

**Sommaire**

<b>I Équation de Navier-Stokes et nombre de Reynolds</b>	<b>2</b>
I.1 Établissement de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	2
I.2 Expérience historique de Reynolds . . . . .	3
I.3 Interprétation de l'expérience de Reynolds . . . . .	3
<b>II Exemples d'écoulements laminaires, stationnaires et incompressibles de fluides visqueux</b>	<b>5</b>
II.1 Écoulement de Couette plan . . . . .	5
II.2 Ecoulement de Poiseuille cylindrique . . . . .	7
<b>III Modèle simplifié d'écoulement parfait</b>	<b>9</b>
III.1 Présentation du modèle . . . . .	9
III.2 Champ de vitesse dans une conduite horizontale pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible . . . . .	10
III.3 Champ de pression dans un écoulement parfait avec un champ de vitesse uniforme	10
<b>IV Quel modèle choisir pour décrire un écoulement réel ?</b>	<b>10</b>
IV.1 Profil de vitesse issu d'une expérience . . . . .	10
IV.2 Taille caractéristique $\delta$ de la couche limite . . . . .	12
<b>Exercices</b>	<b>13</b>

**Questions de cours**

- Etablir l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Expliciter les deux modes de transport de quantité de mouvement dans un fluide et construire le nombre de Reynolds. Régime laminaire/turbulent.
- Sur un exemple au choix du collier (Couette plan, Couette cylindrique, Poiseuille plan, Poiseuille cylindrique), déterminer le champ de vitesse.
- Décrire le modèle de l'écoulement parfait et discuter de sa validité pour modéliser un écoulement réel, en s'appuyant sur la notion de couche limite.

★ *Prise de notes* : On a déterminé les forces s'exerçant sur une particule de fluide (chapitre MF2), on a déterminé l'accélération d'une particule de fluide (chapitre MF1). On est donc prêts à exprimer le PFD dans un référentiel galiléen et à en déduire le champ de vitesse et de pression dans un fluide en mouvement.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Démontrer l'équation de Navier-Stokes régissant la dynamique des fluides visqueux.
2. Définir le nombre de Reynolds et l'évaluer sur des exemples concrets.
3. Appliquer une méthode-type pour déterminer le champ de vitesses dans un écoulement visqueux, laminaire, stationnaire et incompressible.

Dans ce chapitre, on se contentera d'étudier des fluides en mouvement dans des **référentiels galiléens**.

**Hypothèse** : Tous les écoulements de ce chapitre sont supposés être **incompressibles**.

## I Équation de Navier-Stokes et nombre de Reynolds

### I.1 Établissement de l'équation de Navier-Stokes

Considérons une particule de fluide de volume élémentaire  $d\tau$  soumise aux forces de pression, aux forces de viscosité (on suppose que le fluide est newtonien en écoulement incompressible) et à une résultante des autres forces de densité volumique  $\vec{f}_v$ . On note  $\rho$  la masse volumique de la particule de fluide et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide.

L'application du PFD dans un référentiel galiléen donne :

$$\delta m \vec{a} = \rho d\tau \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau + \eta \Delta \vec{v} d\tau + \vec{f}_v d\tau$$

D'où l'équation universelle suivante :

★ 
$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_v$$

appelée équation de Navier-Stokes (1845).

Cette équation aux dérivées partielles est une équation locale, non linéaire (à cause du terme en  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ ).

La non-linéarité de l'équation aux dérivées partielles rend sa résolution exacte dans le cas général impossible (ou en tout cas, non déterminée à ce jour).

**Vocabulaire :**

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_v$$

★ Entourer "terme convectif", "terme diffusif".

**Autre écriture de l'équation de Navier-Stokes :**

En utilisant la seconde écriture de la dérivée particulière de la vitesse, on peut ré-écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{||\vec{v}||^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_v$$

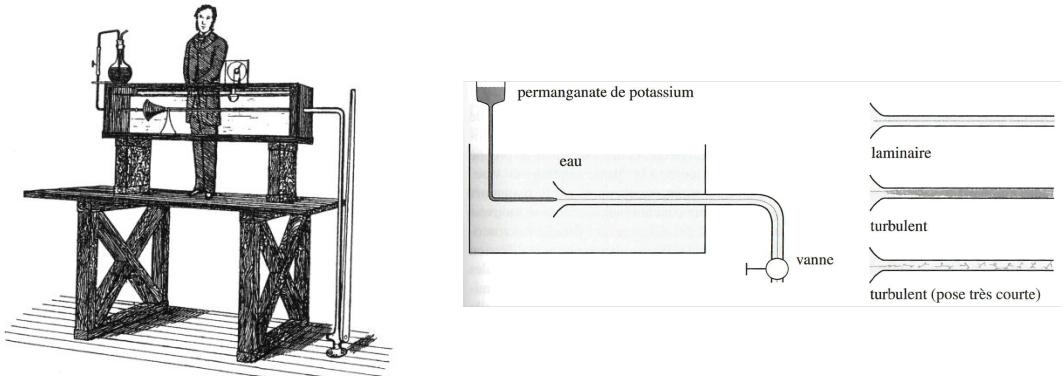
**Cas fréquent du seul champ extérieur de pesanteur :**

Dans le cas courant où les seules forces s'exerçant sur la particule de fluide sont les forces de pression, de viscosité et de pesanteur, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = - \nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

## I.2 Expérience historique de Reynolds

En 1883, Osborne Reynolds a mené une célèbre expérience illustrant les différents régimes d'écoulement, représentée ci-dessous. Un mince filet de permanganate de potassium, de couleur violette, est injecté à l'entrée d'un tube en verre dans lequel s'écoule de l'eau. Le débit volumique est réglé via une vanne, et le colorant permet d'observer l'écoulement dans le tube.



Reynolds constata alors deux régimes d'écoulements :

- pour de faibles débits volumiques, le filet de permanganate reste rectiligne, parallèle aux parois du tuyau horizontal, traduisant le fait que les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans se mélanger. On qualifie l'écoulement de *laminaire* ;
- pour de grands débits volumiques, le filet coloré se mélange très vite à l'eau qui l'entoure, en suivant une trajectoire désordonnée et semblant aléatoire. Les particules de fluide tourbillonnent de façon non régulière et chaotique, se coupent, voire fusionnent : on qualifie l'écoulement de *turbulent*. Il est alors impossible de donner l'équation des lignes de courant et de prédire la vitesse du fluide en un point donné à partir de sa connaissance à un instant donné antérieur.

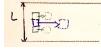
Reynolds a pu également constater que le diamètre de la conduite influençait l'écoulement et l'apparition du régime turbulent, tout comme la nature du fluide (sa viscosité). Conclusion : l'apparition de la turbulence dépend de manière couplée d'un certain nombre de paramètres. Nous allons chercher à créer une grandeur comparant ces différents paramètres, afin de prédire l'apparition du régime turbulent.

## I.3 Interprétation de l'expérience de Reynolds

### a Compétition entre deux modes de transport de la quantité de mouvement

Deux phénomènes physiques distincts permettent de transférer de la quantité de mouvement dans un fluide. Pour les distinguer, considérons un fluide dans une conduite cylindrique de diamètre  $L$ . On suppose qu'une seule particule de fluide possède une quantité de mouvement non nulle à un instant  $t$ . Comment est-ce que cette quantité de mouvement est transférée aux autres particules de fluide ?

- Transport de quantité de mouvement par convection : la particule de fluide met en mouvement les particules de fluide devant elle, vu que sa masse volumique ne peut pas changer (écoulement incompressible et homogène). Ce transport de quantité de mouvement se fait dans la direction de l'écoulement : on parle de transport longitudinal.



- Transport de quantité de mouvement par diffusion : la particule de fluide met en mouvement les particules de fluide situées au-dessus et en-dessous d'elle, du fait de la viscosité du fluide. Ce transport de quantité de mouvement se fait dans la direction transverse à l'écoulement : on parle de transport transversal. Notez que, bien que la quantité de mouvement, grandeur vectorielle, soit orientée selon  $\vec{e}_x$ , le phénomène de diffusion se produit selon la direction transverse  $\vec{e}_z$ .

Ces deux modes d'écoulement qui viennent d'être mis en évidence ont des effets contraires :



- la diffusion, c'est-à-dire la viscosité, tend à homogénéiser le champ de vitesse dans un écoulement et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement laminaire. Elle est caractérisée par le terme diffusif  $\eta \Delta \vec{v}$  dans l'équation de Navier-Stokes ;
- la convection, c'est-à-dire l'inertie, tend à rendre au contraire l'écoulement plus agité (les particules se "poussent") et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement turbulent. Elle est caractérisée par le terme convectif  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}$  dans l'équation de Navier-Stokes.

### b Nombre de Reynolds

Pour savoir si l'écoulement est laminaire ou turbulent, nous allons donc comparer le terme diffusif et le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes, en ordre de grandeur.

Notons  $L$  l'échelle caractéristique spatiale du problème et  $U$  l'ordre de grandeur de la vitesse dans le fluide.

En ordre de grandeur :



$$\frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\rho \left\| (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right\|}{\eta \|\Delta \vec{v}\|} \sim \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

On appelle ce rapport le nombre de Reynolds. Cette définition du nombre de Reynolds est générale, et ne s'applique pas qu'aux écoulements dans une conduite.

#### Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Ce nombre sans dimension caractérise le régime d'écoulement :



- si  $Re \ll 1$ , l'écoulement est *laminaire* le transport de quantité de mouvement par diffusion domine ;
- si  $Re \gg 1$ , l'écoulement est *turbulent*, le transport de quantité de mouvement par convection domine.

En pratique, l'expérience montre que l'écoulement reste laminaire pour  $Re \sim 1$ . Dans une conduite cylindrique, la transition entre régime laminaire et turbulent s'effectue même pour  $Re_{lim} \sim 2000$ .

### c Exemples de détermination du nombre de Reynolds

Le point délicat dans le nombre de Reynolds est bien souvent de savoir quelle longueur caractéristique  $L$  on doit prendre en compte pour calculer  $Re$ . Citons quelques exemples :

- écoulement dans une conduite cylindrique :

★  $L = D = 2R$

- écoulement autour d'une voiture :

$$\star \quad L = L_{\text{totale}}$$

**Exercice :** À partir de quelle vitesse  $U$  l'écoulement de l'eau dans un tube de rayon  $R = 5 \text{ cm}$  devient-il turbulent ?

$\star \quad U_{\text{lim}} = \frac{Re\eta}{\rho L} = \frac{Re\eta}{\rho(2R)} \simeq 0.02 \text{ m s}^{-1}$  pour l'eau en prenant  $Re \sim 2000$ . Ainsi l'écoulement d'eau dans une conduite est rarement laminaire.

**Exercice :** Une voiture sur l'autoroute avance à  $130 \text{ km/h}$ . L'écoulement de l'air autour de la voiture est-il laminaire ou turbulent ? On donne  $\eta(\text{air}) = 1.8 \times 10^{-5} \text{ P}\ell$ .

$\star \quad U = 130 \text{ km/h} = 36 \text{ m/s}$  Donc  $Re = 9.6 \times 10^6 > 1 \times 10^3$  : écoulement turbulent

## II Exemples d'écoulements laminaires, stationnaires et incompressibles de fluides visqueux

**Fiche-méthode :** Déterminer le champ de vitesse  $\vec{v}$  et le champ de pression  $P$

1. Réaliser un schéma et préciser le système de coordonnées et le référentiel d'étude.
2. **Hypothèse : Ecoulement laminaire** (les lignes de courant sont bien définies). Déterminer la direction du champ de vitesse par symétries.
3. **Hypothèse : Ecoulement stationnaire**. Déterminer par invariances les variables dont dépendent  $\vec{v}$  et  $P$ .
4. **Hypothèse : Ecoulement incompressible**. Si possible, simplifier davantage les variables dont dépend la vitesse  $\vec{v}$  en utilisant  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ .
5. Ecrire l'équation de Navier-Stokes en simplifiant les termes nuls (ce sera quasi toujours le cas de l'accélération locale et convective). Résoudre l'équation en faisant intervenir des constantes d'intégration.
6. Déterminer les conditions aux limites. Les appliquer pour déterminer les constantes d'intégration.

### II.1 Écoulement de Couette plan

**Définition** (rappel) : Écoulement de Couette

Écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois.

Nous étudions ici un écoulement de Couette **plan**, donc on considère un fluide s'écoulant entre deux **plans** infinis parallèles, celui en  $z = 0$  étant maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire, et celui en  $z = h$  se translatant horizontalement à la vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

Schéma.

1. Coordonnées cartésiennes. Référentiel du laboratoire galiléen.
2. On suppose l'écoulement laminaire. Par symétrie,  $\vec{v} = v(x, y, z, t) \vec{e}_x$ .
3. On suppose l'écoulement stationnaire et il y a invariance par translations selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  :  $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$  et  $P(z)$ .

**Remarque :** On parle d'écoulement parallèle (ou de cisaillement) car  $\vec{v}$  est dirigé selon  $\vec{e}_x$  mais ne dépend pas de  $x$ .

4. On suppose l'écoulement incompressible, donc  $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$  : n'apporte rien de plus ici.
5. Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \vec{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Annulation du terme convectif :

L'écoulement étant laminaire, on a en ordre de grandeur :  $Re = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|} \ll 1$ , et on peut donc négliger le terme convectif devant le terme diffusif. Mais ici, vu le champ de vitesse, on a même exactement :  $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = (v(z)\frac{\partial}{\partial x})v(z)\vec{e}_x = \vec{0}$ . Donc :

$$\vec{0} = -\frac{dP}{dz}\vec{e}_z + \eta \frac{d^2v}{dz^2}\vec{e}_x - \rho g \vec{e}_z$$

En projetant sur  $\vec{e}_x$  :



$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0 \Rightarrow v(z) = A + Bz$$

En projetant sur  $\vec{e}_z$  :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P(z) = C - \rho g z$$

(même évolution qu'en statique des fluides)

6. On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites. Par adhérence du fluide aux parois solides, en  $z = 0$ ,  $\vec{v}(z = 0) = \vec{0}$ , donc  $A = 0$  ; en  $z = h$ ,  $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ , donc  $B = \frac{v_0}{h}$ . Ainsi :

$$\vec{v} = \frac{v_0}{h}z\vec{e}_x$$

(Représenter le profil de vitesse sur le schéma.)

**Remarque :** On sera souvent amené à négliger la pesanteur pour les écoulements dans une direction horizontale, car la pesanteur n'influe alors que sur la pression et pas sur le champ de vitesse. Dans le cas où on néglige la pesanteur, on trouve alors que le champ de pression est uniforme.

### Application : Force exercée par le fluide sur les plaques

On rappelle que la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface  $dS$  est :  $dF = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS$  si  $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$ .

Déterminer la force (vectorielle) que le fluide exerce sur chacune des deux plaques de section identique  $S$ .

Sur la plaque du bas :



Sur la plaque du haut :

$$\vec{F}_{bas} = + \iint_{(S)} \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0} dS \vec{e}_x = \eta \frac{v_0}{h} S \vec{e}_x$$

**Exercice :** On considère un fluide newtonien en écoulement laminaire, stationnaire et incompressible. Ce fluide a une hauteur  $h$  et se trouve sur une plaque infinie située en  $z = 0$ . Le fluide est mis en mouvement par la plaque, à laquelle on donne la vitesse  $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$  dans le référentiel du laboratoire. La surface en  $z = h$  est au contact avec l'air à la pression atmosphérique  $P_0$ .

Déterminer le champ de vitesse et de pression dans le fluide, par analogie avec l'écoulement de Couette plan.

Les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 sont identiques. Seules les conditions aux limites sont modifiées :

- en  $z = 0$ , par adhérence à la paroi :  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ . Donc :  $A = v_0$ .
- en  $z = h$ , la surface est libre, donc  $P(z = h) = P_0$  et  $\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z = h) = 0 = B$ . Donc :  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$  (écoulement uniforme) et  $P(z) = P_0 - \rho g z$ .

## II.2 Ecoulement de Poiseuille cylindrique

**Définition** (rappel) : Ecoulement de Poiseuille

Ecoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite.

Nous étudions ici un écoulement de Poiseuille **cylindrique**, donc on considère un fluide s'écoulant dans une conduite cylindrique d'axe ( $Ox$ ), de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . La conduite est fixe dans le référentiel du laboratoire. Pour simplifier, comme la conduite est horizontale, on néglige la pesanteur.

Schéma (indiquer :  $P_e$ ,  $P_s$  et  $\Delta P = P_e - P_s > 0$ )

1. Coordonnées cylindriques d'axe ( $Ox$ ). Référentiel du labo galiléen.
2. On suppose l'écoulement laminaire. Par symétrie,  $\vec{v} = v(r, \theta, x, t) \vec{e}_x$ .
3. Ecoulement stationnaire + invariance par rotation d'angle  $\theta$  :  $\vec{v} = v(r, x) \vec{e}_x$  et  $P(r, x)$ .
4. Ecoulement incompressible :  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Donc,  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_x$ .
5. Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}) \vec{v} \right) = - \vec{\operatorname{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\text{Terme convectif : } (\vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}) \vec{v} = (v(r) \frac{\partial}{\partial x}) v(r) \vec{e}_x = \vec{0}$$

Le formulaire d'analyse vectorielle donne l'expression du laplacien en cylindrique (début du raisonnement à savoir avec  $\Delta v_x \vec{e}_x$ , car même principe qu'en cartésien (vecteur  $\vec{e}_x$  fixe)) :

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \Delta v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

En projection :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \quad \forall r, \forall x$$

**Digression :** On se propose de retrouver l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité  $\vec{f}_{\text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_x$  sans utiliser de formulaire.

On considère une particule de fluide (donc infinitésimale) en coordonnées cylindriques, de volume  $d\tau = dr r d\theta dx$ .

Schéma de la PF avec indication des surfaces où s'appliquent les forces de viscosité  
Du fait que  $\vec{v}$  ne dépend que de  $r$ , seules les particules de fluide repérées en  $(r+dr, \theta, x)$  et  $(r, \theta, x)$  influent sur la force de viscosité :

★ 
$$\vec{\delta F} = \vec{\delta F}_+ + \vec{\delta F}_- = +\eta \underbrace{(r+dr)d\theta dx}_{=dS(r+dr)} \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r+dr} \vec{e}_x - \eta \underbrace{r d\theta dx}_{=dS(r)} \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_r \vec{e}_x$$

D'où :

$$\vec{\delta F} = \eta d\theta dx \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr \vec{e}_x = \vec{f}_{v, \text{viscosité}} d\tau$$

On identifie :  $\vec{f}_{v, \text{viscosité}} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_x$ .

Nous devons désormais résoudre l'équation

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \quad \forall r, \forall x$$

On reconnaît une équation de la forme  $f(x) = g(r)$ , valable pour tout  $x$  et tout  $r$ . Cela signifie que les deux membres sont indépendants de  $r$  et de  $x$  et constituent une constante  $K$ .

On a alors :

$$\frac{dP}{dx} = K \implies P(x) = Kx + \text{cste}$$

Avec les conditions aux limites sur la pression :

$$P(x) = \frac{P_s - P_e}{L} x + P_e = P_e - \underbrace{\frac{\Delta P}{L} x}_{=K}$$

★

Donc :

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = K = -\frac{\Delta P}{L} \implies r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P r^2}{2\eta L} + A \implies v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + A \ln(r) + B$$

6. Conditions aux limites :

- $v(r)$  ne diverge pas en  $r = 0$  :  $A = 0$
- Adhérence à la paroi solide :  $v(R) = 0$  :  $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$

### Application : expression du débit volumique

À partir de l'expression du champ de vitesse, on peut en déduire l'expression du débit volumique :

★

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P = D_v}$$

Cette formule constitue la loi de Hagen-Poiseuille, donnant le débit volumique d'un fluide visqueux en régime laminaire.

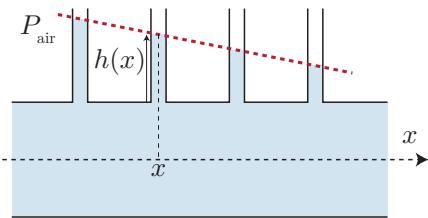
*En prise de notes : Interprétation :*

★

- Si  $\frac{\Delta P}{L}$  augmente,  $D_v$  augmente : c'est le gradient de pression qui compte
- Si  $R$  augmente,  $D_v$  augmente fortement : ok
- Si  $\eta$  augmente,  $D_v$  diminue : la dissipation d'énergie et donc la chute de pression est due aux effets visqueux

### Application : Profil de la pression

On a déjà calculé le profil de pressions :  $P(x) = P(0) - \frac{\Delta P}{L}x$ . On peut le visualiser simplement en connectant à la conduite cylindrique des tuyaux verticaux dans lesquels aucun écoulement n'a lieu et qui servent à visualiser la pression dans la conduite.



**Exercice :** Justifier l'observation expérimentale, en reliant  $h(x)$  à la pression dans la conduite cylindrique.

Au sein de chaque tube vertical, le fluide est à l'équilibre mécanique et doit vérifier l'équation fondamentale de la statique des fluides. On a ainsi  $P_t(z) = P_t(h) - \rho g(z-h)$ . Or, au niveau de la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique  $P_{air}$ , donc  $P_t(h) = P_{air}$ . Donc :  $P_t(z) = P_{air} - \rho g(z - h(x))$ . Or en  $z = 0$ , la continuité de la pression implique  $P_t(0) = P(x)$ , avec  $P(x)$  la pression au sein d'une section droite de la conduite. D'où  $\rho gh = P(x) - P_{air} = P(x = 0) - \frac{\Delta P}{L}x - P_{air}$ , c'est-à-dire que  $h(x)$  se met sous la forme  $h(x) = \frac{P(x=0)-P_{air}}{\rho g} - \frac{\Delta P}{\rho g L}x$ , conforme à l'observation expérimentale.

Ainsi, la pression décroît de manière affine avec la position : on parle de perte de charge régulière.

### III Modèle simplifié d'écoulement parfait

Le modèle du fluide visqueux newtonien est un modèle assez complet pour décrire les écoulements de fluides réels, mais il est long de déterminer le champ de vitesse. Nous allons étudier dans cette partie un second modèle largement simplifié, mais qui s'appliquera de manière satisfaisante dans de nombreux écoulements.

#### III.1 Présentation du modèle

##### Modèle de l'écoulement parfait

Un écoulement parfait est un écoulement pour lequel on néglige tous les phénomènes de diffusion (diffusion de la quantité de mouvement par la viscosité ; diffusion thermique par conduction) devant les phénomènes de convection.

Donc, un écoulement parfait :

- ★ • est non visqueux :  $\eta = 0$
- évolue de façon adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique.

Du point de vue de la mécanique des fluides, le fait d'étudier un écoulement sans viscosité implique plusieurs conséquences :

- Les actions de contact se réduisent aux seules forces de pression.
- Les conditions aux limites sont changées, car il n'y a plus adhérence du fluide aux parois (cf. chapitre MF2).

L'application du PFD à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen conduit alors à l'équation :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \vec{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v$$

où  $\vec{f}_v$  est la résultante des forces volumiques extérieures hors forces de pression s'appliquant à la particule de fluide. Cette équation porte le nom d'**équation d'Euler** (1757).

Les forces extérieures se réduisent bien souvent uniquement à la force de pesanteur. Ainsi,

l'équation d'Euler se ré-écrit sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \vec{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g}$$

### III.2 Champ de vitesse dans une conduite horizontale pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible

Considérons une conduite cylindrique horizontale dans lequel s'écoule un fluide en écoulement parfait et stationnaire. Vu qu'il n'y a aucune force de viscosité (contrainte tangentielle), les particules de fluide glissent sur les parois solides.

On montre alors, avec le sens physique, que la vitesse est uniforme sur une section droite de l'écoulement.

Schéma (indiquer  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ). On appelle cela un "écoulement bouchon" ou "écoulement piston" (lien avec les réacteurs pistons en chimie).

Si l'écoulement est de plus incompressible, alors le débit volumique se conserve le long de la conduite :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{dS} = vS = \text{cste} \Rightarrow v = \text{cste}$$

### III.3 Champ de pression dans un écoulement parfait avec un champ de vitesse uniforme

Considérons un écoulement où la vitesse  $\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0$  est uniforme dans le référentiel terrestre. Plaçons-nous dans le référentiel en translation par rapport à celui de la Terre, à la vitesse constante  $\vec{v}_0$  : le fluide est immobile dans ce référentiel, galiléen. On peut alors appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans ce référentiel. Cela conduit à un champ de pression  $P(z) = P_0 - \rho g z$  ( $Oz$  vers le haut), si la seule force volumique est celle de pesanteur.

**Remarque :** Cela arrivera qu'on fasse l'approximation que  $P = \text{cste}$  : cela signifie qu'on néglige la pesanteur sur la hauteur de fluide considérée (rayon conduite faible).

## IV Quel modèle choisir pour décrire un écoulement réel ?

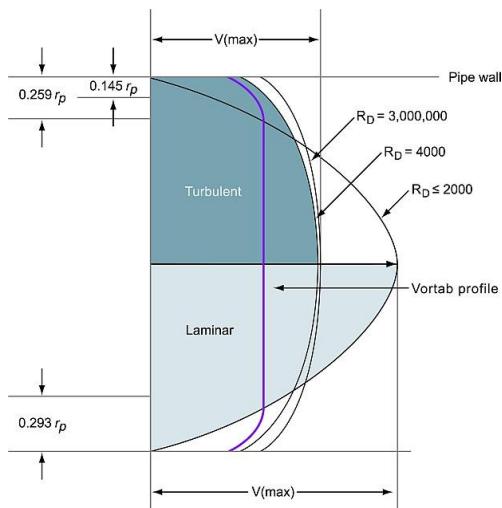
Dans ce chapitre, nous avons étudié le champ de vitesse et de pression dans un fluide en mouvement avec deux modèles différents : le modèle du fluide newtonien visqueux et le modèle du fluide parfait. Comment choisir en pratique le modèle le plus pertinent pour décrire l'écoulement d'un fluide réel ?

### IV.1 Profil de vitesse issu d'une expérience

Considérons à nouveau le cas d'un écoulement dans une conduite cylindrique horizontale. Il paraît compliqué de caractériser le profil de vitesse pour n'importe quel écoulement, car celui-ci dépend a priori de :

- la vitesse moyenne  $U$  (ou du débit volumique  $D_v$ )
- des caractéristiques du fluide :  $\rho, \eta$
- du diamètre de la conduite  $D$

Pourtant, quand on fait l'expérience, on se rend compte que le profil de vitesse a une allure similaire si le nombre de Reynolds  $Re$  est identique.



Dans le cas d'un écoulement turbulent, on ne peut définir le profil des vitesses dans une section, du fait de la composante aléatoire à la fois dans le temps et l'espace de la vitesse locale. On peut cependant effectuer une moyenne temporelle, ce qui permet d'obtenir un profil régulier à symétrie de révolution, tel qu'illustré ci-contre. On n'a cependant que des lois empiriques pour exprimer  $\langle v(M,t) \rangle$ . Ce qui est à retenir est que globalement la vitesse est quasi-constante dans un écoulement turbulent : l'essentiel des variations se concentre sur les parois.

Schémas du profil de vitesse dans la conduite pour  $Re < 2000$  et  $Re > 2000$ . Indiquer : "écoulement visqueux laminaire" / "proche d'un écoulement parfait, sauf près des bords".

- ★ Dans le cas où  $Re > 2000$ , le transport de la quantité de mouvement par convection domine sur la diffusion (liée à la viscosité). Pourtant, la viscosité impose d'avoir une vitesse nulle du fluide au niveau des parois de la conduite : la viscosité entraîne une variation de vitesse uniquement à proximité des parois.

### Définition : couche limite

- ★ Zone de l'espace située proche d'un obstacle où la vitesse du fluide a des variations spatiales rapides

Cette zone de l'espace est celle où il faut prendre en compte les effets visqueux. Au-delà de cette couche limite, le fluide s'écoule de manière quasi-parfaite, c'est-à-dire que les effets de viscosité sont négligeables.

### Validité du modèle de l'écoulement parfait

- ★ Le modèle de l'écoulement parfait décrit bien un écoulement à grande valeur de  $Re$ , hors de la couche limite.

Dans le cas où on n'a pas  $Re \gg 1$  ou que l'on souhaite décrire l'écoulement dans la couche limite, alors le modèle pertinent est celui du fluide visqueux.

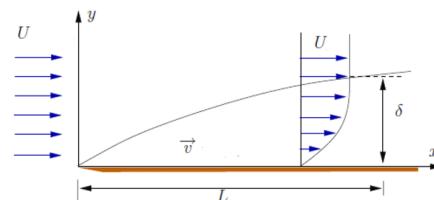
## IV.2 Taille caractéristique $\delta$ de la couche limite

Dans la couche limite, le transport de quantité de mouvement se fait par diffusion depuis la paroi solide. Donc, en odg, pendant la durée  $L/U$ , la couche limite croît d'une taille :

$$\star \quad \delta \sim \sqrt{\nu \frac{L}{U}}$$

Sachant que  $Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$ , on en déduit :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L^2}{U L}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$



Ainsi on distingue deux cas :

- soit  $Re \ll 1$ , dans ce cas l'épaisseur de la couche limite devient importante : la couche limite peut alors s'étendre à l'intégralité du fluide ;
- soit  $Re \gg 1$ , dans ce cas la couche limite correspond à une petite région de l'écoulement où les effets de la viscosité sont importants. En dehors de la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables.

**Exemple :** Calculer l'épaisseur caractéristique de la couche limite associée à l'écoulement de l'air autour d'une voiture roulant à  $130 \text{ km h}^{-1}$ . On donne, pour l'air :  $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ P}\ell$ .

- ★ Prenons :  $U = 130 \text{ km/h}$ ,  $L = 4 \text{ m}$ . On trouve :  $Re = 1 \times 10^7$  et donc :  $\delta \sim 1 \text{ mm}$

- ★ Les dissipations d'énergie ont lieu à l'intérieur de cette couche limite.

$h = 15$  cm concentriques d'axe ( $Oz$ ) de rayons  $R_1 = 4.8$  cm et  $R_2 = 5.0$  cm. Un moteur permet de faire tourner le cylindre intérieur à une vitesse angulaire  $\omega = 3$  tours par seconde. On mesure alors le couple nécessaire pour maintenir le cylindre extérieur fixe :  $C = 9.4 \times 10^{-2}$  N m.

On rappelle l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface  $dS$  :  $dF = \eta \frac{\partial v}{\partial r} dS$  si  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$ .

1. On donne la forme de la norme du champ de vitesse dans cet écoulement (coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ )) :

$$\|\vec{v}\| = Ar + \frac{B}{r}$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes. Déterminer les constantes  $A$  et  $B$  et en déduire l'expression de la vitesse dans tout le fluide.

2. En déduire le moment scalaire sur l'axe de rotation, exercé par le fluide sur le cylindre extérieur, en fonction de la viscosité dynamique  $\eta$ , de la vitesse de rotation  $\omega$  et des dimensions du dispositif.

3. Calculer la viscosité  $\eta$  du fluide.

---

### Correction de l'exercice 3

1. CL en  $r = R_1$  :  $AR_1 + \frac{B}{R_1} = R_1\omega$

$$\text{CL en } r = R_2 : AR_2 + \frac{B}{R_2} = 0$$

On trouve, après calcul :

$$A = -\frac{R_1^2\omega}{R_2^2 - R_1^2} < 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 \omega}{R_2^2 - R_1^2} > 0$$

2. Etablissons la force élémentaire exercée par le fluide sur une surface  $dS = R_2 d\theta dz$  du cylindre extérieur.

Supposons un instant que  $\frac{dv}{dr} > 0$  : le cylindre tournerait plus vite que la fluide. Donc, le fluide freine le cylindre :

$$\overrightarrow{\delta F_v} = -\eta \frac{dv}{dr} R_2 d\theta dz \vec{e}_\theta$$

Donc, le moment élémentaire de la force de viscosité le long de l'axe ( $0, \vec{e}_z$ ) exercée sur le cylindre extérieur est :

$$\delta M_\Delta = (R_2 \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\delta F_v}) \cdot \vec{e}_z = -\eta R_2^2 \frac{dv}{dr} \Big|_{r=R_2} d\theta dz$$

On intègre alors les moments élémentaires sur toute la surface du cylindre extérieur :  $M_\Delta = -2\pi\eta h R_2^2 \frac{dv}{dr} \Big|_{r=R_2} = +4\pi\eta h \frac{R_2^2 R_2^2 \omega}{R_2^2 - R_1^2}$

3. TMC au cylindre extérieur autour de l'axe fixe ( $O, \vec{e}_z$ ) dans le référentiel du labo galiléen :  $0 = -C + M_\Delta$   
Donc :

$$\eta = \frac{C(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi h R_1^2 R_2^2 \omega}$$

A.N. :  $\eta = 9.0 \times 10^{-2}$  P $\ell$

#### Validation :

- La viscosité trouvée est supérieure à celle de l'eau, ce qui est cohérent avec le fait qu'on étudie de l'huile d'olive.
- Plus  $C$  est grand, plus  $\eta$  est grand : logique, les forces de viscosité sont plus importantes.

## Ex. 4 Oscillation d'une plaque dans un fluide visqueux

On se place en coordonnées cartésiennes. Une plaque horizontale, située dans le plan  $z = 0$ , est animée d'un mouvement sinusoïdal de vitesse  $\vec{v} = v_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . Elle est surmontée d'un fluide visqueux (viscosité dynamique  $\eta$ ) supposé incompressible (masse volumique  $\rho$ ). Le fluide est situé entre  $z = 0$  et  $z = +\infty$ . On considère le référentiel du laboratoire galiléen.

En négligeant les effets de bord et en supposant l'écoulement laminaire, le champ des vitesses dans le fluide peut s'écrire  $\vec{v}(M, t) = v_x(z, t) \vec{e}_x$  et le champ de pression  $P(M, t) = P(z, t)$ .

1. On commence par déterminer et analyser l'équation vérifiée par le champ de vitesse.

- (a) Montrer que l'accélération d'une particule de fluide s'écrit ici  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .
- (b) Montrer alors que  $v_x(z,t)$  doit vérifier l'équation  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$  où  $\nu = \eta/\rho$  est appelée la viscosité cinématique.
- (c) Quel est le mode de transfert de quantité de mouvement étudié ici ? Déterminer alors la distance caractéristique de transport de la quantité de mouvement pendant une période d'oscillation de la plaque.
2. On cherche en régime sinusoïdal forcé une solution complexe de la forme  $\underline{v}_x(z,t) = \underline{f}(z) e^{j\omega t}$ . On posera  $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}$ .
- (a) Montrer que la fonction  $\underline{f}(z)$  s'écrit :
- $$\underline{f}(z) = A e^{\frac{1+j}{\delta}z} + B e^{-\frac{1+j}{\delta}z}$$
- avec  $A$  et  $B$  des constantes d'intégration.
- (b) Montrer qu'il est nécessaire que l'une des constantes d'intégration soit nulle.
- (c) Déterminer complètement la fonction  $\underline{f}(z)$  et donner l'expression du champ des vitesses en notation réelle. Commenter.
3. A.N. : Calculer  $\delta$  pour une fréquence de 500 Hz pour l'eau (viscosité à connaître) et pour la glycérine ( $\eta = 2.33 \text{ Pl}$  et  $\rho = 1.26 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ).
4. On rappelle l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface  $dS$  :  $dF = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS$  si  $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x$ . En déduire la puissance moyenne par unité de surface que doit fournir un opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

## Correction de l'exercice 4

1. (a) Avec le champ de vitesse proposé :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v_x(z,t) \frac{\partial}{\partial x}) v_x(z,t) \vec{e}_x = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

car  $v_x$  ne dépend pas de  $x$ .

- (b) • Référentiel du laboratoire galiléen  
L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \vec{e}_x - \rho g \vec{e}_z$$

En projetant sur  $\vec{e}_x$ , on aboutit à

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

- (c) On reconnaît une équation de diffusion : le mode de transfert de quantité de mouvement étudié ici est un transfert par diffusion. (On pouvait s'en douter dès la question a, car on a montré que le terme convectif de l'accélération était nul !)  
De même que dans le chapitre T2 sur la diffusion, on peut conduire une résolution en odg de cette équation. La longueur caractéristique sur laquelle s'effectue la diffusion de quantité de mouvement pendant une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  vaut :  $L_c = \sqrt{\nu T} = \sqrt{\frac{\eta 2\pi}{\rho \omega}} = \sqrt{\pi} \delta$ .

2. (a) Injectons cette forme de solution dans l'équation précédente :

$$\underline{f}(z) j\omega e^{j\omega t} = \nu \frac{d^2 f}{dz^2} e^{j\omega t} \iff \frac{d^2 f}{dz^2} = j \frac{\omega}{\nu} \underline{f}(z) = j \frac{2}{\delta^2} \underline{f}(z) \quad (\text{Ex.1})$$

On résout en résolvant le polynôme caractéristique associé  $r^2 = \frac{2j}{\delta^2} = \frac{2}{\delta^2} e^{j\frac{\pi}{2}}$  c'est-à-dire  $r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left( e^{j\frac{\pi}{2}} \right)^{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{j\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1+j}{\delta}$  Donc :

$$\underline{f}(z) = A e^{\frac{1+j}{\delta}z} + B e^{-\frac{1+j}{\delta}z} \quad (\text{Ex.2})$$

- (b) Comme  $|\underline{v}_x|$  ne peut diverger pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $A = 0$  nécessairement.

(c) On peut alors réécrire le champ des vitesses :

$$\underline{v}_x(z,t) = B e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} v_x(z,t) = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad (\text{Ex.3})$$

en se servant de la CL d'adhérence du fluide à la plaque en  $z = 0$ . On a donc une onde pseudo-progressive se propageant dans le sens des  $z$  croissants, mais dont l'amplitude décroît avec une distance caractéristique  $\delta$ . On assimile cette situation à un effet de peau !

3. AN :  $\delta_{eau} = 2.6 \times 10^{-5}$  m et  $\delta_{gly} = 1.1$  mm. La propagation est d'autant plus atténuée que la viscosité est faible. C'est logique : si la viscosité est faible, le transfert de quantité de mouvement par diffusion est peu efficace.
4. La plaque subit la force de frottements visqueux du fait du fluide  $\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} S \vec{e}_x$ . Donc la puissance que le fluide exerce sur la plaque est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(z=0) = \eta v_0 \left( -\frac{1}{\delta} \cos(\omega t) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right) S v_0 \cos(\omega t) \quad (\text{Ex.4})$$

soit pris en moyenne, avec  $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$  et  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$  :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -\eta v_0^2 \frac{1}{2\delta} S \quad (\text{Ex.5})$$

On peut alors en déduire la puissance moyenne à fournir par l'opérateur  $\langle \mathcal{P}_{op} \rangle$ . En appliquant le TPC à la plaque, dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{op} \Rightarrow \left\langle \frac{dE_c}{dt} \right\rangle = 0 = \langle \mathcal{P} \rangle + \langle \mathcal{P}_{op} \rangle$$

**Remarque :** On peut simplement affirmer que la puissance de l'opérateur doit compenser exactement la puissance dissipée par frottements.

Donc :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_{op} \rangle}{S} = +\frac{\eta v_0^2}{2\delta}$$