

Bilans dans des écoulements parfaits et stationnaires

Sommaire

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique	2
I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif	2
I.2 Relation de Bernoulli	3
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait	8
II Bilan macroscopique de quantité de mouvement	8
II.1 Force exercée sur une canalisation coudée	8
II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque	10
III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique	12

Questions de cours

- Démontrer la relation de Bernoulli à partir de l'accélération convective écrite sous la forme $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ en présentant rigoureusement l'ensemble des hypothèses.
- Décrire l'effet Venturi : principe, applications.
- Sur l'exemple d'une canalisation coudée, présenter un bilan de quantité de mouvement. En déduire la force exercée sur la conduite.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter un bilan d'énergie cinétique à partir d'un système ouvert.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Connaître les hypothèses de la relation de Bernoulli, et l'appliquer sur de nombreux exemples pour comprendre sa praticité.
2. Passer d'un système ouvert (échange de matière du fait de l'écoulement) à un système fermé adapté aux bilans.
3. Effectuer un bilan de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique, à un système fermé durant dt , en régime stationnaire.

Pour des soucis de simplification, ce chapitre se limite à l'étude de fluides en **écoulement parfait et stationnaire**.

Notation : Dans ce chapitre (et contrairement au chapitre T3), la vitesse du fluide sera notée v . On note v_{mass} le volume massique.

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique

I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif

On considère que le fluide passe au travers d'un élément actif avec des pièces mobiles (pompe, turbine, etc) : le travail utile massique reçu par le fluide est noté $w_u \neq 0$.

Considérons un écoulement stationnaire. Isolons une ligne de courant. L'application du premier principe au fluide en écoulement entre deux points A et B de la ligne de courant de part et d'autre de l'élément actif conduit à :

$$[h + e_c + e_p]_A^B = w_u + q$$

Application à la puissance d'une pompe

Considérons une pompe (altitude $z = 0$) qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $z = -h = -5\text{ m}$. On considère que l'eau dans le puits est quasiment statique, même lors du pompage. La section du tuyau avant la pompe est de $S = 100\text{ cm}^2$, et se réduit en sortie de la pompe à $s = 10\text{ cm}^2$. En considérant un débit volumique de $D_v = 10\text{ L s}^{-1}$, déterminer la puissance P_u de la pompe en régime stationnaire, sachant que la pression en sortie est de 2.5 bar.

I.2 Relation de Bernoulli

a Enoncé

En supposant l'absence de parties mobiles dans le fluide, $w_u = 0$, on aboutit, avec les mêmes hypothèses que précédemment, à :

$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right]_A^B = 0$$

Relation de Bernoulli

Lorsque l'écoulement est **parfait, stationnaire, homogène, incompressible**, étudié dans un référentiel supposé **galiléen**, où la seule force volumique extérieure agissant sur le fluide est la **force de pesanteur** supposée uniforme, et où le fluide n'échange **pas de travail utile** avec l'extérieur, en considérant (Oz) l'**axe vertical ascendant** (♥!), la **relation de Bernoulli** est vérifiée sur une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cste}_{\text{ldc}}$$

Cette relation traduit la **conservation de l'énergie mécanique** volumique.

b Seconde démonstration de la relation de Bernoulli

On peut démontrer d'une autre façon la relation de Bernoulli.

Le formulaire d'analyse vectorielle fournit la relation suivante (à ne pas connaître) :

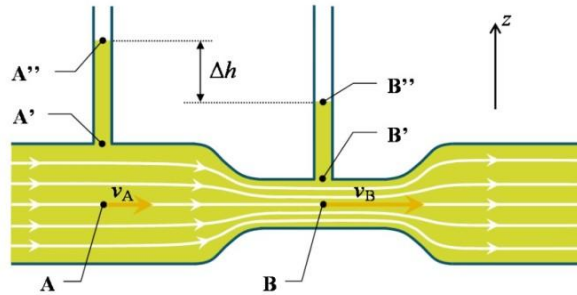
$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Exercice : Redémontrer la relation de Bernoulli entre deux points quelconques du fluide (pas forcément sur la même ligne de courant) sous les hypothèses suivantes : écoulement parfait, stationnaire, homogène, incompressible et irrotationnel ; la seule force extérieure est la force de pesanteur supposée uniforme ; étude dans le référentiel du laboratoire galiléen ; axe (Oz) vertical ascendant.

c Exemples d'application

i) Effet Venturi

L'effet Venturi se manifeste lors du rétrécissement d'une conduite.



Considérons un fluide parfait en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Entre deux points d'une même ligne de courant, l'application de la relation de Bernoulli conduit à :

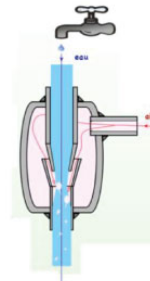
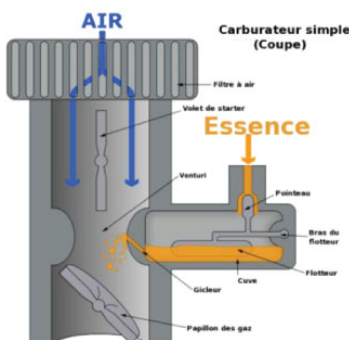
$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \iff P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

Or, par conservation du débit volumique : $v_B > v_A$. Donc : $P_B < P_A$

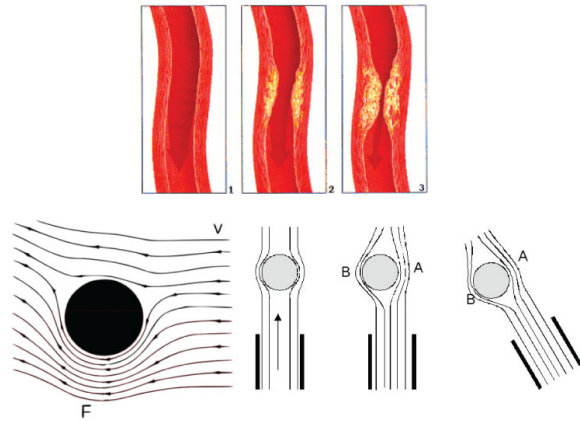
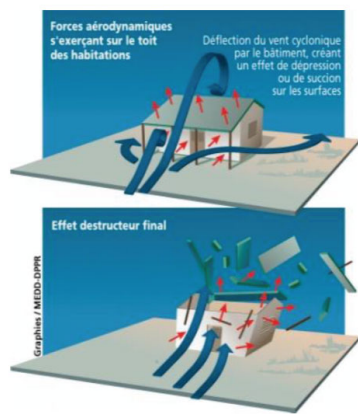
Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, un rétrécissement d'un tube de courant se traduit par une diminution de la pression. Cet effet se nomme **effet Venturi**.

De nombreux exemples peuvent être cités :

- dans le domaine technologique : l'injection d'essence dans le carburateur des voitures, la diminution de la portance des Formule 1, l'aspiration grâce à la trompe à eau en chimie, le fonctionnement de certains débitmètres, la portance des avions.

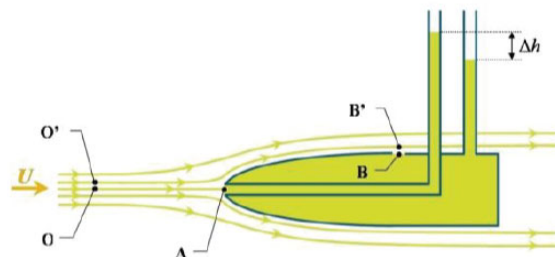


- manifestations "naturelles" : arrachement des toitures par grand vent, athérosclérose (diminution du diamètre des artères localement par accumulation de lipides et tissus fibreux pouvant conduire à une sténose artérielle, voire une thrombose = obstruction totale du flux sanguin), l'effet Magnus des ballons.



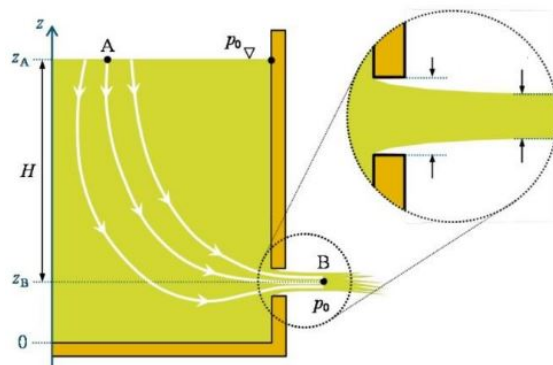
ii) Mesure de vitesse : sonde de Pitot (= sonde de Prandtl)

Un tube de Pitot est un système simple permettant la mesure de la vitesse d'un véhicule à l'aide d'une mesure de pression différentielle : une mesure de pression latéralement à l'écoulement (en B) et une mesure de pression frontalement à l'écoulement en A . Le fluide ne pénètre pas dans le tube de Pitot en A .



iii) Vidange quasi-statique de réservoir

Étudions la vidange d'un réservoir dont la surface libre est de section S très grande devant la section s de l'orifice de sortie.



On considère un écoulement parfait, incompressible et homogène, mais instationnaire. Néanmoins, à partir du moment où la vitesse v_ℓ au niveau de la surface libre est très petite devant la vitesse v_s de sortie ($v_\ell S = v_s s$ dans le cas d'un écoulement incompressible conduisant, avec $s \ll S$, à $v_\ell \ll v_s$), on pourra considérer l'écoulement comme *quasi-stationnaire*.

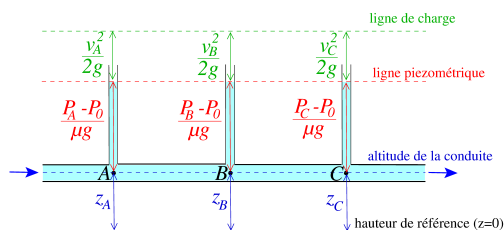
On peut alors conduire un calcul de temps de vidange du réservoir.

Exercice : Après avoir déterminé le lien entre $\frac{dH}{dt}$ et la vitesse v_s , intégrer l'équation différentielle obtenue pour en déduire le temps de vidange en fonction de la hauteur initiale du récipient H_0 .

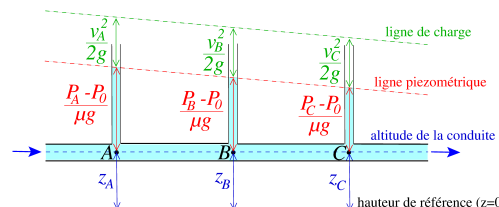
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait

Afin de revenir sur la validité du modèle de l'écoulement parfait, prenons le cas simple d'une conduite de section constante, horizontale, avec un écoulement stationnaire, homogène et incompressible ($w_u = 0$).

Cas de l'écoulement parfait :



Cas de l'écoulement réel (et donc visqueux) (cf. chapitre MF3) :



Dans le cas d'un écoulement visqueux, la pression diminue le long de la conduite : on parle de perte de charges ΔP . Cette perte de charges est associée à une perte d'énergie volumique, liée à des actions intérieures résistives. Cela met en évidence un des principaux défauts du modèle de l'écoulement parfait :

Dans un écoulement parfait et incompressible, la puissance des actions intérieures est nulle.

II Bilan macroscopique de quantité de mouvement

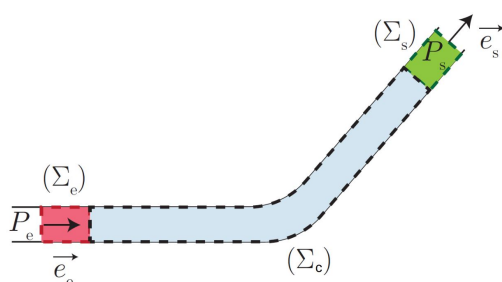
Pour un système ouvert, il est impossible d'appliquer directement la loi de la quantité de mouvement (= le PFD). On se ramène alors à un système fermé pour lequel on évalue la quantité de mouvement à l'instant t et à l'instant $t + dt$.

Dans le cours, nous allons traiter deux exemples qui rassemblent toutes les méthodes à maîtriser. L'hypothèse de fluide en écoulement parfait peut alors être utile pour :

- s'assurer que la vitesse est uniforme sur une section droite de l'écoulement, ce qui permet un calcul facile du débit volumique.
- appliquer la relation de Bernoulli.

II.1 Force exercée sur une canalisation coudée

Étudions une canalisation coudée, avec un écoulement parfait, incompressible et homogène en régime stationnaire. La conduite est de section S constante. On cherche la résultante des forces $\vec{F}_{fluide \rightarrow can}$ que le fluide exerce sur une portion de canalisation.

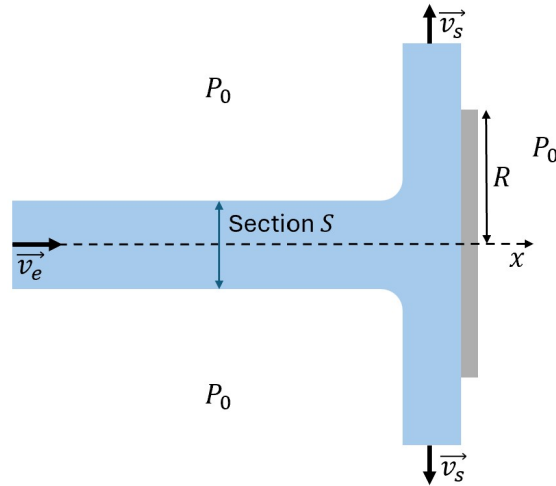


Les pressions sont notées P_e à l'entrée et P_s à la sortie. Elles sont uniformes sur les sections d'aire S . On note $\vec{e}_e = \frac{\vec{v}_e}{||\vec{v}_e||}$ et $\vec{e}_s = \frac{\vec{v}_s}{||\vec{v}_s||}$ les vecteurs unitaires orthogonaux aux sections à l'entrée et à la sortie.

II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque

Etudions désormais une situation dans laquelle un jet d'eau cylindrique de section S est envoyé sur une plaque circulaire de rayon R . On note $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$ la vitesse de l'eau en amont de la plaque. La pression atmosphérique P_0 est uniforme. L'écoulement est supposé incompressible et homogène, et on considérera la vitesse uniforme sur une section droite de l'écoulement. On réalise l'étude en régime stationnaire. On néglige la pesanteur.

Un opérateur maintient la plaque immobile. Quelle force $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$ l'opérateur doit-il alors exercer sur la plaque ?



a Une première résolution

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ à la vitesse $\vec{v}_e$).
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt$ à la vitesse $\vec{v}_s$).

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

Par additivité :

- à l'instant t : $\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t) + \delta \vec{p}_e$
- à l'instant $t + dt$: $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) + \delta \vec{p}_s$

En régime stationnaire : $\vec{p}_{\Sigma_c}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt)$

iii) Bilan des forces extérieures

- Poids (négligé)
- Force de pression $\vec{F}_p$
- Force de la plaque sur le fluide $\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}}$

Comment calculer la résultante des forces de pression $\vec{F}_p$?

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned}\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} &= \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} \\ \Rightarrow -\rho S v_e^2 \vec{e}_x &= P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} \\ \Rightarrow \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} &= -(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x\end{aligned}$$

Réponse à la question posée

Pour rappel, on cherche la force $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$ que l'opérateur doit exercer sur la plaque. On va alors appliquer le PFD à l'équilibre sur la plaque (système fermé).

Bilan des forces extérieures :

- $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$
- $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} = +(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x$ d'après le principe des actions réciproques
- $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{plaque}} = -P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$

Le PFD appliqué dans le référentiel terrestre galiléen donne donc :

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} + \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{plaque}} \\ \Rightarrow \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} &= -\rho S v_e^2 \vec{e}_x\end{aligned}$$

b Une deuxième résolution

i) Définition d'un système fermé

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

iii) Bilan des forces extérieures

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned}\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} &= \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} \\ \Rightarrow \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} &= -\rho S v_e^2 \vec{e}_x\end{aligned}$$

III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique

Pour terminer ce chapitre, nous allons de nouveau effectuer un bilan d'énergie sur un dispositif actif, mais en utilisant cette fois la loi de l'énergie cinétique. Cette vision mécanique (plutôt que thermodynamique) du problème convient, car l'écoulement étudié étant parfait, l'énergie interne des particules de fluide se conserve au cours de leur mouvement.

Reprenons l'exemple de la pompe puisant l'eau au fond d'un puits de profondeur $z_e = -h$. La pompe étant posée sur le sol, l'altitude de sortie $z_s = 0$. L'eau dans le puits étant quasi-statique, on en déduit que la pression en entrée du tuyau de pompage est $P_e = P_0 + \rho gh$ avec P_0 la pression atmosphérique. En sortie de pompe, la pression est P_s . La section du tuyau avant la pompe est S et se réduit à s en sortie de pompe. On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. On note D_v le débit volumique de l'écoulement (qui se conserve). On cherche la puissance utile P_u que la pompe fournit au fluide.

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse $\vec{v}_e$).
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse $\vec{v}_s$).

Le système étant fermé, on va pouvoir appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre t et $t + dt$:

On admet alors le résultat suivant :

Puissance des forces intérieures pour un écoulement parfait et incompressible

Pour un écoulement **parfait** et **incompressible**, la puissance des forces intérieures au fluide est nulle.

ii) Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de (Σ) durant dt

On raisonne de manière similaire pour l'énergie potentielle, liée ici seulement à l'énergie potentielle de pesanteur.

Par additivité :

- à l'instant t , $E_p(t) = E_{p,\Sigma_c}(t) + \delta E_{p,e}$
- à l'instant $t + dt$, $E_p(t + dt) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt) + \delta E_{p,s}$

En régime stationnaire : $E_{p,\Sigma_c}(t) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt)$.

Donc :

$$E_p(t + dt) - E_p(t) = \delta E_{p,s} - \delta E_{p,e} = \delta m_s g z_s^0 - \delta m_e g z_e = \rho D_v dt gh$$

iii) Bilan des travaux non conservatifs

iv) Application du TEC dans le référentiel terrestre galiléen

On retrouve bien la même expression que celle déterminée avec la vision thermodynamique du bilan d'énergie.