \cos(\theta) d\theta dz$$

Tous calculs faits, on trouve :

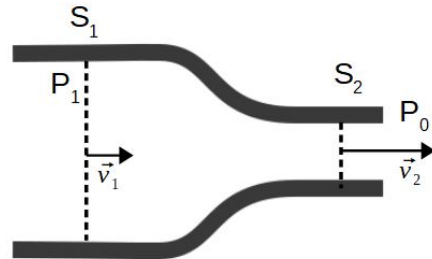
$$\vec{F} = -\rho g R H^2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_x$$

iii) Cas d'un champ de pression uniforme

Lorsque le champ de pression est uniforme (ce sera fréquemment le cas dans les gaz), $P(M) = P_0 = \text{cste}$, on peut assez simplement calculer la résultante des forces de pression sur une surface fermée. Si on considère par exemple un cube de côté a , les forces de pression vont s'opposer deux à deux pour chaque face, et la résultante des forces de pression sur le cube est nulle. Le résultat peut se généraliser :

$$\oiint_{(S)} P_0 d\vec{S} = \vec{0} \quad (\text{II.1})$$

Exemple : On considère une lance à incendie de pompier, placée dans l'air de pression uniforme P_0 . L'eau présente dans la lance passe par un rétrécissement du tuyau, passant de la surface S_1 à la surface S_2 . On cherche la résultante des forces de pression exercées par l'air sur la portion de tuyau entre S_1 et S_2 .



On étudie momentanément une situation fictive : on ferme le tuyau de part et d'autre et on le suppose entouré entièrement d'air. Schéma.

La surface étant fermée, on a (orienter \vec{e}_x vers la droite) :

$$\star \quad \oiint_{(S)} P_0 d\vec{S} = \vec{0} = \iint_{(S_{lat})} P_0 d\vec{S} + P_0 S_1 \vec{e}_x - P_0 S_2 \vec{e}_x \Rightarrow \iint_{(S_{lat})} P_0 d\vec{S} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$$

Dans la véritable situation, la résultante des forces de pression de l'air sur le tuyau est donc : $\vec{F}_{p,air \rightarrow tuyau} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$.

II.2 Équivalent volumique de la force de pression

Les forces de pression peuvent s'exprimer avec une force volumique équivalente. Pour la déterminer, considérons une particule de fluide $d\tau$, cubique de côtés dx , dy et dz en coordonnées cartésiennes.

Calcul de la résultante des forces de pression sur cette particule de fluide (schéma) :

$$\begin{aligned}
 \delta \vec{F} &= (P(x,y,z) - P(x+dx,y,z))dydz\vec{e}_x \\
 &+ (P(x,y,z) - P(x,y+dy,z))dxdz\vec{e}_y \\
 &+ (P(x,y,z) - P(x,y,z+dz))dxdy\vec{e}_z \\
 \star \quad &= - \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{e}_z \right) dxdydz = - \overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de pression :

$$\boxed{\vec{f}_{v, \text{ pression}} = - \overrightarrow{\text{grad}}(P)}$$

Cela s'interprète aisément : la résultante des forces de pression sur un petit élément est dirigée dans le sens opposé du gradient de pression, c'est-à-dire des zones de fortes pressions vers celles de faibles pressions.

II.3 Statique des fluides

a Relation fondamentale de la statique des fluides

On se place dans un référentiel galiléen dans lequel le fluide est à l'équilibre (c'est-à-dire que toutes les particules de fluide sont à l'équilibre : $\vec{v} = \vec{0}$). On suppose qu'en plus des forces de pression, le fluide est soumis à des forces dont la résultante est décrite par une densité volumique de force \vec{f}_v .

En appliquant le PFD à une particule de fluide à l'équilibre :

$$\vec{f}_{v, \text{ pression}}d\tau + \vec{f}_v(M)d\tau = \vec{0} \iff -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v(M) = \vec{0}$$

Relation fondamentale de la statique des fluides

Dans un référentiel galiléen, pour un fluide statique :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v(M) = \vec{0}$$

avec \vec{f}_v la résultante des densités volumiques de forces extérieures. Si le fluide est statique dans un référentiel non galiléen, il faut ajouter les densités volumiques des forces d'inertie.

La résolution de cette équation peut nous permettre de déterminer le champ de pression au sein d'un fluide en statique, ce qu'on illustre par les différents exemples qui suivent.

b Champ de pression dans un liquide incompressible soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Considérons le cas d'un liquide incompressible, de masse volumique constante et uniforme ρ , placé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. On suppose le fluide statique dans le référentiel terrestre.

- Référentiel terrestre galiléen
 - Repère cartésien (faire un schéma)
- La relation de la statique des fluides s'écrit :

$$-\vec{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z = \vec{0}$$

soit projetée selon les trois axes :

★

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z} &= 0 \implies P(y,z) \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z} &= 0 \implies P(z) \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{x,y} &= -\rho g \implies \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z} \end{aligned}$$

avec $P_0 = P(z = 0)$.

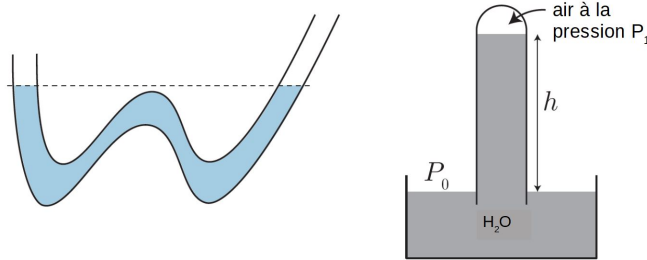


L'expression du champ de pression n'est valable que si l'axe vertical est orienté vers le haut, à l'opposé de \vec{g} . Si on inverse le sens de l'axe, on trouve $P(z) = P_0 + \rho g z$. De plus, il faut que l'origine de l'axe vertical soit placée de sorte que $P(z = 0) = P_0$.

On peut en conclure que la pression augmente avec la profondeur. On constate également que les surfaces de niveau isobares sont des plans horizontaux.

Ordre de grandeur à retenir : $\rho g \simeq 0.1 \text{ bar m}^{-1}$ pour l'eau liquide, c'est-à-dire une augmentation de pression de 1 bar tous les 10 m.

Quelques applications :



- deux points du même fluide situés à la même altitude ont la même pression. Les surfaces libres, soumises à la même pression atmosphérique P_0 ont donc la même altitude (principe des vases communicants), et sont horizontales ;
- Au niveau de la surface libre en contact avec l'atmosphère, la pression dans le fluide est P_0 . Donc, au sein du tube, la pression décroît avec l'altitude, jusqu'à une pression $P_1 = P_0 - \rho g h$ au sommet du tube.

c Champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Contrairement au cas des liquides, la masse volumique d'un gaz dépend de la pression. Donc, la relation : $P = P_0 - \rho g z$ est fausse !!! Supposons que l'on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait dont la température T_0 est constante (modèle de l'atmosphère isotherme).

Exercice : Déterminer l'expression de la pression dans l'atmosphère, dans le cadre du modèle isotherme. On supposera que l'air est statique dans le référentiel terrestre galiléen. On introduira une distance caractéristique H dont on donnera l'expression et dont on réalisera une application numérique.

- Référentiel terrestre galiléen
- Repère cartésien

$$\rho = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{n_{qm}M}{V} = \frac{MP}{RT_0}$$

En suivant le même calcul que précédemment, le système de trois équations devient (axe (Oz) orienté vers le haut) :

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{MP}{RT_0} g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P(z) = 0$$

★

en posant $H = \frac{RT_0}{Mg}$ une hauteur caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 1. La condition à la limite $P(z=0) = P_0$ conduit alors à

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

- la pression diminue exponentiellement avec l'altitude, avec une distance caractéristique H valant pour l'air ambiant ($M = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$) à la température $T_0 = 288 \text{ K}$, $H \simeq 8.4 \text{ km}$;
- on pourra considérer la pression constante à l'échelle de la centaine de mètres

Interprétation avec le facteur de Boltzmann :

Le terme exponentiel se met sous la forme $e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$ avec $m = \frac{M}{N_A}$. La densité volumique de particules $n = \frac{\delta N}{d\tau} = \frac{P}{k_B T_0} \propto e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$. Ce terme correspond à un *facteur de Boltzmann* qui traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle de pesanteur mgz , et l'agitation thermique, d'énergie $k_B T$, qui conduit les molécules de gaz à occuper tout l'espace.

d Poussée d'Archimède

Définition de la poussée d'Archimède

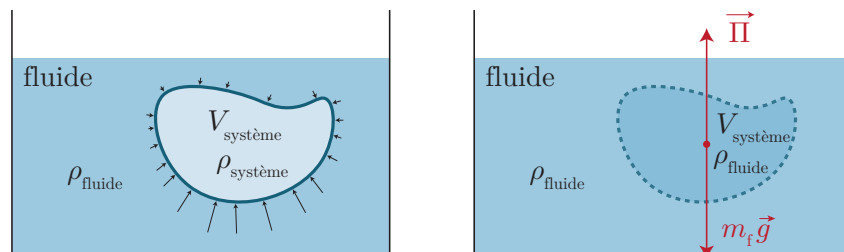
Dans un référentiel \mathcal{R} , la *poussée d'Archimède* est la *résultante des forces de pression* qui s'exerce sur un objet immobile dans \mathcal{R} , par le fluide au repos qui l'entoure.

★



Dans un exercice, ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède ET la résultante des forces de pression : c'est la même force qui a deux noms différents !!!

Considérons le cas d'un objet plongé dans un fluide, et entièrement entouré par du fluide. On se place dans un référentiel galiléen. Seuls les champs de pression et de pesanteur sont considérés ici.



En STATIQUE, le champ de pression dans le fluide entourant l'objet est identique que l'objet soit présent ou non. En effet, dans le fluide, on vérifie toujours : $\vec{0} = -\text{grad}(P) + \rho \vec{g}$ et on peut bien intégrer ceci entre la surface et tout le reste du fluide.

Donc, on peut considérer la situation fictive dans lequel l'objet est remplacé par le même volume de fluide $V_{\text{système}}$. En statique, on applique le PFD à ce volume de fluide :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0} \iff \vec{\Pi} = -m_f \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g}$$

Expression de la poussée d'Archimède

Un corps entièrement plongé dans un fluide au repos dans un référentiel galiléen subit une force verticale ascendante opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -m_f \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g}$$

avec m_f la masse de fluide déplacé, ρ_{fluide} la masse volumique du fluide (pas du système), et $V_{\text{système}}$ le volume occupé par le système.

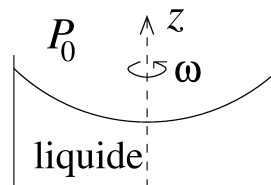


On ne peut appliquer la poussée d'Archimède qu'en statique, si le système a une surface fermée et s'il est entièrement entouré d'un ou de plusieurs fluides. Il n'est pas possible d'appliquer la poussée d'Archimède si le système est en contact avec une surface solide.

Remarque : La formule de la poussée d'Archimède est modifiée si l'étude est réalisée dans un référentiel non galiléen ou si d'autres forces extérieures que la force de pesanteur s'appliquent.

e Surface libre dans le cas d'un référentiel non galiléen

Considérons la situation concrète suivante. Un récipient cylindrique contenant un liquide de masse volumique ρ est en rotation autour de son axe de révolution (Oz) à la vitesse constante ω . On note la pression atmosphérique P_0 .



Deux référentiels doivent être distingués :

- le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide n'est pas statique.
- le référentiel \mathcal{R}' en rotation à la vitesse ω autour de l'axe fixe (Oz) de \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le fluide est statique, ce qui rend l'étude plus simple.



On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Dans \mathcal{R}' , la relation fondamentale de la statique des fluides donne :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \omega^2 \overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \omega^2 r \vec{e}_r = \vec{0}$$

On cherche alors l'équation de la surface libre.

Définition : Surface libre

Interface entre un fluide et l'air.

Dans le cas d'un fluide statique sans tension superficielle, il y a continuité de la pression à l'interface fluide/air. Donc, la pression dans le fluide vaut $P = P_0 = \text{cste}$ au niveau de la surface libre.

Ainsi, si on se déplace de $d\vec{r}$ sur la surface libre, on a $dP = 0$: $\overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot d\vec{r} = 0$. Donc :



$$\rho g dz = \rho \omega^2 r dr \Rightarrow z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{cste}$$

La surface libre forme une parabole.

III Forces de viscosité

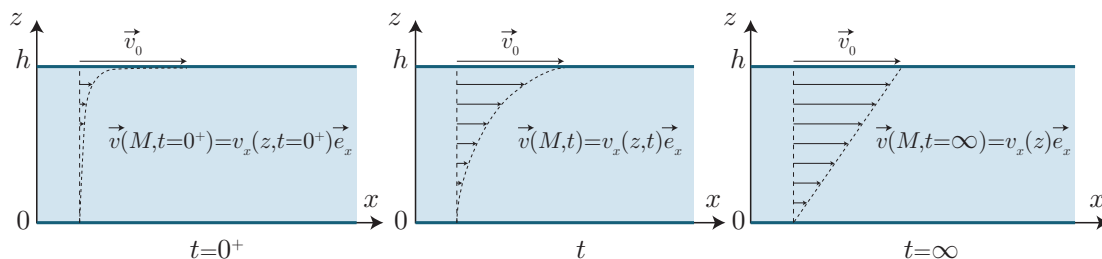
III.1 Étude de l'écoulement de Couette plan

En mécanique des fluides, on étudie principalement trois types d'écoulement de fluides :

- l'écoulement de Couette est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois ;
- l'écoulement de Poiseuille est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite ;
- l'écoulement gravitaire est un écoulement de fluide provoqué par la pesanteur.

On va s'appuyer dans ce chapitre sur un premier type d'écoulement, appelé écoulement de Couette plan. Un fluide s'écoule entre deux plans parallèles, celui en $z = 0$ est maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire, et celui en $z = h$ se translate horizontalement (à partir de $t = 0$) à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

a Observation du champ de vitesse

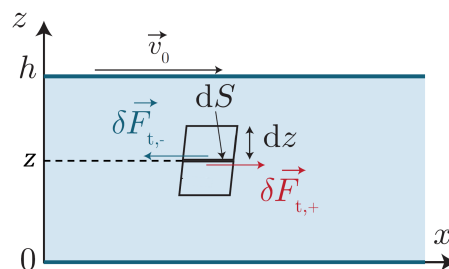


Lors de la mise en mouvement de la plaque, on observe un régime transitoire durant lequel les couches de fluide à son voisinage se mettent en mouvement, et transmettent de proche en proche de la quantité de mouvement à des couches de fluide plus éloignées. Au bout d'un certain temps, le profil de vitesse est linéaire.

L'écoulement de Couette plan est un exemple d'une famille d'écoulement appelée les **écoulements parallèles** ou **écoulements de cisaillement** : la vitesse dépend d'une coordonnée d'une direction transverse à la direction de l'écoulement.

b Expression de la force de viscosité

Considérons deux particules de fluide de surface dS horizontale et de hauteur dz l'une au-dessus de l'autre, l'interface étant à une altitude z . On exprime la force élémentaire exercée par la particule de fluide du dessus sur celle du dessous :



$$\delta \vec{F}_{t,+} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$$

où η est appelé *viscosité dynamique* du fluide.

- ★ Unité de η : $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, mais on utilise plus couramment une unité secondaire, le poiseuille (symbole $P\ell$), correspondant à des Pas.

Commentaires sur la force de viscosité :

- **Attention aux variables/vecteurs :**
L'origine de la force de viscosité est la différence de vitesse entre deux particules de fluide. Ici, la vitesse des particules de fluide ne varie que selon z : il est donc
- ★ logique de faire apparaître $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ et non pas $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ ou $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Par contre, la force est bien dirigée selon $\pm \vec{e}_x$ (sens du mouvement).

- plus la différence de vitesse entre les deux particules est importante, plus la force est importante ;
- la particule de fluide va être freinée ou accélérée par la couche du dessus, selon la
 - ★ vitesse relative des deux : si $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$, celle du dessus est plus rapide et la force est bien dirigée selon $+\vec{e}_x$ de sorte à l'accélérer, et *vice versa*
- plus la surface de contact est grande, plus la norme de la force est importante ;
- la force dépend du fluide choisi, caractérisé par le coefficient η .

La force exercée par la particule de fluide du dessous sur celle du dessus s'exprime par :

★

$$\delta \vec{F}_{t,-} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \quad (\text{III.1})$$

Quelques ordres de grandeur de la viscosité dynamique :

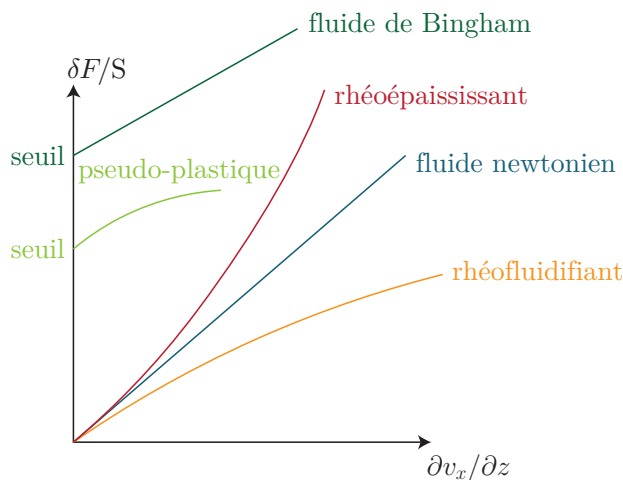
- l'hélium liquide à très basse température : $\eta = 0$ (état superfluide, sans viscosité) ;
- air à $T = 298 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pl}$;
- eau à $T = 298 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $\eta = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pl}$ (à connaître) ;
- glycérine pure : $\eta = 0.80 \text{ Pl}$;

III.2 Différents types de fluides

Pour une grande majorité de fluides, qualifiés de *fluides newtoniens*, l'expression précédente est valable et la viscosité ne dépend que de la température et de la pression.

Cependant, certains fluides qualifiés alors de *non newtoniens* ont un comportement plus complexe. Citons notamment :

- les fluides rhéofluidifiants dont la viscosité décroît si la vitesse de cisaillement augmente (ketchup, moutarde, sables mouvants, sang) ;
- les fluides rhéoépaississants dont la viscosité croît si la vitesse de cisaillement augmente (ciment liquide, suspension de maïzéna) ;
- les fluides pseudo-plastiques (et les fluides de Bingham) présentent un seuil de contrainte en deçà duquel le fluide ne s'écoule pas (utile pour les peintures qui doivent pouvoir s'étaler et ensuite ne plus couler spontanément). Par exemple : le dentifrice, la mayonnaise, les fluides électro- ou magnétorhéologiques.



III.3 Equivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible

De même que pour les forces de pression, malgré la nature fondamentalement surfacique de la force de viscosité, on peut en donner un équivalent volumique.

a Cas particulier : écoulement parallèle à une dimension

On s'intéresse à un écoulement parallèle à une dimension d'un fluide newtonien, comme l'écoulement de Couette plan : $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$.

Considérons à nouveau le système : particule de fluide cubique, de volume $d\tau$. Schéma.

La particule de fluide en $z + dz$ exerce une force $\delta\vec{F}_{t,+} = +\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z+dz} dS\vec{e}_x$ avec $dS = dxdy$.

La particule de fluide en z exerce une force $\delta\vec{F}_{t,-} = -\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_z dxdy\vec{e}_x$

★ Ainsi, la résultante des forces de viscosité sur la particule de fluide est :

$$\delta\vec{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dzdxdy\vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} d\tau\vec{e}_x$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de viscosité :

$$\vec{f}_{v,viscosité} = \eta \frac{\partial^2 \vec{v}(z)}{\partial z^2}$$

b Cas général : écoulement incompressible d'un fluide newtonien

On admet alors la généralisation à trois dimensions de l'équivalent volumique de la force de viscosité :

Densité volumique de force de viscosité

Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, la densité volumique de force de viscosité est :

$$\vec{f}_{v,viscosité} = \eta \Delta \vec{v}$$

où le laplacien est ici l'opérateur vectoriel.

c Interprétation physique : un phénomène de diffusion

Dans le cadre de l'écoulement de Couette plan, nous montrerons (cf. chapitre MF3) que l'application du principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen conduit à :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \Delta v_x \iff \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v_x = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Cela correspond à une équation de diffusion, de coefficient de diffusion $D = \frac{\eta}{\rho} = \nu$, appelé *viscosité cinématique*. Ainsi le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion, correspondant physiquement à la diffusion de quantité de mouvement de proche en proche au sein des différentes couches de fluide en mouvement.

IV Conditions aux limites

IV.1 Conditions aux limites à une interface fluide/solide

a Cas d'un fluide visqueux

Condition d'adhérence

★ À l'interface entre un fluide et un solide, du fait de la viscosité, le fluide adhère à la paroi solide :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t)$$

en notant M un point de l'interface, M_f un point appartenant au fluide infiniment proche de M , et M_s un point appartenant au solide infiniment proche de M également.

b Cas d'un fluide non visqueux

On étudiera également une modélisation simplifiée des fluides appelée la modélisation des fluides parfaits. Ces fluides parfaits s'écoulent sans aucune viscosité : il n'y a donc aucune adhérence du fluide aux parois solides. On dit que le fluide glisse sur la paroi.

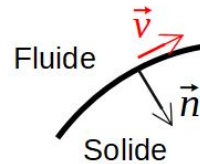
Il existe alors une autre condition aux limites, moins restrictive :

Condition d'imperméabilité

Le fluide ne peut pas traverser la paroi solide :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t) \cdot \vec{n}$$

avec \vec{n} la normale à l'interface.



IV.2 Conditions aux limites à une interface entre deux fluides non miscibles

a Cas de deux fluides visqueux

Condition d'adhérence

A l'interface entre deux fluides non miscibles, du fait de la viscosité, les fluides adhèrent l'un à l'autre :

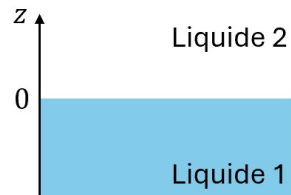
$$\vec{v}(M_1 \in \text{fluide 1}, t) = \vec{v}(M_2 \in \text{fluide 2}, t)$$

Dans le cas d'une interface entre deux fluides non miscibles, il existe une seconde condition limite. Nous allons ici prendre le cas simplifié d'une interface plane située en $z = 0$, mais les résultats se généralisent aisément au cas d'une interface non plane.

Conditions limites dynamiques

S'il n'y a pas de tension superficielle, alors il y a continuité des forces surfaciques à l'interface :

- continuité de la pression à l'interface (force surfacique normale) : $P_1(z = 0) = P_2(z = 0)$
- continuité de la force surfacique tangentielle à l'interface : $\eta_1 \frac{\partial v_{x,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\partial v_{x,2}}{\partial z} \Big|_{z=0}$ et $\eta_1 \frac{\partial v_{y,1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\partial v_{y,2}}{\partial z} \Big|_{z=0}$



b Cas de deux fluides non visqueux

Condition d'imperméabilité

$$\vec{v}(M_1 \in \text{fluide 1}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_2 \in \text{fluide 2}, t) \cdot \vec{n}$$

avec \vec{n} la normale à l'interface.

Dans le cas d'une interface plane en $z = 0$:

Condition limite dynamique

Il y a continuité de la force surfacique normale : $P_1(z = 0) = P_2(z = 0)$

c Cas d'une interface liquide/air

Dans le cas d'une interface liquide/air, l'interface s'appelle une surface libre.

Comme la viscosité dynamique de l'air est bien plus faible que celle de la plupart des liquides, on considère souvent l'air comme un fluide non visqueux. Cela implique les conditions limites suivantes pour le fluide liquide :

Condition d'imperméabilité

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}(M_a \in \text{air}, t) \cdot \vec{n}$$

avec \vec{n} la normale à l'interface.

Pour une interface plane en $z = 0$:

Conditions limites dynamiques

- continuité de la pression à l'interface (force surfacique normale) : $P(z = 0) = P_0$ avec P_0 la pression atmosphérique
- continuité de la force surfacique tangentielle à l'interface : $\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ et

$$\eta \left. \frac{\partial v_y}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

Exercices

Ex. 1 Vol en ballon

Estimer le nombre de ballons d'hélium (et leur volume) pour soulever un homme.



Correction de l'exercice 1

Appropriation :

Pourquoi l'homme décolle-t-il ? Parce que la masse volumique de l'hélium est plus faible que celle de l'air : la résultante de la poussée d'Archimède et du poids peut donc être dirigée vers le haut. (Même principe que la montgolfière.)

On se place à la situation limite du décollage : le passager est au sol, mais la réaction du support devient nulle. L'accélération du passager est nulle (elle est à la limite de devenir verticale ascendante). On est donc dans une situation statique : la poussée d'Archimède s'applique.

Quel système choisir ? Plusieurs choix sont possibles :

- Idée 1 : homme seul. Bilan des forces : poids, force des câbles sur l'homme. Mais la force des câbles est inconnue. Pour connaître cette force, il faut considérer un second système : ballons + câbles. Bilan des forces : poids, force de l'homme sur les câbles et poussée d'Archimède. Puis, il faut utiliser le principe des actions réciproques.
Ce choix de systèmes rend la résolution longue, car on fait apparaître une force intermédiaire à déterminer : la force des câbles sur l'homme ou sa réciproque.
- Idée 2 : homme + câbles + ballons. Bilan des forces : poids, poussée d'Archimède.
Ce choix de système rend la résolution bien plus rapide, car la force des câbles sur l'homme devient une force interne au système, donc inutile dans les équations dynamiques.

Stratégie :

1. Bilan des forces sur le système.
2. Détermination de la masse volumique de l'hélium et A.N.

Résolution :

1. Bilan des forces : poids sur l'homme, poids sur les ballons, poussée d'Archimède sur l'homme, poussée d'Archimède sur les ballons. On néglige la poussée d'Archimède sur l'homme devant le poids de l'homme ($\rho_{\text{homme}} \simeq \rho_{\text{eau}} \gg \rho_{\text{air}}$) ou devant la poussée d'Archimède sur les ballons ($V_{\text{homme}} \ll V_{\text{ballons}}$).
PFD en statique projeté sur \vec{e}_z vertical ascendant :

$$-mg + V_{\text{ballon}}g(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}) = 0 \Rightarrow V_{\text{ballon}} = \frac{m}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}}$$

2. **Masse volumique de l'hélium** : Comme pour tous les gaz, on utilise la relation des gaz parfaits pour

aboutir à : $\rho_{He} = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{PM}{RT}$ avec $P = 1 \text{ bar}$, $T = 300 \text{ K}$ et $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ pour l'hélium (valeur à connaître, cf. tableau périodique). Donc : $\rho_{He} = 0.16 \text{ kg m}^{-3}$.

Application numérique : On prend $m = 70 \text{ kg}$ et $\rho_{air} = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$. On obtient :

$$V_{ballons} = 67 \text{ m}^3$$

Sur la photo, on estime $R \sim 1 \text{ m}$. Donc, $N_{ballons} = 16$.

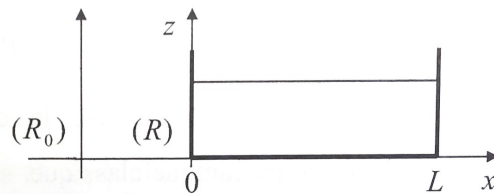
Si on prend un rayon de ballon plus faible : $R \sim 50 \text{ cm}$, on obtient $N_{ballons} = 129$

Validation :

- Photo semble valider le résultat numérique obtenu (nombre de ballons entre les deux résultats déterminés).
- Si m augmente, le volume des ballons augmente. Le volume des ballons diminue si la différence des masses volumiques augmente : c'est bien la différence des masses volumiques qui est la cause du décollage.
- On confirme qu'on ne peut pas négliger le poids des ballons, sinon on obtiendrait $V = \frac{m}{\rho_{air}}$ et on ferait une erreur relative de 20 % sur le résultat final...
- Bonus : Film Là-haut, pour la maison $m \sim 10 \text{ t}$, il faudrait $V \sim 9.6 \times 10^3 \text{ m}^3$. L'image du film (au moment du décollage) semble à peu près à l'échelle ! (Mais cela représenterait avec $R = 1 \text{ m}$, environ 18000 ballons, et il est sûr qu'il n'y a pas autant de ballons représentés !)

Ex. 2 Equilibre d'un fluide dans un récipient en translation

(R_0) est le référentiel galiléen du laboratoire. Un récipient de longueur L , lié au référentiel (R) , contient de l'eau sur une hauteur z_0 lorsqu'il est au repos. Oz est la verticale ascendante. La cavité possède dans (R_0) un mouvement de translation rectiligne d'accélération $\vec{\gamma} = \gamma \vec{u}_x$ constante.

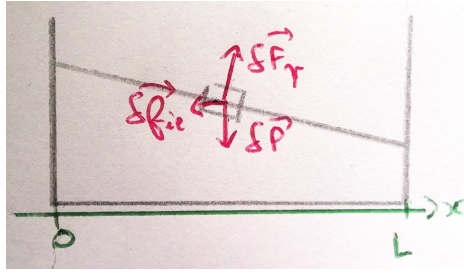


L'objectif de l'exercice est de déterminer le champ de pression $P(x, z)$ dans tout le fluide, ainsi que l'équation de la surface libre $z_s(x)$ en contact avec l'atmosphère de pression P_0 . On suppose l'équilibre du fluide établi.

1. On suppose $\gamma > 0$. Déterminer qualitativement la forme de la surface libre.
2. En appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides, déterminer une équation reliant $P(x, z)$, la masse volumique ρ de l'eau, l'accélération de la pesanteur g et l'accélération γ . En déduire le champ de pression dans tout le fluide, en faisant intervenir une constante K que l'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.
3. En déduire l'expression de la surface libre $z_s(x)$ en fonction, entre autres, de la constante K .
4. On cherche désormais à déterminer explicitement la constante K . En utilisant la situation au repos (accélération nulle du récipient dans le référentiel (R_0)), exprimer la constante K et en déduire l'expression de la surface libre $z_s(x)$ en fonction de z_0 , γ , L , g et x .
5. On mesure la différence d'altitude maximale dans le fluide : $z_{s, \max} - z_{s, \min} = \frac{L}{10}$. En déduire la valeur numérique de γ .
6. Pour finir, exprimer la pression $P(x, z)$ en tout point du fluide, sans la constante K . Donner qualitativement la direction et le sens de la poussée d'Archimède sur un corps solide immergé dans le fluide.

Correction de l'exercice 2

1. Le fluide est à l'équilibre dans le référentiel (R) en translation par rapport au référentiel galiléen (R_0) . Considérons alors une particule de fluide à l'équilibre dans (R) au contact de la surface libre. Bilan des forces : le poids $\delta \vec{P}$, la force d'inertie d'entraînement $\delta \vec{f}_{ie} = -(\delta m)\gamma \vec{e}_x$ et la résultante des forces de pression $\delta \vec{F}_p$.



Connaissant la direction de $\vec{\delta F}_p$, orthogonal à la surface libre, on en déduit la forme de la surface libre.

2. • Référentiel (R) en translation par rapport à (R_0) galiléen.

Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$-\vec{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z - \rho \gamma \vec{e}_x = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \gamma \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

En intégrant une fois par rapport à x on aboutit à : $P(x, z) = f(z) - \rho \gamma x$. Puis avec l'équation portant sur z , on en déduit :

$$P(x, z) = K - \rho g z - \rho \gamma x$$

Remarque : On peut aussi de manière plus efficace ré-écrire l'équation vectorielle comme :

$$-\vec{\text{grad}}(P + \rho g z + \rho \gamma x) = \vec{0}$$

menant au fait que la fonction $P(x, z) + \rho g z + \rho \gamma x = K$ est une constante dans tout l'espace.

3. Au niveau de la surface libre, il y a continuité de la pression : $P = P_0$. Donc :

$$P_0 = K - \rho g z_s(x) - \rho \gamma x \Rightarrow z_s(x) = \frac{K - P_0}{\rho g} - \frac{\gamma}{g} x$$

La surface libre a donc l'allure d'une droite affine de pente $-\frac{\gamma}{g}$: cohérent avec la Q.1 et cohérent avec le fait que la surface est horizontale si $\gamma = 0$.

4. Par conservation du volume de fluide, on a :

$$V_{\text{repos}} = V_{\text{équilibre}} \Rightarrow z_0 L h = \int_{y=0}^h dy \int_{x=0}^L \left(\int_{z=0}^{z_s(x)} dz \right) dx$$

avec h la profondeur du récipient selon \vec{e}_y . Donc :

$$z_0 L = \int_{x=0}^L z_s(x) dx = \frac{K - P_0}{\rho g} L - \frac{\gamma}{2g} L^2 \Rightarrow K = P_0 + \frac{\gamma \rho}{2} L + z_0 \rho g$$

Ainsi :

$$z_s(x) = z_0 + \frac{\gamma L}{2g} - \frac{\gamma}{g} x$$

Remarque : Cela est intuitif avec un profil affine : z_0 est l'altitude de la surface libre en $x = L/2$.

- 5.

$$z_{s,\max} - z_{s,\min} = \frac{\gamma}{g} L = \frac{L}{10} \Rightarrow \gamma = \frac{g}{10} = 0.98 \text{ m s}^{-2}$$

, ce qui est un ordre de grandeur réaliste de l'accélération d'un véhicule.

6. Avec la Q.2 :

$$P(x, z) = P_0 - \rho g(z - z_0) - \rho \gamma(x - L/2)$$

La pression augmente lorsque z diminue et lorsque x diminue. Ainsi, la résultante des forces de pression à l'équilibre, i.e. la poussée d'Archimède, est dirigée du bas à gauche vers le haut à droite (si $\gamma > 0$).

Ex. 3 (D'après écrit Mines PC 2025) Pression dans l'atmosphère non isotherme

Il s'agit d'un sujet Mines-Pont : les calculatrices sont donc interdites. Pour les applications numériques demandées, on se contentera de 2 chiffres significatifs.

Données numériques :

- Champ de pesanteur au sol : $g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-2}$
- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
- Masse molaire moyenne de l'air : $M_{air} = 29 \text{ g mol}^{-1}$
- Pression au sol : $P_0 = 1.0 \text{ bar}$
- Rayon terrestre : $R_T = 6400 \text{ km}$
- $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- $\left(\frac{210}{300}\right)^5 \simeq 0.15$

L'atmosphère sera décrite comme un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire moyenne M_{air} , en équilibre dans le champ de pesanteur. Dans un premier temps, l'étude sera limitée aux couches les plus basses (la troposphère) dans lesquelles la température décroît linéairement de sa valeur $T_0 = 27^\circ\text{C}$ au sol à la valeur minimale $T_h = -64^\circ\text{C}$ à l'altitude maximale $h = 14 \text{ km}$.

1. On confond les champs de pesanteur et de gravitation terrestre et on admet pour la Terre une symétrie sphérique de répartition des masses. Montrer que l'intensité g du champ de pesanteur dans la troposphère varie de moins de 0,5% par rapport à sa valeur au sol.

Dans la suite on négligera les variations de g mais aussi la courbure de la Terre et le sol est le plan $z = 0$ où l'axe (Oz) est vertical ascendant.

La pression $P(z)$, la température $T(z) = T_0(1 - \Gamma z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ ne dépendent que de z . Les paramètres T_0 et Γ sont constants.

2. Montrer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0}$$

et exprimer les altitudes caractéristiques H_0 et H_1 en fonction de M_{air} , g , R , T_0 et de Γ respectivement, puis calculer numériquement H_0 et H_1 .

3. Montrer que $P(z) = P_0(1 - z/H_1)^k$ et déterminer k puis la valeur numérique $P(h)$ de la pression au sommet de la troposphère.

Dans la suite de cet exercice, on se propose de déterminer le champ de pression dans toute l'atmosphère, que l'on suppose encore être un gaz parfait, mais non isotherme. On procèdera cette fois avec une résolution numérique. Dans le cadre du modèle ISA (International Standard Atmosphere), l'atmosphère est divisée en différentes couches, au sein desquelles la température est supposée suivre une loi affine. La valeur du gradient vertical de température dans chacune de ces couches est normalisée.

Couche atmosphérique	Altitude de la base (en km)	Gradient thermique vertical (en K/km)
Troposphère	0	- 6.5
Tropopause	11	0
Stratosphère	20	+ 1.0
Stratosphère	32	+ 2.8
Stratopause	47	0
Mesosphère	51	- 2.8
Mesosphère	71	- 2.0
Mesopause	85	-

On doit donc résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dz}(z) = k_{ISA}(z) \\ \frac{dP}{dz}(z) = -\frac{M_{\text{air}} g}{RT(z)} \times P(z) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T(z=0) = T_{\text{sol}} \\ P(z=0) = P_{\text{sol}} \end{cases}$$

On propose de conduire la résolution numérique au moyen de la fonction `odeint`, disponible dans le module `scipy.integrate`, et dont l'importation a déjà été réalisée. L'appel de la fonction `odeint` requiert les trois arguments suivants :

- la fonction définissant le système différentiel à résoudre, qui doit elle-même présenter impérativement deux arguments : le vecteur inconnu que l'on souhaite déterminer, suivi de la variable d'influence par rapport à laquelle on conduit l'intégration numérique du système. Cette fonction retourne le vecteur dérivée première.
- les conditions initiales/aux limites du problème, données sous forme d'une liste ou d'un tableau numpy à une dimension.
- le tableau numpy des valeurs de z pour lesquelles on cherche à obtenir une estimation numérique de la solution ; le premier élément de ce tableau doit impérativement correspondre à "l'endroit" où les conditions initiales/aux limites précédemment données s'appliquent.

La fonction `odeint` retourne alors la solution du système différentiel sous la forme d'un tableau numpy, dans lequel le nombre de lignes correspond au nombre de valeurs z et le nombre de colonne correspond au nombre de coordonnées du vecteur cherché.

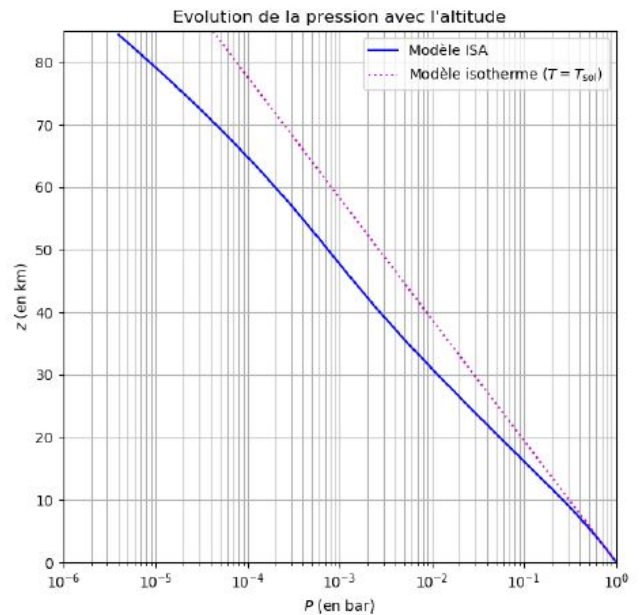
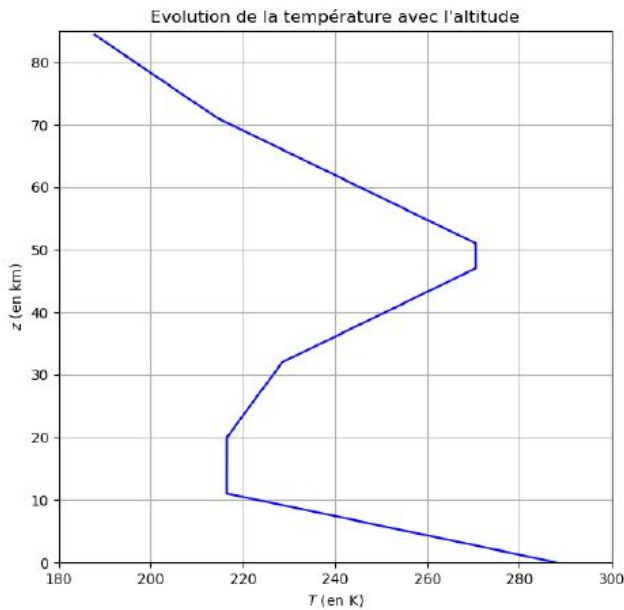
On donne un extrait du code Python déjà implémenté.

```

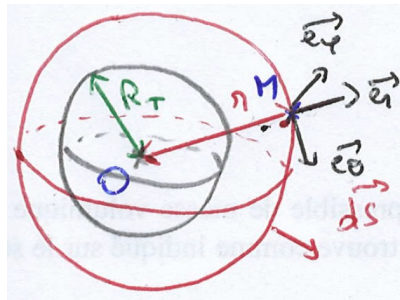
1  ## Definition des constantes du probleme
2  ## -----
3
4  g = 9.81                                # acceleration de la pesanteur (en m/s^2)
5  Mair = 29e-3                            # masse molaire de l'air (en kg/mol)
6  R = 8.314                              # constante du gaz parfait (en J/K/mol)
7  Tsol = 288                             # temperature de l'atmosphere au niveau du sol (en K)
8  Psol = 1.013e5                          # pression de l'atmosphere au niveau du sol (en Pa)
9
10 ## Definition du gradient thermique vertical selon le modele ISA
11 ## -----
12
13 def kISA(z):
14     """ z est l'altitude en metres. La fonction renvoie la valeur du gradient thermique
15     vertical a l'altitude z (en K/m). """
16     if 0 <= z < 11e3: return -6.5e-3
17     elif z < 20e3: return 0
18     elif z < 32e3: return 1.0e-3
19     elif z < 47e3: return 2.8e-3
20     elif z < 51e3: return 0
21     elif z < 71e3: return -2.8e-3
22     elif z < 85e3: return -2.0e-3
23     else: return None
24
25 ## Definition de l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles on cherche la solution
26 ## numerique approchée du systeme différentiel précédent
27
28 z = np.linspace(0, 85e3, 10000)         # on choisit 10000 points regulierement espaces entre 0
29                                         # et 85 km d'altitude

```

- Proposer des lignes de code permettant de calculer un tableau numpy à une dimension T et un tableau numpy à une dimension P solutions du système différentiel.
- Commenter les graphiques des solutions numériques obtenues.



Correction de l'exercice 3



1. On cherche le champ gravitationnel créé par la Terre en un point M à l'extérieur de la Terre (M est situé dans la troposphère). Il s'agit d'un problème type champ électrostatique créé à l'extérieur d'une boule.
 - (a) Coordonnées sphériques de centre O , le centre de la Terre. On cherche uniquement \vec{g} pour $r \geq R_T$.
 - (b) Symétries : Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Donc, $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$.
 - (c) Invariances par rotations d'angles θ et φ : $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$
 - (d) Surface de Gauss fermée et orientée : cf. schéma
 - (e) Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oiint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int} \Rightarrow g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M_T \Rightarrow g(r) = -\frac{GM_T}{r^2}$$

avec M_T la masse de la Terre.
Ainsi, la variation relative de g dans la troposphère est de :

$$V_R = \left| \frac{g(R_T) - g(R_T + h)}{g(R_T)} \right| = R_T^2 \left(\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T + h)^2} \right) = 1 - \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2$$

A.N. : On calcule $6.4^2 = 40.96$, puis $6,414^2 \simeq 41,14$, donc $\left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 = \frac{40,96}{41,14}$ et donc $V_R = \frac{0,18}{41,14} \simeq 0,4\% < 0,5\%$

2.
 - Référentiel terrestre supposé galiléen
 - Vu les simplifications de géométrie, on se place en coordonnées cartésiennes, d'axe (Oz) vertical ascendant.
 Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \rho(z)g = 0$$

car les fonctions ne dépendent que de z d'après l'énoncé.
Or, l'atmosphère étant supposé être un GP :

$$P(z)d\tau = dnRT \Rightarrow \rho(z) = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{P(z)M_{air}}{RT(z)}$$

Donc, la RFSF donne :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{M_{air}g}{RT(z)}P(z) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{M_{air}g}{RT_0(1-\Gamma z)}P(z) = 0$$

En séparant les variables, on aboutit à la solution fournie dans l'énoncé avec $H_0 = \frac{RT_0}{M_{air}g}$ et $H_1 = \frac{1}{\Gamma}$.

A.N. : On calcule $H_0 = \frac{2490}{284} \times 10^3 = 8.8 \text{ km}$.

A.N. : $H_1 = \frac{1}{\Gamma}$ avec $-T_0\Gamma = \frac{T_h - T_0}{h}$. Donc, $H_1 = \frac{T_0 h}{T_0 - T_h} = 46 \text{ km}$

3. On intègre l'équation aux variables séparées précédente :

$$\int_{P=P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = - \int_{z=0}^z \frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{H_1}{H_0} \ln\left(1 - \frac{z}{H_1}\right) \Rightarrow P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^k$$

avec $k = \frac{H_1}{H_0}$.

A.N. : $k = 5.2$.

Pour $P(h)$, vu la donnée numérique $(210/300)^5$ fournie, on comprend qu'il vaut mieux reformuler $P(h)$ en faisant intervenir les températures. En effet, on a :

$$P(h) = P_0 \left(1 - \frac{h}{H_1}\right)^k = P_0 (1 - \Gamma h)^k = P_0 \left(\frac{T_h}{T_0}\right)^k$$

A.N. : $P(h) \simeq 0.15 \text{ bar}$

4. (a) On commence par définir la fonction utile pour odeint.

```
1      ## Definition du systeme differentiel a resoudre
2
3  def systDiff(TP,z):
4      """
5      TP designe le vecteur inconnu de dimension 2 (TP[0] : temperature ; TP[1] : pression
6      ) ;
7      z designe l'altitude.
8      La fonction renvoie un vecteur dont les composantes sont respectivement la derivee
9      de la temperature et la derivee de
10     la pression a l'altitude z.
11     """
12     # Lois prevues par le modele theorique
13     dT = kISA(z)          # derivee verticale de la temperature
14     dP = - Mair*g/R*TP[1]/TP[0]    # derivee verticale de la pression
15
16     return [dT, dP]
```

Puis, on définit les conditions aux limites :

```
1  ## Definition des conditions aux limites
2
3  CAL = [Tsol, Psol]
```

Il ne reste plus qu'à appeler odeint.

```
1  TP = odeint(systDiff, CAL, z)
2  T = TP[:,0]          # extraction des valeurs de la temperature
3  P = TP[:,1]          # extraction des valeurs de la pression
4
5
```

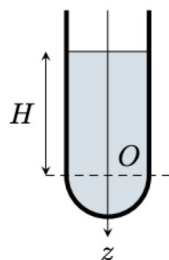
(b) Le graphique de la température avec l'altitude correspond directement au modèle ISA : rien à redire.

Sur le graphique de la pression, on peut réaliser plusieurs commentaires :

- le modèle isotherme correspond bien à une décroissance exponentielle de la pression avec l'altitude, ce qui se traduit par une droite dans un diagramme semi-log. On retrouve qu'au bout de 8.5 km, la pression a chuté de 63 % par rapport à sa valeur initiale (typique d'une décroissance exponentielle).

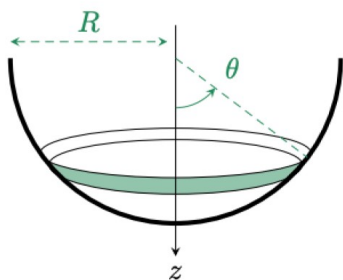
- sur les premiers km, il y a égalité des deux modèles. Cela est cohérent : la température est environ constante et égale à celle au sol.
- La température en altitude reste toujours inférieure à celle au sol. Dans la forme théorique, ceci devrait se traduire par un gradient de la pression qui est donc plus grand en valeur absolue que dans le cas isotherme. On retrouve effectivement une pression qui décroît plus rapidement avec l'altitude que dans le cas isotherme.
- Chaque changement de pente de $T(z)$ se traduit par une cassure de la courbe de $P(z)$: cohérent.

Ex. 4 (Oral banque PT) Force de pression sur un tube à essais



On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique ρ . On raisonne sur un axe vertical z descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

1. Calculer la pression $P(z)$.
2. Donner sans calcul la direction de la résultante des forces de pression subies par le tube.
3. Faire le calcul. Commenter.



Données :

- Aire d'une couronne sphérique élémentaire (ci-contre) : $dS = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$.
- Aides au calcul :

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = -\frac{\cos(2\theta)}{4} + cte$$

$$\int \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = -\frac{\cos^3(\theta)}{3} + cte$$

Correction de l'exercice 4

1. • Référentiel du laboratoire supposé galiléen
 • Repère cartésien avec un axe (Oz) descendant, cf. schéma de l'énoncé

RFSF :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Les projections selon \vec{e}_x et \vec{e}_y donnent que $P(z)$. La projection selon \vec{e}_z donne :

$$-\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \Rightarrow P(z) = \rho g z + cste$$

On détermine la constante avec la CL à la surface libre en $z = -H$: $P(-H) = P_0$ avec P_0 la pression atmosphérique. Ainsi : $P(z) = P_0 + \rho g(z + H)$

2. Décomposons le tube à essais en deux sous-surfaces : la surface latérale cylindrique entre $z = -H$ et $z = 0$ et la surface sphérique entre $z = 0$ et $z = R$.

Sur la portion cylindrique, par symétrie, les forces de pression se compensent et la résultante est nulle.

Sur la portion sphérique, par symétrie, la résultante des forces de pression est portée par l'axe (Oz) : $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$.

3. • Etant donné que seule la surface sphérique est utile pour le calcul de F_z , on passe en coordonnées sphériques de centre O .

A ce stade, il y a deux possibilités de rédaction. L'énoncé a tendance à nous faire privilégier la seconde méthode de rédaction.

- (a) Posons $d\vec{S} = R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$. En prenant en compte les forces de pression de l'air sur le tube et du liquide sur le tube, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} -P_0 d\vec{S} + \iint_{(S)} P(z) d\vec{S} = \iint_{(S)} \rho g(z + H) R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_z$$

La projection selon \vec{e}_z est donc :

$$F_z = \iint_{(S)} \rho g(z+H) R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\varphi$$

avec en coordonnées sphériques $z = R \cos(\theta)$. Donc :

$$F_z = \rho g R^2 \underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right)}_{=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} (R \cos(\theta) + H) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) = 2\pi R^2 \rho g \left(\frac{R}{3} + \frac{H}{2} \right)$$

- (b) Posons $\vec{dS} = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta \vec{e}_r$ la surface élémentaire de la couronne sphérique. En prenant en compte les forces de pression de l'air sur le tube et du liquide sur le tube, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} -P_0 \vec{dS} + \iint_{(S)} P(z) \vec{dS} = \iint \rho g(z+H) dS \vec{e}_r$$

en utilisant l'uniformité de la pression sur la couronne sphérique. La projection selon \vec{e}_z est donc :

$$F_z = \int \rho g(z+H) 2\pi R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

avec en coordonnées sphériques $z = R \cos(\theta)$. Donc :

$$F_z = \rho g 2\pi R^2 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} (R \cos(\theta) + H) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) = 2\pi R^2 \rho g \left(\frac{R}{3} + \frac{H}{2} \right)$$

Ainsi, on conclut

$$\vec{F} = \rho g \left(\frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 H \right) \vec{e}_z$$

Cette force est bien dirigée selon $+\vec{e}_z$: cohérent. Cette force est égale au poids du fluide dans le tube à essais ! Ceci est attendu, étant donné que le fluide est statique (on peut par exemple appliquer le PFD au tube à essais + fluide et en déduire la force de l'opérateur sur le tube à essais, puis appliquer le PFD au tube à essais seul et en déduire la résultante des forces de pression). Cette force de pression est ici très faible (poids d'une cinquantaine de mL de liquide).

Ex. 5 (Ecrit Mines PSI 2020) Lévitiation acoustique

| Il s'agit d'un sujet Mines-Pont : les calculatrices sont donc interdites.

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport contrôlé de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une gouttelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience a priori ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques.

En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande stabilité donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface $S = 10 \text{ cm}^2$, est en vibration au voisinage de la hauteur h à la vitesse $\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t) \hat{e}_z$ avec $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Il génère une onde sonore de fréquence $f = 20 \text{ kHz}$ supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totale*ment réfléchiée par une paroi fixe placée en $z = 0$.

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires ; la température T_0 étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de z soit $P_0 = P_0(z)$.

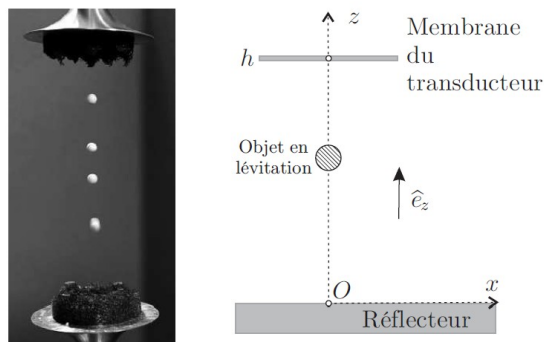


FIGURE 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) &= P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) &= \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) &= v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Une étude des ondes acoustiques montre que la surpression p_1 s'écrit

$$p_1(z,t) = \frac{\mu_0 c U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (λ est la longueur d'onde de l'onde acoustique).

12. On considère une bille, de rayon $a \ll \lambda$ et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante \vec{F} des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle$. Le modèle proposé permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

On modifie la hauteur h de sorte à augmenter l'amplitude V_1 de la vitesse associée à l'onde acoustique jusqu'à $V_1 = 50 \text{ m s}^{-1}$.

On pose maintenant :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ **13** — On admet que la surpression $p_2(z,t)$ est de la forme

$$p_2(z,t) = \frac{1}{4}\mu_0 V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z) \cos(2\omega t)$$

où $f(z)$ est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression.

Déterminer les valeurs des entiers ℓ et q . Déterminer la moyenne temporelle $\langle F_z \rangle(z)$ de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.

□ **14** — Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique μ_b de la bille reste inférieure à une valeur $\mu_{b,\max}$ dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne $\langle F_z \rangle(z)$, discuter la stabilité des positions d'équilibre.

□ **15** — Calculer $\mu_{b,\max}$ et proposer une estimation de la masse maximale $m_{b,\max}$ d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.

□ **16** — Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare ? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de λ et h .

Correction de l'exercice 5

12. Etant donné qu'on considère que la bille correspond à un système infinitésimal du point de vue de l'onde acoustique, la résultante des forces de pression s'écrit directement :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)\frac{4}{3}\pi a^3$$

On calcule

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}(P_0) + \overrightarrow{\text{grad}}(p_1)$$

Concernant P_0 : On se place en l'absence d'onde sonore : l'air est alors statique.

• Référentiel terrestre supposé galiléen

La RFSF donne : $-\overrightarrow{\text{grad}}(P_0) + \mu_0 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(P_0) = \mu_0 \vec{g} = -\mu_0 g \vec{e}_z$

Concernant p_1 :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \vec{e}_z$$

Ainsi, finalement :

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 \left(g + \frac{\omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \right) \vec{e}_z$$

En moyenne : $\langle \vec{F} \rangle = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 g \vec{e}_z$, c'est-à-dire une résultante des forces de pression opposée au poids de l'air déplacé par la bille. Ce modèle ne permet pas de mettre en lévitation une bille de masse volumique différente de celle de l'air.

13. **Remarque :** On pousse l'étude à l'ordre 2, ce qui rend les EDP des ondes acoustiques non linéaires. Cela se voit très bien dans l'expression de p_2 qui oscille à 2ω , alors que la membrane du haut-parleur bouge à ω . On mène une analyse dimensionnelle.

$$[p_2] = \frac{M}{L \cdot T^2} \quad ; \quad [\mu_0] = \frac{M}{L^3} \quad ; \quad [V_1] = \frac{L}{T}$$

On en déduit que $\ell = 1$ et $q = 2$.

Moyenne des forces de pression :

Le raisonnement est semblable à la Q. précédente. On calcule : $\overrightarrow{\text{grad}}(p_2) = -\frac{1}{2}\mu_0 V_1^2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \vec{e}_z + \frac{df}{dz} \cos(2\omega t) \vec{e}_z$. Ainsi, en moyenne :

$$\langle F_z \rangle = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_0 \left(g + \frac{V_1^2 \omega}{2c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \right)$$

14. • Référentiel terrestre galiléen

- Système : {Bille} de masse $m_b = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_b$

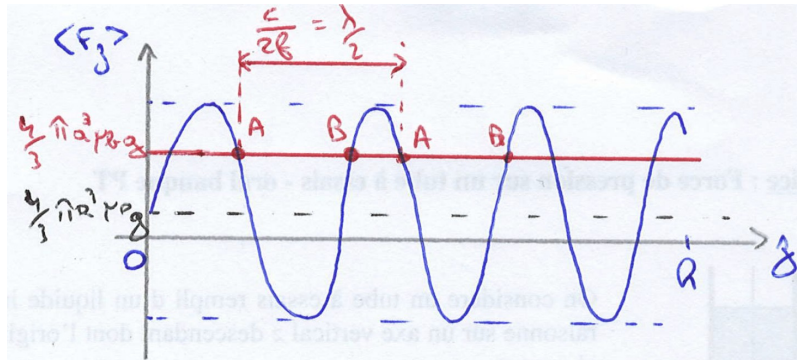
Les positions d'équilibre vérifient :

$$\langle F_z \rangle \vec{e}_z + m_b \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \mu_0 \left(g + \frac{V_1^2 \omega}{2c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \right) = \mu_b g$$

Au maximum, $\sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) = 1$. Donc,

$$\mu_{b,max} = \mu_0 \left(1 + \frac{V_1^2 \omega}{2cg} \right) > \mu_0$$

Stabilité des positions d'équilibre



Position d'équilibre de type A : Perturbons l'état d'équilibre. Si la bille se décale vers les z croissants, alors $\langle F_z \rangle$ diminue, et la résultante des forces de pression sur la bille est dirigée selon $-\vec{e}_z$: la bille redescend et revient à sa position d'équilibre. Ces positions d'équilibre sont stables.

Position d'équilibre de type B : Si la bille se décale vers les z croissants, la résultante des forces de pression augmente, et donc la résultante des forces de pression sur la bille est selon $+\vec{e}_z$: ces positions d'équilibre sont instables.

15. A.N. : $\mu_{b,max} = 5.7 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$

Pour estimer la masse de la bille, il faut estimer son rayon a . On sait que $a \ll \lambda$. Or, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$. A.N. :

$\lambda = 17 \text{ mm}$. Prenons alors $a = 1 \text{ mm}$. On en déduit que : $m_b = 0.24 \text{ g}$

Ces valeurs numériques sont faibles pour des matériaux solides (la masse volumique d'un métal est de l'ordre de 10^6 kg m^{-3}) et les matériaux transportés ici doivent être nécessairement de rayon très petit ($a < 1 \text{ mm}$). Néanmoins, ce calcul montre la possibilité d'application pour des matériaux peu denses et petits.

16. La distance minimale séparant deux objets lévitant est la distance entre deux positions d'équilibre stable consécutives, soit $\frac{\lambda}{2}$. Ainsi, sur la distance h , on peut faire léviter au maximum $\frac{h}{\lambda/2} = \frac{2h}{\lambda}$ objets.

Remarque : Dans l'expérience réelle, plus on place d'objets, plus l'onde acoustique est perturbée (ce qu'on a ici négligé), et plus il est difficile de faire léviter de nouveaux objets.

Ex. 6 Aplatissement de la Terre

Newton fut le premier à évaluer l'aplatissement de la Terre par rapport à une boule parfaite. Il a modélisé cet aplatissement en supposant que la Terre se comporte comme un fluide incompressible de masse volumique ρ en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz) des pôles (modèle valable pour des déformations de la Terre sur le temps long).

Cet exercice a pour but d'estimer l'aplatissement relatif de la Terre. Des données sont regroupées en fin d'énoncé.

1. Par un raisonnement qualitatif, déterminer si la Terre est aplatie au niveau des pôles ou au niveau de l'Equateur.

Pour déterminer quantitativement cet aplatissement, il nous faut commencer par exprimer les forces volumiques auxquelles sont soumises les particules de fluide.

2. Cette question porte sur le champ gravitationnel uniquement. En supposant, pour cette question seulement, que l'on peut approximer le champ gravitationnel créé par la Terre comme celui d'une boule moyenne de rayon R et de masse uniformément répartie en volume, exprimer le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre en fonction de la masse M de la Terre, de R , de \mathcal{G} et de la distance r au centre de la Terre.

Dans toute la suite, nous poserons la notation $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R^3}}$. On définit un système de coordonnées sphériques de centre O , le centre de la Terre, associé à un référentiel \mathcal{R}_T en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) des pôles à la vitesse Ω par rapport au référentiel géocentrique. On suppose le référentiel géocentrique galiléen.

3. Justifier que le référentiel \mathcal{R}_T n'est pas galiléen.
4. Montrer que le champ de pression à l'intérieur de la Terre s'exprime par :

$$P(r, \theta) = \frac{\rho r^2}{2} (\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) + K$$

où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

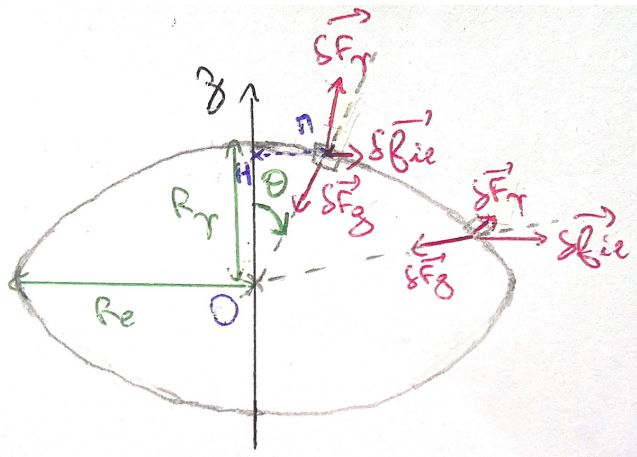
5. On s'intéresse désormais à la surface libre du fluide modélisant la Terre. On note R_p le rayon de la Terre aux pôles et R_e le rayon de la Terre à l'Equateur. Déterminer une relation reliant R_p , R_e , Ω et ω_0 .
6. On suppose que l'aplatissement relatif de la Terre est petit devant 1, ce qui permet de supposer que $R_e \simeq R$ et que $|R_e - R_p| \ll R$. Définir et déterminer l'expression de l'aplatissement relatif de la Terre. Réaliser l'application numérique.
7. La valeur de l'aplatissement relatif régulièrement utilisé en physique est de 0.3%. Commenter le résultat déterminé à la question précédente.

Données :

- Masse de la Terre : $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon moyen de la Terre : $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$
- Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour des pôles : $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

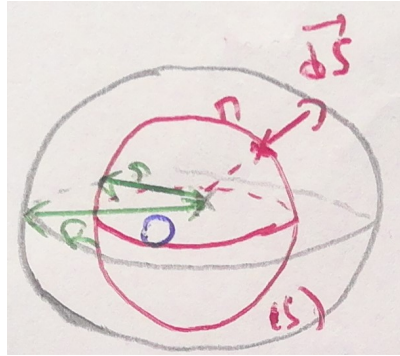
Correction de l'exercice 6

1. On suppose que le fluide modélisant la Terre est en équilibre dans le référentiel terrestre. Raisonnons sur une particule de fluide au niveau de la surface libre. Bilan des forces : force gravitationnelle $\delta \vec{F}_g$, force d'inertie d'entraînement $\delta \vec{f}_{ie}$ et résultante des forces de pression $\delta \vec{F}_p$.



Comme $\delta \vec{f}_{ie}$ augmente en norme des pôles vers l'Equateur, on en déduit que la Terre est aplatie au niveau des pôles : $R_p < R_e$.

2. .



- Coordonnées sphériques de centre O , le centre de la Terre.
- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Donc, $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$
- Invariance de la distribution de masse par rotations d'angles θ et φ : $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$.
- Surface (S) de Gauss fermée et orientée : cf. schéma.
- Théorème de Gauss gravitationnel ($r \leq R$) :

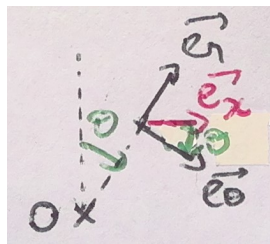
$$\oiint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}} = -4\pi \mathcal{G} \times \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

pour $r \leq R$ et avec $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Donc :

$$g(r) = -\mathcal{G} \frac{M}{R^3} r \Rightarrow \vec{g}(r \leq R) = -\frac{\mathcal{G} M}{R^3} r \vec{e}_r = -\omega_0^2 r \vec{e}_r$$

- Le référentiel \mathcal{R}_T n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique galiléen : le référentiel \mathcal{R}_T n'est donc pas galiléen.
- Référentiel \mathcal{R}_T en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen
La densité volumique de force gravitationnelle est donc $\vec{f}_{v,g} = -\rho \omega_0^2 r \vec{e}_r$ et celle de force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 H M \vec{e}_x = \rho \Omega^2 (r \sin(\theta)) (\sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$



Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_{v,g} + \vec{f}_{v,ie} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \omega_0^2 r + \rho \Omega^2 \sin^2(\theta) r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho \Omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) r \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

On tire de la 3ème équation que $P(r, \theta)$ (logique au vu de la symétrie du problème). En intégrant la première équation par rapport à r , on trouve : $P(r, \theta) = \rho(\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) \frac{r^2}{2} + f(\theta)$ où $f(\theta)$ est une fonction ne dépendant que de θ . On détermine cette fonction f à l'aide de la 2ème équation : $\frac{df}{d\theta} = 0$. Donc, $f(\theta) = K$ avec K une constante. On trouve donc le résultat donné dans l'énoncé.

5. Au niveau de la surface libre, la pression vaut P_0 la pression atmosphérique. En exprimant les deux relations pour $r = R_p$ ($\theta = 0$) et $r = R_e$ ($\theta = \pi/2$) et en les soustrayant, on aboutit à :

$$R_e^2 \Omega^2 + \omega_0^2 (R_p^2 - R_e^2) = 0$$

6. On définit l'aplatissement relatif de la Terre par $A = \frac{R_e - R_p}{R}$. Avec les approximations proposées, on arrive à :

$$R^2 \Omega^2 + \omega_0^2 (R_p + R_e)(R_p - R_e) \simeq R^2 \Omega^2 + 2\omega_0^2 R(R_p - R_e) = 0 \Rightarrow A = \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2}$$

A.N. : $A = 0.17\%$. Ce résultat valide l'approximation effectuée ci-avant en considérant que $R_e - R_p \ll R$ (et donc également celle $R_e \simeq R$).

7. On a donc déterminé un résultat très proche du résultat utilisé couramment (0.2% au lieu de 0.3%). L'erreur effectuée peut provenir de la modélisation du champ gravitationnel, qui suppose que la Terre est sphérique, alors qu'on démontre dans la suite qu'elle ne l'est pas... Il faudrait procéder par itérations successives en corrigeant la détermination du champ gravitationnel à l'aide de la forme non sphérique de la surface libre déterminée, et déterminer une forme plus précise de la surface libre, et ainsi de suite.