

Écoulements autour d'une sphère

Sommaire

I	Décrire un écoulement autour d'un obstacle	2
I.1	Qui se déplace par rapport à qui ?	2
I.2	Actions mécaniques d'un fluide sur un système solide	2
I.3	Nombre de Reynolds	3
I.4	Couche limite (rappels)	3
II	Écoulement autour d'une sphère	4
II.1	Évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds	4
II.2	Les différents régimes d'écoulement	4
II.3	Coefficient de traînée pour des objets de formes diverses	8
II.4	Balle de golf et décollement de la couche limite	8
	Exercices	10

Questions de cours

- Décrire à l'aide de schémas l'écoulement autour d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds. On commentera l'évolution du coefficient C_x (que l'on définira) en fonction de Re , en précisant les domaines de validité d'une force de traînée linéaire ou quadratique.

Dans ce chapitre, on revient sur un écoulement réel, c'est-à-dire visqueux, mais on ne va pas se limiter aux écoulements laminaires.

Dans les chapitres MF2 et MF3, on a pu déterminer entièrement le champ de vitesse et le champ de pression du fluide étudié en faisant l'hypothèse d'écoulement laminaire.



Ceci nous a permis d'en déduire les actions de pression ou de viscosité appliquées par le fluide sur un objet présent dans l'écoulement (objet immergé, paroi d'une conduite...).

Dans ce chapitre, les situations étudiées seront beaucoup plus complexes. Prenons l'exemple du nez d'un TGV : pourquoi le choix de cette forme si particulière permet-il de réduire les forces de frottements fluides ? On ne peut pas calculer le champ de vitesse simplement autour du TGV : on s'appuiera donc sur des données expérimentales.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

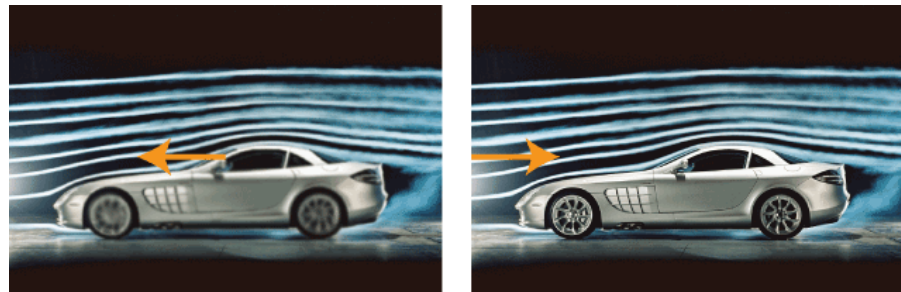
1. Modéliser les forces appliquées sur une sphère solide dans un écoulement en fonction du nombre de Reynolds Re .
2. Distinguer la couche limite du reste du fluide.

I Décrire un écoulement autour d'un obstacle

I.1 Qui se déplace par rapport à qui ?

Dans toute la suite, on considère un système solide placé dans l'écoulement d'un fluide. On pourra adopter deux points de vue équivalents :

- celui où le solide est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_{sol/fl}$ dans un fluide immobile (dans le référentiel terrestre) ;
- celui où l'objet est fixe (dans le référentiel terrestre) et l'écoulement très loin devant l'objet est à la vitesse $\vec{v}_{fl/sol} = -\vec{v}_{sol/fl} = \vec{v}_\infty$, d'après le principe de relativité galiléenne.



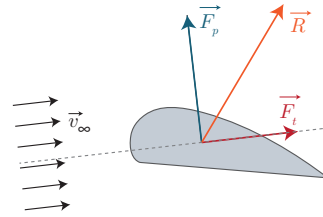
C'est grâce à ce dernier point que les études en soufflerie réalisées sur des véhicules immobiles sont pertinentes (avec une mise à l'échelle éventuelle en respectant la conservation de certains nombres adimensionnés). Dans toute la suite, on utilisera le point de vue d'un objet fixe, et on note la vitesse d'écoulement du fluide à l'infini en amont de l'obstacle $\vec{v}_\infty$, de norme U .

I.2 Actions mécaniques d'un fluide sur un système solide

a Sans prendre en compte un champ de pesanteur

L'écoulement d'un fluide autour d'un corps crée une force $\vec{R}$ correspondant à la résultante des forces de pression, dues uniquement à l'écoulement, et de viscosité. On la décompose selon $\vec{R} = \vec{F}_t + \vec{F}_p$, où :

- $\vec{F}_t$ est la force de traînée, colinéaire à $\vec{v}_\infty$, orientée dans le même sens que la vitesse de l'écoulement et responsable de la résistance du fluide ;
- $\vec{F}_p$ est la force de portance, orthogonale à $\vec{v}_\infty$, responsable notamment du vol des avions. (Les deux sens sont possibles.)

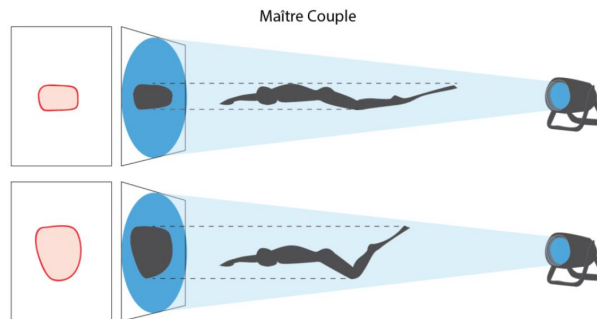


Dans la suite, on se concentrera sur des systèmes physiques où la force de portance est nulle.

On définit alors un coefficient sans dimension C_x appelé coefficient de traînée :

$$C_x = \frac{\|\vec{F}_t\|}{\frac{1}{2}\rho S U^2}$$

où U est la norme de la vitesse à l'infini, et S la surface droite présentée par l'objet en écoulement, appelée *maître-couple*.
Le maître couple est la surface que dessinerait l'ombre projetée de l'objet éclairé par un faisceau lumineux parallèle de direction $\vec{v}_\infty$ sur un écran perpendiculaire à cette direction.



★ Pour une sphère solide de rayon R , $S = \pi R^2$.

b Cas général : présence d'un écoulement et d'un champ de pesanteur

Dans le cas où un système solide est situé dans un fluide en écoulement et où on considère un champ de pesanteur, les forces appliquées au système solide sont modélisées par :

- le poids $\vec{P}$
- la poussée d'Archimède : résultante des forces de pression en l'absence d'écoulement : $\vec{\Pi}$
- la force de traînée : $\vec{F}_t$
- la force de portance : $\vec{F}_p$

I.3 Nombre de Reynolds

La nature de l'écoulement et la forme des lignes de courant dépend d'un nombre adimensionné : le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$.

★ Pour une sphère, on prendra pour taille caractéristique le diamètre de la sphère : $L = 2R$.

I.4 Couche limite (rappels)

Définition : Couche limite

Zone de l'espace située proche d'un obstacle où la vitesse du fluide a des variations spatiales rapides.

Cette zone de l'espace est celle où il faut prendre en compte les effets visqueux. Au-delà de cette couche limite, le fluide s'écoule de manière quasi-parfaite, c'est-à-dire que les effets de viscosité sont négligeables.

- ★ Refaire le schéma de l'écoulement dans la conduite cylindrique horizontale pour $Re \gg 1$ (et préciser un ord de $Re > 1000$) et colorier couche limite.

On rappelle que la taille caractéristique de la couche limite est $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$ si L est la taille caractéristique de l'obstacle.

Notons enfin que l'écoulement à l'intérieur de la couche limite peut être laminaire ou turbulent. On devra donc distinguer deux régimes d'écoulements :

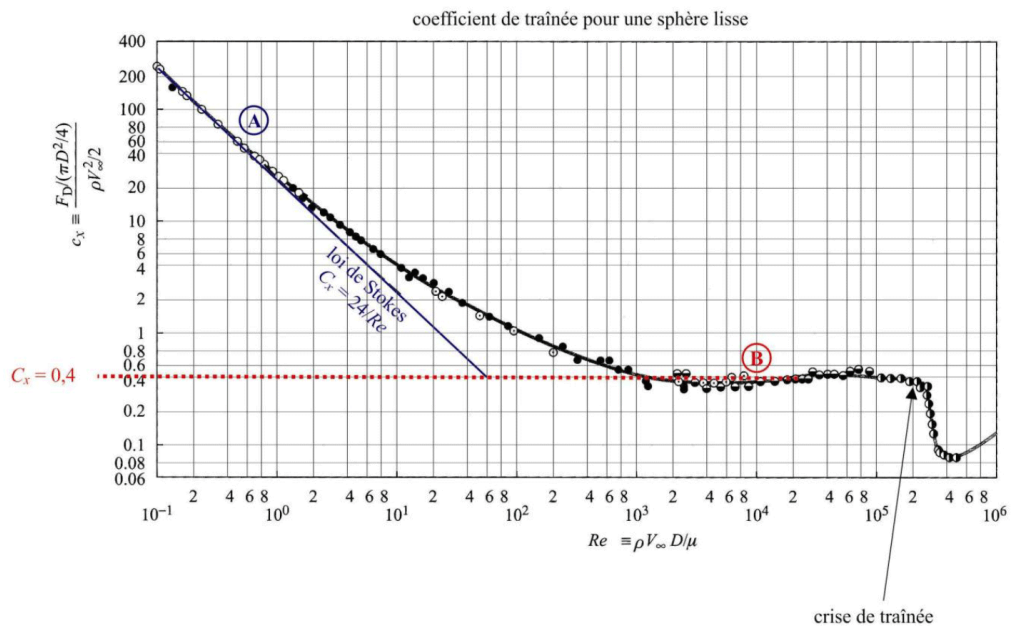
- le régime (laminaire ou turbulent) de l'écoulement dans le cœur du fluide, caractérisé par $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$.
- le régime (laminaire ou turbulent) de l'écoulement au sein de la couche limite, caractérisé par :

★
$$Re_{cl} = \frac{\rho U \delta}{\eta} = \frac{\rho U L}{\eta \sqrt{Re}} = \sqrt{Re}$$

II Écoulement autour d'une sphère

II.1 Évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds

On étudie l'écoulement autour d'une sphère solide de rayon R , placée dans un écoulement de vitesse $\vec{v}_\infty$ très loin de la sphère. Si la sphère ne présente aucune rotation par rapport au fluide, la force de portance est nulle. On étudie donc l'évolution du coefficient de traînée C_x :



II.2 Les différents régimes d'écoulement

a $Re < 1$: force de traînée linéaire

Pour de faibles nombres de Reynolds, le graphique montre une décroissance affine en échelle log :

★
$$\log(C_x) = 1.38 - \log(Re) \Rightarrow C_x = \frac{24}{Re}$$

On appelle ce domaine, le domaine de Stokes.

Exercice : Dédurre, de l'expression de C_x , l'expression de la force de traînée dans le domaine de Stokes.

$$\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}_\infty\|^2 \times \pi R^2 \times C_x$$

Or, $Re = \frac{\rho \|\vec{v}_\infty\| (2R)}{\eta}$ Donc :

★

$$\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}_\infty\|^2 \times \pi R^2 \times \frac{24\eta}{\rho \|\vec{v}_\infty\| (2R)} = 6\pi\eta R \|\vec{v}_\infty\|$$

Ainsi :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{v}_\infty$$

Force de Stokes

Si $Re < 1$, alors la force de traînée appliquée par le fluide sur une sphère est linéaire et s'exprime :

★

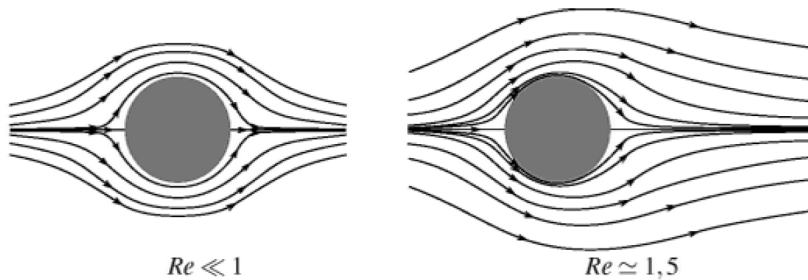
$$\vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{v}_\infty = -6\pi\eta R v_{\text{sol/fl}} \vec{e}$$

Description des lignes de courant et origine de la force de traînée

Régimes d'écoulements	Hors couche limite	Dans couche limite
$Re < 1$	★ Laminaire	★ Laminaire

À ces très faibles nombres de Reynolds, l'écoulement étant laminaire, le fluide contourne parfaitement l'obstacle. De plus, on observe une parfaite symétrie par rapport aux plans passant par le milieu de la sphère et perpendiculaire ou parallèle à $\vec{v}_\infty$: on ne peut pas distinguer le sens de l'écoulement. On parle de *traînée de frottements*, car ce sont uniquement les forces de viscosité qui prédominent dans cette force (la carte des pressions suit les mêmes symétries que la vitesse).

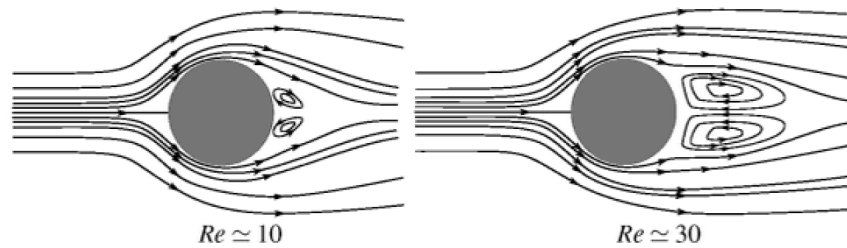
Cette symétrie se brise dès que le nombre de Reynolds commence à croître, comme illustré ci-dessous :



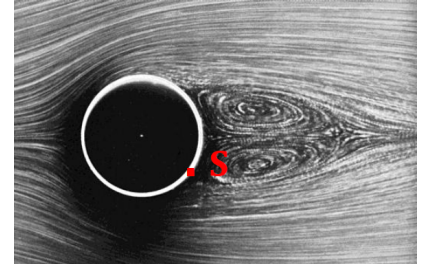
b Quelques unités $< Re < 10^3$: zone intermédiaire

Description des lignes de courant et origine de la force de traînée

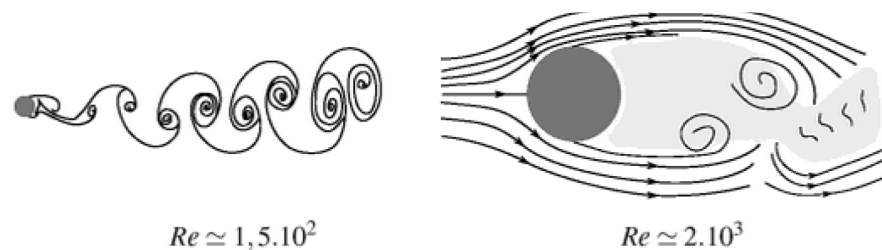
Régimes d'écoulements	Hors couche limite	Dans couche limite
$1 < Re < 10^3$	★ Laminaire	★ Laminaire



On observe que l'écoulement reste laminaire, mais la symétrie amont-aval a disparu. L'augmentation du nombre de Reynolds fait progressivement apparaître un sillage en aval, jusqu'à des tourbillons contra-rotatifs. Le fluide semble s'écouler autour de la sphère jusqu'au point S (illustré ci-dessous) : ce point correspond au *décollement de la couche limite*.

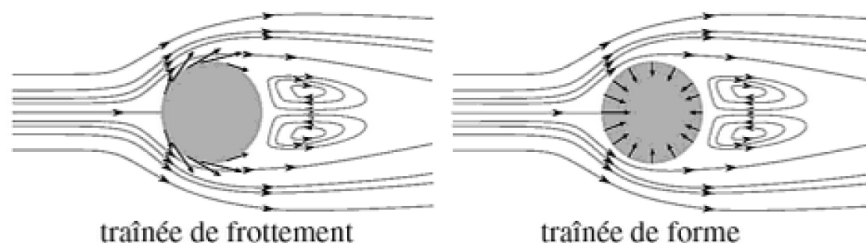


Remarque : À mesure que le nombre de Reynolds augmente, on peut voir apparaître un phénomène périodique ($Re \sim 150$) : l'allée de tourbillons de Von Karman se détachant de la sphère. On observe couramment ce phénomène à la surface d'une tasse de café moussieux ; ce phénomène persistant est aussi à l'origine du délai entre deux décollages d'avions sur les pistes d'aéroports (pouvant engendrer des perturbations pour les avions suivants).



La force de traînée a désormais deux origines :

- les forces de viscosité sont responsables de la traînée de frottement, déjà décrite à faible Reynolds ;
- les forces de pression sont responsables de la *traînée de forme* : en effet, en aval de la sphère la pression est moins importante qu'en amont (là où le fluide vient frapper la sphère). Plus le sillage en aval est large, plus la traînée de forme est importante.



c $10^3 < Re < 2 \times 10^5$: traînée quadratique

Comme le coefficient C_x devient quasiment constant ($C_x \sim 0.4$ pour une sphère), la force de traînée est quadratique en vitesse :

Force de traînée quadratique

Si $10^3 < Re < 2 \times 10^5$, alors $C_x \simeq \text{cste}$ et donc la force de traînée est quadratique :

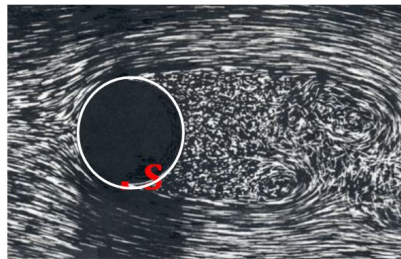
$$\star \quad \left\| \vec{F}_t \right\| = \frac{1}{2} C_x S \rho U^2$$

On choisit le sens de $\vec{F}_t$ avec le sens physique.

Description des lignes de courant et origine de la force de traînée

Régimes d'écoulements	Hors couche limite	Dans couche limite
$10^3 < Re < 2 \times 10^5$	★ Turbulent	★ Laminaire

À partir de $Re \sim 1000$, le sillage en aval devient turbulent : on observe des tourbillons de toutes tailles et de sens de rotation aléatoires. On constate également que le point de décollement remonte vers l'avant de la sphère au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.



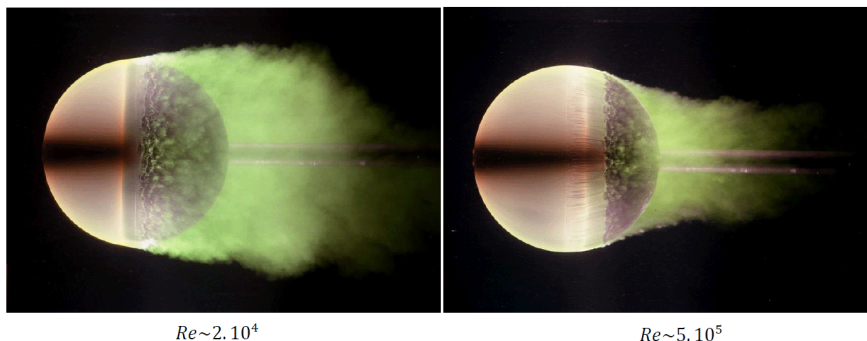
d $Re \geq 2 \times 10^5$: crise de traînée et au-delà

Description des lignes de courant et origine de la force de traînée

Régimes d'écoulements	Hors couche limite	Dans couche limite
$Re > 2 \times 10^5$	★ Turbulent	★ Turbulent

★ En effet, pour $Re \sim 2 \times 10^5$, on a : $Re_{cl} \sim 500$: odg du début de la turbulence

Le graphique met en évidence une chute assez brutale de la valeur de C_x autour d'une valeur critique du nombre de Reynolds $Re = Re_c \sim 2 \times 10^5$. Ainsi la force de traînée diminue brutalement, ce qui s'explique par la turbulence de la couche limite, réduisant alors la largeur du sillage et donc la zone de faible pression.

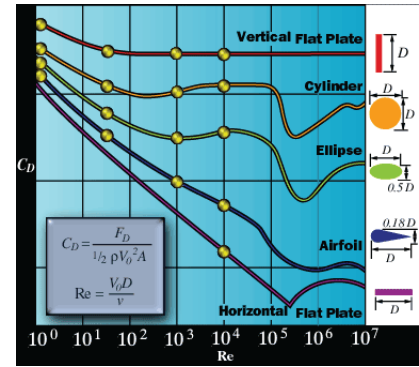


Ensuite, pour des valeurs supérieures de Re , le coefficient de traînée reste sensiblement constant : on retrouve une expression quadratique de la force de traînée.

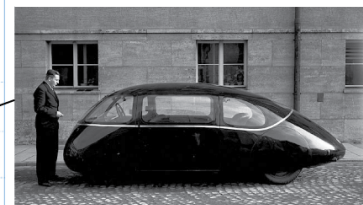
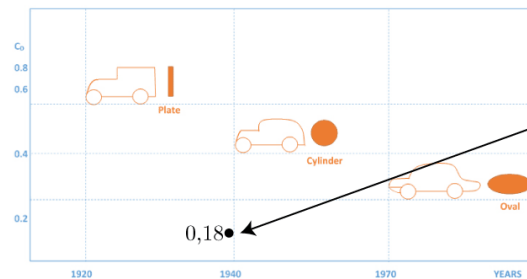
II.3 Coefficient de traînée pour des objets de formes diverses

Remarquons que pour des objets autres que la sphère lisse, on observe le même type de comportement pour le coefficient de traînée C_x . En particulier :

- pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds $Re < 1$, la force de traînée est linéaire $\vec{F} = -\alpha\eta L \vec{v}$, avec α une constante numérique sans dimension dépendant essentiellement de la forme de l'objet ;
- pour $10^3 \leq Re \leq 10^6$, la force de traînée devient quadratique en vitesse $\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x \rho S v \vec{v}$, avec un coefficient C_x sensiblement constant.



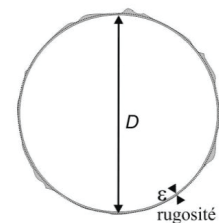
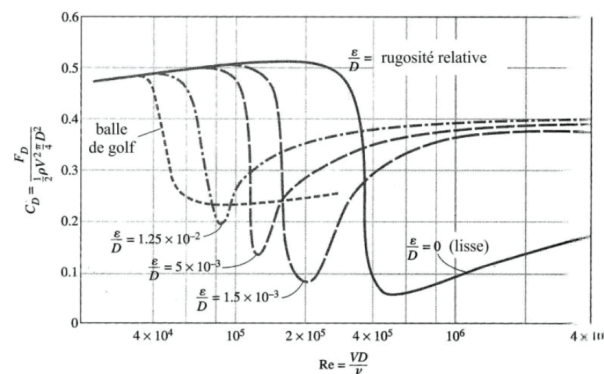
Notons que la plupart des écoulements que l'on considère sont turbulents, que ce soit un cycliste, une voiture, un bateau, etc. C'est pour cette raison que l'on donne souvent pour un obstacle donné le coefficient C_x correspondant à sa valeur dans la zone de frottements quadratique. Il est d'autant plus faible que l'obstacle est profilé : cela explique les améliorations conduites sur les carrosseries de voitures.



Schlörwagen (1939)

II.4 Balle de golf et décollement de la couche limite

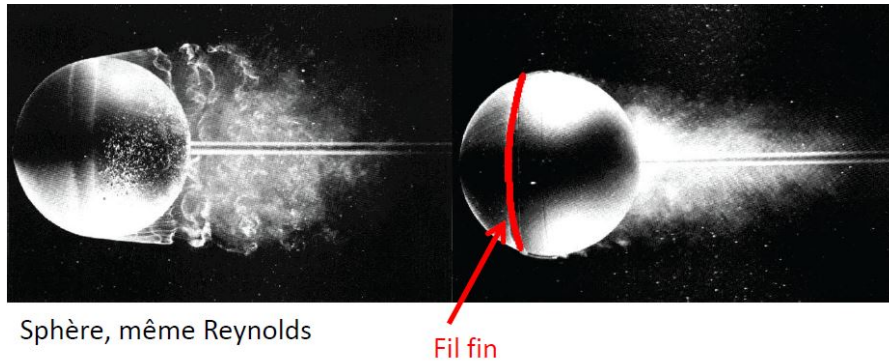
Au début du golf, les balles étaient lisses, mais il était connu des golfeurs qu'une balle cabossée avait souvent une portée bien plus grande que les balles neuves.



Exercice : Expliquer à l'aide du graphique ci-dessus l'augmentation de la portée de balles cabossées.

- ★ En effet, la balle de golf alvéolée présente une crise de traînée pour une valeur plus faible du nombre de Reynolds. Ainsi, une balle frappée et envoyée à grande vitesse correspond généralement à un nombre de Reynolds supérieur à Re_c . En odg, $U \sim 300$ km/h et $L \sim 10$ cm ; donc $Re \sim 6 \times 10^5$. Lorsque la balle ralentit, Re diminue et lorsqu'il repasse sous Re_c , le coefficient de traînée augmente brusquement, limitant la portée. Cette augmentation brusque intervenant plus tardivement pour le mouvement d'une balle alvéolée, sa portée s'en trouve augmentée.

Toute modification, même légère, de la surface, favorise la turbulence de la couche limite et va faire reculer le point de décollement vers l'aval (exemple ci-dessous avec une sphère pour laquelle on a placé un fil fin en amont). La crise de traînée intervient donc pour un nombre de Reynolds plus faible.



Exercices

Ex. 1 Viscosimètre à chute de bille

On souhaite mesurer précisément la viscosité η de la glycérine, dont on sait qu'elle est de l'ordre de 1 Pl. La masse volumique de la glycérine est $\mu_g = 1.260 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Pour cela, on fait chuter une bille de silice de masse volumique $\mu_s = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et de rayon $R = 0.75 \pm 0.01 \text{ mm}$ dans un récipient cylindrique rempli de glycérine. On souhaite mesurer la vitesse en régime permanent pour en déduire η .

- (a) On se place dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement laminaire. En déduire la vitesse limite v_{lim} en régime permanent.
(b) On se place dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent. En déduire la vitesse limite v_{lim} en régime permanent.
(c) Conclure.
- (a) La mesure de v_{lim} nécessite-t-elle l'utilisation d'une caméra rapide ? D'une caméra ?
(b) Calculer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire avant d'atteindre v_{lim} . Commenter.
- (a) Calculer un ordre de grandeur de la taille de la couche limite dans cet écoulement. En donner une interprétation.
(b) Comment faut-il choisir le rayon du récipient ?
- Une fois la vitesse limite atteinte, on mesure une distance parcourue $h = 10.0 \pm 0.2 \text{ cm}$ en une durée $T = 98 \pm 0.2 \text{ s}$. En déduire η avec son incertitude.

Correction de l'exercice 1

- (a) Si le régime est laminaire avec $Re < 1$, la force de traînée s'exprime via la force de Stokes. On trouve la vitesse limite *via* la LMQ projetée selon l'axe vertical :

$$-mg + \mu_g Vg + 6\pi\eta r v_{\text{lim},l} = 0 \iff v_{\text{lim},l} = \frac{2(\mu_s - \mu_g)r^2g}{9\eta} = 1.5 \text{ mm s}^{-1} \quad (\text{Ex.1})$$

et le calcul du Reynolds vaut $Re \sim 2.9 \times 10^{-3}$, l'écoulement est donc bien laminaire.

- (b) En régime turbulent avec $Re > 2000$, on trouverait avec $C_x = 0.5$: $v_{\text{lim},t} = \sqrt{\frac{8R(\mu_s - \mu_g)g}{3\mu_g C_x}} \simeq 0.20 \text{ m s}^{-1}$ mais un nombre de Reynolds incompatible ($Re \sim 0.37$).
(c) On en conclut que l'écoulement autour de la bille est laminaire.
- (a) En régime permanent, la vitesse de chute de la bille est donc de 1.5 mm s^{-1} . La vitesse limite est très faible : en régime permanent, la bille parcourt en 10 secondes une distance de 1.5 cm : on peut donc choisir un récipient d'une vingtaine de centimètres de hauteur et mesurer simplement au chronomètre entre deux repères calibrés, et bien en face pour éviter toute erreur de parallaxe.
(b) Le temps du régime transitoire est également très faible (équation différentielle d'ordre 1 sur v de temps caractéristique $\tau \sim \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\mu_s r^2}{9\eta} = 0.3 \text{ ms}$!). Ainsi, dès qu'on laisse la bille de silice chute, elle atteint quasi-instantanément la vitesse limite.
- (a) La couche limite autour de la sphère est de l'ordre de $\delta \sim \frac{2R}{\sqrt{Re}} \simeq 2.8 \text{ cm}$. Les effets visqueux influençant l'écoulement (et donc la force de traînée) sont à considérer dans une zone s'étendant sur 2.8 cm autour de la bille.
(b) Concernant le rayon, il est nécessaire que l'écoulement de la bille ne soit pas perturbé par les bords. Or, $\delta \sim 2.8 \text{ cm}$. Il est préférable que le rayon du récipient soit bien supérieur, soit par exemple $\sim 10 - 20 \text{ cm}$.
- Avec $v_{\text{lim}} = \frac{h}{T}$, on trouve

$$\eta = \frac{2(\mu_s - \mu_g)g}{9} \times \frac{r^2 T}{h} = 1.49 \text{ Pl} \quad (\text{Ex.2})$$

Concernant l'incertitude, on utilise la formule d'incertitude composée :

$$\frac{u(\eta)}{\eta} = \sqrt{\left(\frac{2u(r)}{r}\right)^2 + \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2} \quad (\text{Ex.3})$$

que l'on retrouve en écrivant la différentielle logarithmique de η :

$$d \ln(\eta) = \frac{d\eta}{\eta} = d \ln(r^2) + d \ln(T) - d \ln(h) = \frac{2dr}{r} + \frac{dT}{T} - \frac{dh}{h} \quad (\text{Ex.4})$$

L'application numérique conduit à $u(\eta)/\eta = 3.3 \times 10^{-2}$ (avec une contribution quasi négligeable sur T , mais où les deux autres grandeurs contribuent bien à cette incertitude relative). D'où $u(\eta) = 0.05 \text{ Pl}$:

$$\boxed{\eta = 1.49 \pm 0.05 \text{ Pl}} \quad (\text{Ex.5})$$