

Bilans dans des écoulements parfaits et stationnaires

Sommaire

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique	2
I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif	2
I.2 Relation de Bernoulli	3
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait	7
II Bilan macroscopique de quantité de mouvement	8
II.1 Force exercée sur une canalisation coudée	8
II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque	9
III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique	12
Exercices	14

Questions de cours

- Démontrer la relation de Bernoulli à partir de l'accélération convective écrite sous la forme $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ en présentant rigoureusement l'ensemble des hypothèses.
- Décrire l'effet Venturi : principe, applications.
- Sur l'exemple d'une canalisation coudée, présenter un bilan de quantité de mouvement. En déduire la force exercée sur la conduite.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter un bilan d'énergie cinétique à partir d'un système ouvert.

Prise de notes : Exemple de la pompe à essence : citerne enterrée sous la station service. Opérateur demande l'essence : démarrage d'une pompe pour amener l'essence dans le véhicule de l'opérateur. Problématique : quelle va être la puissance consommée par la pompe pour réaliser cette distribution ? Cet odg impacte forcément le choix de la pompe, son dimensionnement...



Objectifs du chapitre : réaliser des bilans d'énergie et de qté de mvt dans des fluides. Donc, on va avoir besoin des outils de thermo, de méca flu et de méca.

Comme on va construire des systèmes fermés entourant des éléments actifs (pompe par exemple), les bilans seront appelés **bilans macroscopiques**.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Connaître les hypothèses de la relation de Bernoulli, et l'appliquer sur de nombreux exemples pour comprendre sa praticité.
2. Passer d'un système ouvert (échange de matière du fait de l'écoulement) à un système fermé adapté aux bilans.
3. Effectuer un bilan de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique, à un système fermé durant dt , en régime stationnaire.

Pour des soucis de simplification, ce chapitre se limite à l'étude de fluides en **écoulement parfait et stationnaire**.

Notation : Dans ce chapitre (et contrairement au chapitre T3), la vitesse du fluide sera notée v . On note v_{mass} le volume massique.

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique

I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif

On considère que le fluide passe au travers d'un élément actif avec des pièces mobiles (pompe, turbine, etc) : le travail utile massique reçu par le fluide est noté $w_u \neq 0$.

Considérons un écoulement stationnaire. Isolons une ligne de courant. L'application du premier principe au fluide en écoulement entre deux points A et B de la ligne de courant de part et d'autre de l'élément actif conduit à :

$$[h + e_c + e_p]_A^B = w_u + q$$

On suppose l'écoulement parfait, il est donc adiabatique ($q = 0$) et réversible, c'est-à-dire isentropique ($ds = 0$). On suppose de plus l'écoulement incompressible. Donc

$du = Tds - Pdv_{mass} = 0$. Or, $h = u + Pv_{mass} = u + \frac{P}{\rho}$ avec $\rho = \text{cte}$ la masse volumique, si l'écoulement est homogène. Donc $h_B - h_A = \frac{P_B}{\rho} - \frac{P_A}{\rho}$.

Enfin, si le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen où l'énergie potentielle de pesanteur est la seule énergie potentielle du fluide, en notant (Oz) l'axe vertical ascendant, on aboutit à la relation :



$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right]_A^B = w_u$$

Pour reformuler cette relation en terme de puissance utile P_u , il suffit de la multiplier par le débit massique :

$$D_m \left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right]_A^B = D_m w_u = \frac{\delta m}{dt} w_u = P_u$$



Application à la puissance d'une pompe

Considérons une pompe (altitude $z = 0$) qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $z = -h = -5\text{ m}$. On considère que l'eau dans le puits est quasiment statique, même lors du pompage. La section du tuyau avant la pompe est de $S = 100\text{ cm}^2$, et se réduit en sortie de la pompe à $s = 10\text{ cm}^2$. En considérant un débit volumique de $D_v = 10\text{ L s}^{-1}$, déterminer la puissance P_u de la pompe en régime stationnaire, sachant que la pression en sortie est de 2.5 bar.

Schéma du dispositif

On considère l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. Entre deux points A et B d'une ldc :

$$D_m \left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B \right) - \left(\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A \right) = P_u$$

Le fluide dans le puits est quasi-statique : $P_A = P_0 - \rho gz_A$. Donc :



$$D_m \left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 \right) - \left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 \right) = P_u$$

De plus, par conservation du débit volumique : $D_v = Sv_A = sv_B$. Et $D_m = \rho D_v$.
Finalement :

$$P_u = D_v \left(P_B - P_0 + \frac{1}{2}\rho D_v^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) \right) = 2.0\text{ kW}$$

Odg cohérent ! (En tenant compte du rendement de conversion, il y a des chances que l'on atteigne une puissance électrique de 3 kW.)

I.2 Relation de Bernoulli

a Enoncé

En supposant l'absence de parties mobiles dans le fluide, $w_u = 0$, on aboutit, avec les mêmes hypothèses que précédemment, à :

$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right]_A^B = 0$$

Relation de Bernoulli

Lorsque l'écoulement est **parfait, stationnaire, homogène, incompressible**, étudié dans un référentiel supposé **galiléen**, où la seule force volumique extérieure agissant sur le fluide est la **force de pesanteur** supposée uniforme, et où le fluide n'échange **pas de travail utile** avec l'extérieur, en considérant (Oz) l'**axe vertical ascendant** (♥ !), la **relation de Bernoulli** est vérifiée sur une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{cste}_{\text{ldc}}$$

Cette relation traduit la **conservation de l'énergie mécanique** volumique.

b Seconde démonstration de la relation de Bernoulli

On peut démontrer d'une autre façon la relation de Bernoulli.

Supposons un écoulement **parfait** où la seule force volumique extérieure agissant sur le fluide est la **force de pesanteur** supposée uniforme (donc pas de pièce mobile !). On oriente l'axe (Oz) vers le haut. Dans un référentiel **galiléen**, l'équation d'Euler (Navier-Stokes sans forces de viscosité) donne :

★

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad}(P) - \rho g \vec{e}_z$$

On suppose l'écoulement **stationnaire**, donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

Le formulaire d'analyse vectorielle fournit la relation suivante (à ne pas connaître) :

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Donc :

$$\rho \left(\text{grad} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) + \text{grad}(P) + \rho g \vec{e}_z = \vec{0}$$

On projette sur une ligne de courant de vecteur directeur $\vec{dl}$ colinéaire à $\vec{v}$:

$$\vec{dl} \cdot \left(\rho \text{grad} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \text{grad}(P) + \rho g \vec{e}_z \right) = 0$$

★

Supposons l'écoulement incompressible et homogène : $\rho = \text{cste}$. On peut alors reconnaître un gradient :

$$\vec{dl} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z \right) = 0$$

En intégrant entre deux points A et B d'une même **ligne de courant** :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Relation de Bernoulli

Exercice : Redémontrer la relation de Bernoulli entre deux points quelconques du fluide (pas forcément sur la même ligne de courant) sous les hypothèses suivantes : écoulement parfait, stationnaire, homogène, incompressible et irrotationnel ; la seule force extérieure est la force de pesanteur supposée uniforme ; étude dans le référentiel du laboratoire galiléen ; axe (Oz) vertical ascendant.

Equation d'Euler :

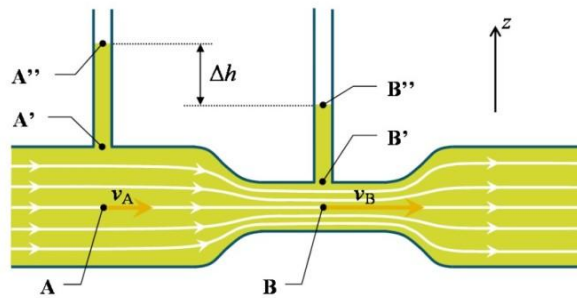
★
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) = -\text{grad}(P) - \rho g \vec{e}_z \Rightarrow \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 + P + \rho g z \right) = \vec{0}$$

Ainsi, la quantité $P + \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2 + \rho g z = \text{cste}$ dans tout le fluide.

c Exemples d'application

i) Effet Venturi

L'effet Venturi se manifeste lors du rétrécissement d'une conduite.



Considérons un fluide parfait en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Entre deux points d'une même ligne de courant, l'application de la relation de Bernoulli conduit à :

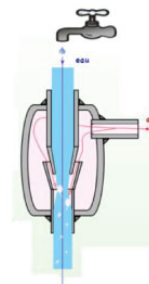
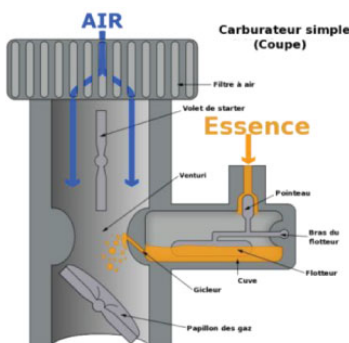
$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \iff P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

Or, par conservation du débit volumique : $v_B > v_A$. Donc : $P_B < P_A$

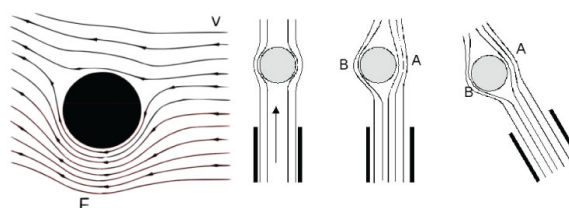
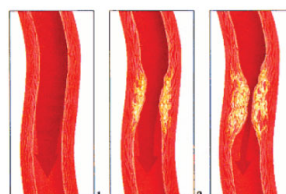
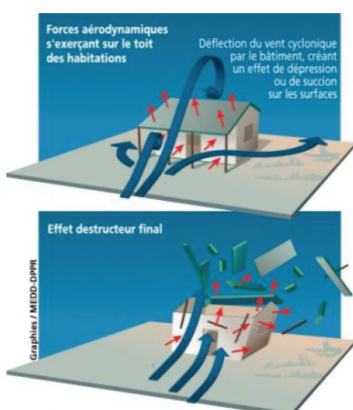
Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, un rétrécissement d'un tube de courant se traduit par une diminution de la pression. Cet effet se nomme **effet Venturi**.

De nombreux exemples peuvent être cités :

- dans le domaine technologique : l'injection d'essence dans le carburateur des voitures, la diminution de la portance des Formule 1, l'aspiration grâce à la trompe à eau en chimie, le fonctionnement de certains débitmètres, la portance des avions.



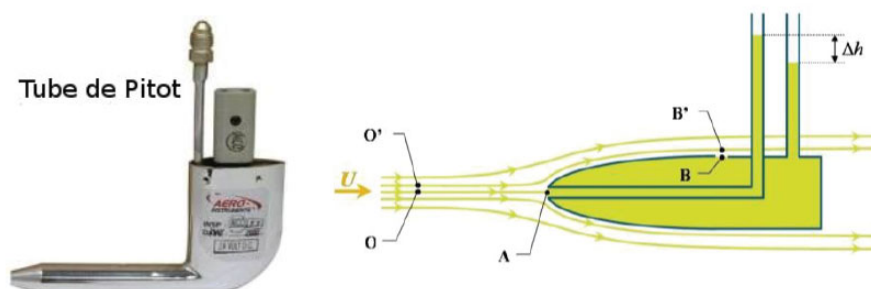
- manifestations "naturelles" : arrachement des toitures par grand vent, athérosclérose (diminution du diamètre des artères localement par accumulation de lipides et tissus fibreux pouvant conduire à une sténose artérielle, voire une thrombose = obstruction totale du flux sanguin), l'effet Magnus des ballons.



- ★ Manip de cours : balle de golf qui lévite. + Effet Magnus sur la balle des images ci-dessus.

ii) Mesure de vitesse : sonde de Pitot (= sonde de Prandtl)

Un tube de Pitot est un système simple permettant la mesure de la vitesse d'un véhicule à l'aide d'une mesure de pression différentielle : une mesure de pression latéralement à l'écoulement (en B) et une mesure de pression frontalement à l'écoulement en A . Le fluide ne pénètre pas dans le tube de Pitot en A .



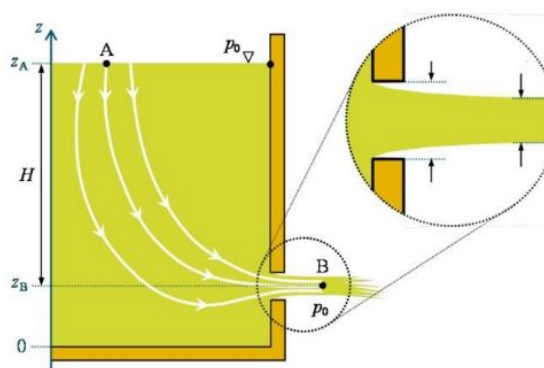
En appliquant le théorème de Bernoulli au fluide en écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :

- sur la ligne de courant OA , avec $v_A = 0$ et pas de changement d'altitude : $P_A = P_O + \frac{1}{2}\rho v^2$ (mesure dynamique) ;
- ★ sur la ligne de courant $O'B'$: on néglige la différence d'altitude (pièce de petite dimension) et de vitesse d'écoulement (tube de courant fin qui contient la ldc et qui garde la même surface), de sorte que $P_{O'} = P_{B'}$, soit comme les couples (B, B') et (O, O') sont proches, $P_B = P_O$ (mesure statique).

Ainsi $P_A - P_B \simeq \frac{1}{2}\rho v^2$

iii) Vidange quasi-statique de réservoir

Étudions la vidange d'un réservoir dont la surface libre est de section S très grande devant la section s de l'orifice de sortie.



On considère un écoulement parfait, incompressible et homogène, mais instationnaire. Néanmoins, à partir du moment où la vitesse v_ℓ au niveau de la surface libre est très petite devant la vitesse v_s de sortie ($v_\ell S = v_s s$ dans le cas d'un écoulement incompressible conduisant, avec $s \ll S$, à $v_\ell \ll v_s$), on pourra considérer l'écoulement comme *quasi-stationnaire*.

On va donc pouvoir appliquer la relation de Bernoulli à une ligne de courant, entre A et B . La pression au niveau de la surface libre est $P_A = P_0$. On suppose également que la pression en B est égale à P_0 (jet libre, dont la pression est supposée constante sur une section, car on néglige la pesanteur sur le rayon du jet libre). Ainsi

$$\star \quad P_0 + \frac{1}{2}\rho v_\ell^2 + \rho g H(t) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + 0 \quad (\text{I.1})$$

conduit à la formule de Torricelli lorsqu'on néglige v_ℓ devant v_s :

$$\boxed{v_s = \sqrt{2gH(t)}} \quad (\text{I.2})$$

On peut alors conduire un calcul de temps de vidange du réservoir.

Exercice : Après avoir déterminé le lien entre $\frac{dH}{dt}$ et la vitesse v_s , intégrer l'équation différentielle obtenue pour en déduire le temps de vidange en fonction de la hauteur initiale du récipient H_0 .

On peut exprimer le lien entre v_ℓ et la dérivée de H : $v_\ell = -\frac{dH}{dt}$ (on définit une vitesse positive). Soit avec la conservation du débit :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{s}{S}v_s = -\frac{s}{S}\sqrt{2gH(t)} \quad (\text{I.3})$$

$\star$ puis par séparation des variables :

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt \Rightarrow 2\left[\sqrt{H}\right]_{H_0}^0 = -\frac{s}{S\sqrt{2g}}\Delta t \quad (\text{I.4})$$

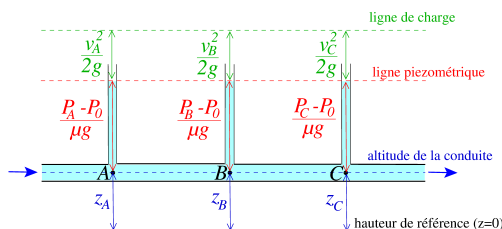
c'est-à-dire :

$$\boxed{\Delta t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}} \quad (\text{I.5})$$

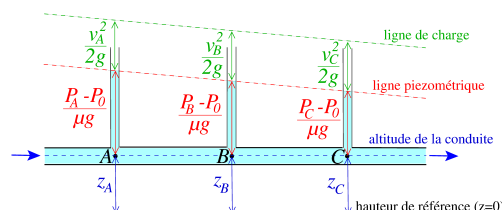
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait

Afin de revenir sur la validité du modèle de l'écoulement parfait, prenons le cas simple d'une conduite de section constante, horizontale, avec un écoulement stationnaire, homogène et incompressible ($w_u = 0$).

Cas de l'écoulement parfait :



Cas de l'écoulement réel (et donc visqueux) (cf. chapitre MF3) :



Dans le cas d'un écoulement visqueux, la pression diminue le long de la conduite : on parle de perte de charges ΔP . Cette perte de charges est associée à une perte d'énergie volumique, liée à des actions intérieures résistives. Cela met en évidence un des principaux défauts du modèle de l'écoulement parfait :

Dans un écoulement parfait et incompressible, la puissance des actions intérieures est nulle.

$\star$ *Prise de notes :* La loi de Bernoulli n'est plus valide dans un écoulement visqueux,

II Bilan macroscopique de quantité de mouvement

Pour un système ouvert, il est impossible d'appliquer directement la loi de la quantité de mouvement (= le PFD). On se ramène alors à un système fermé pour lequel on évalue la quantité de mouvement à l'instant t et à l'instant $t + dt$.

Dans le cours, nous allons traiter deux exemples qui rassemblent toutes les méthodes à maîtriser. L'hypothèse de fluide en écoulement parfait peut alors être utile pour :

- s'assurer que la vitesse est uniforme sur une section droite de l'écoulement, ce qui permet un calcul facile du débit volumique.
- appliquer la relation de Bernoulli.

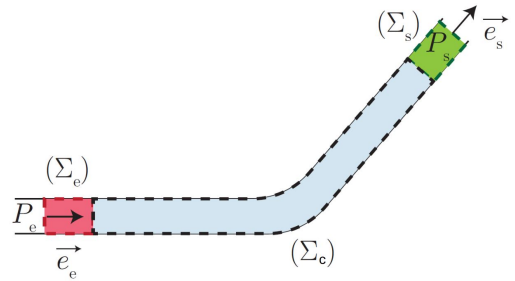
II.1 Force exercée sur une canalisation coudée

Étudions une canalisation coudée, avec un écoulement parfait, incompressible et homogène en régime stationnaire. La conduite est de section S constante. On cherche la résultante des forces $\vec{F}_{fluide \rightarrow can}$ que le fluide exerce sur une portion de canalisation.

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c), et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle pendant dt , de masse $\delta m_e = D_m dt$ et de vitesse $\vec{v}_e$;
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c), et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle pendant dt , de masse $\delta m_s = D_m dt = \delta m_e$ et de vitesse $\vec{v}_s$;



S'agissant d'un système fermé, on peut lui appliquer la loi de la quantité de mouvement, à la limite où dt tend vers 0 :

★

$$\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Les pressions sont notées P_e à l'entrée et P_s à la sortie. Elles sont uniformes sur les sections d'aire S . On note $\vec{e}_e = \frac{\vec{v}_e}{\|\vec{v}_e\|}$ et $\vec{e}_s = \frac{\vec{v}_s}{\|\vec{v}_s\|}$ les vecteurs unitaires orthogonaux aux sections à l'entrée et à la sortie.

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

Par additivité :

- à l'instant t , $\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t) + D_m dt \vec{v}_e$;
 - à l'instant $t + dt$, $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) + D_m dt \vec{v}_s$;
- En régime stationnaire, $\vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t)$, d'où :

★

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)dt$$

Or, l'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique : $D_v = \|\vec{v}_e\|S = \|\vec{v}_s\|S \Rightarrow \|\vec{v}_e\| = \|\vec{v}_s\| = v$. Ainsi :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = D_m v(\vec{e}_s - \vec{e}_e)dt$$

iii) Bilan des forces extérieures

- Poids (négligé)
- Forces de pressions $\vec{F}_p = P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s$
- Résultante des forces de la canalisation sur le fluide $\vec{F}_{can \rightarrow fl} = -\vec{F}_{fl \rightarrow can}$ (attention : le système est le fluide !) (Pas de viscosité comme écoulement parfait, mais force de pression car coudé !)

★

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m v(\vec{e}_s - \vec{e}_e) = P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s - \vec{F}_{fl \rightarrow can} \quad (II.1)$$

★

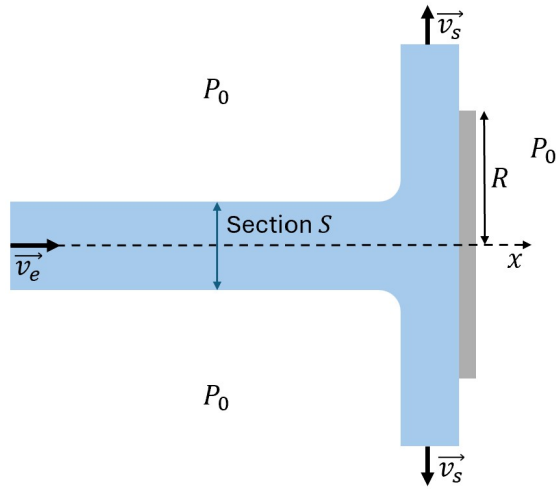
En négligeant l'influence de la pesanteur, la loi de Bernoulli donne : $P_e = P_s = P$. Donc, avec $D_m = \rho D_v = \rho v S$:

$$\vec{F}_{fl \rightarrow can} = (P + \rho v^2)S(\vec{e}_e - \vec{e}_s) \quad (II.2)$$

II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque

Etudions désormais une situation dans laquelle un jet d'eau cylindrique de section S est envoyé sur une plaque circulaire de rayon R . On note $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$ la vitesse de l'eau en amont de la plaque. La pression atmosphérique P_0 est uniforme. L'écoulement est supposé incompressible et homogène, et on considérera la vitesse uniforme sur une section droite de l'écoulement. On réalise l'étude en régime stationnaire. On néglige la pesanteur.

Un opérateur maintient la plaque immobile. Quelle force $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$ l'opérateur doit-il alors exercer sur la plaque ?



a Une première résolution

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ à la vitesse $\vec{v}_e$).
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt$ à la vitesse $\vec{v}_s$).

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

Par additivité :

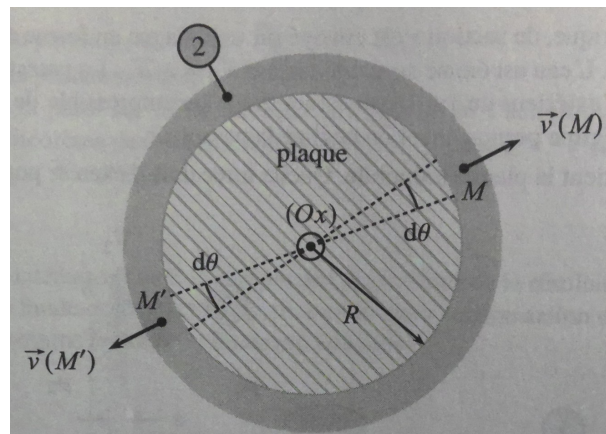
- à l'instant t : $\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t) + \delta \vec{p}_e$
- à l'instant $t + dt$: $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) + \delta \vec{p}_s$

En régime stationnaire : $\vec{p}_{\Sigma_c}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt)$

En entrée : $\delta \vec{p}_e = D_m dt \vec{v}_e = (\rho v_e S) dt v_e \vec{e}_x = \rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$

En sortie, il faut faire attention au fait que la direction du vecteur vitesse $\vec{v}_s$ dépend du point M considéré.

★



Du fait de la symétrie autour de l'axe (Oz), $\delta \vec{p}_s = \vec{0}$.

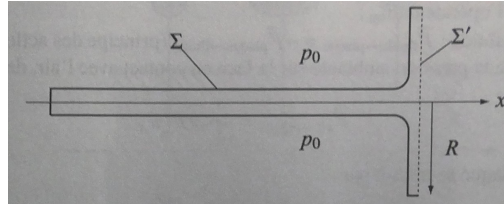
Ainsi :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = -\rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$$

iii) Bilan des forces extérieures

- Poids (négligé)
- Force de pression $\vec{F}_p$
- Force de la plaque sur le fluide $\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}}$

Comment calculer la résultante des forces de pression $\vec{F}_p$?



(Faire direct le schéma pour indiquer (S) et représenter $d\vec{S}$.)

★

On ne peut pas calculer directement $\vec{F}_p = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$ car on ne connaît pas la forme exacte de la surface de contrôle...

On utilise alors le fait que la pression P_0 est uniforme : sur une surface fermée, la résultante des forces de pression sera donc nulle. Considérons la surface fermée $(S) \cup (S')$. Dans la situation fictive où la pression P_0 entourerait cette surface fermée, on aurait alors :

$$\oiint_{(S) \cup (S')} P_0 d\vec{S} = \vec{0} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S} + \underbrace{\iint_{(S')} P_0 d\vec{S}}_{= -P_0 \pi R^2 \vec{e}_x}$$

Finalement :

$$\vec{F}_p = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$$

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} &= \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} \\ \Rightarrow -\rho S v_e^2 \vec{e}_x &= P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} \\ \Rightarrow \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} &= -(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Réponse à la question posée

Pour rappel, on cherche la force $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$ que l'opérateur doit exercer sur la plaque. On va alors appliquer le PFD à l'équilibre sur la plaque (système fermé).

Bilan des forces extérieures :

- $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$
- $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}} = +(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x$ d'après le principe des actions réciproques
- $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{plaque}} = -P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$

Le PFD appliqué dans le référentiel terrestre galiléen donne donc :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} + \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{plaque}} \\ \Rightarrow \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} &= -\rho S v_e^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

b Une deuxième résolution

- ★ *Prise de notes :* Ce qui rend la résolution précédente particulièrement longue est la détermination de $\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}}$. On peut résoudre le problème posé sans déterminer cette force en incluant la plaque dans le système : la force précédente devient alors une force intérieure, inutile dans l'application du PFD !

i) Définition d'un système fermé

- ★
- à l'instant t : $(\Sigma_c) \cup (\Sigma_e) \cup (\text{plaque})$
 - à l'instant $t + dt$: $(\Sigma_c) \cup (\Sigma_s) \cup (\text{plaque})$

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

- ★ Identique, car la plaque est immobile : $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = -\rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$

iii) Bilan des forces extérieures

- ★
- Poids (négligé)
 - Résultante des forces de pression $\vec{F}_p$. La surface totale du système étant fermée et en contact avec la pression uniforme P_0 : $\vec{F}_p = \vec{0}$.
 - Force de l'opérateur sur la plaque $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{op} \rightarrow \text{plaque}} = -\rho S v_e^2 \vec{e}_x$$

III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique

Pour terminer ce chapitre, nous allons de nouveau effectuer un bilan d'énergie sur un dispositif actif, mais en utilisant cette fois la loi de l'énergie cinétique. Cette vision mécanique (plutôt que thermodynamique) du problème convient, car l'écoulement étudié étant parfait, l'énergie interne des particules de fluide se conserve au cours de leur mouvement.

Reprenons l'exemple de la pompe puisant l'eau au fond d'un puits de profondeur $z_e = -h$. La pompe étant posée sur le sol, l'altitude de sortie $z_s = 0$. L'eau dans le puits étant quasi-statique, on en déduit que la pression en entrée du tuyau de pompage est $P_e = P_0 + \rho gh$ avec P_0 la pression atmosphérique. En sortie de pompe, la pression est P_s . La section du tuyau avant la pompe est S et se réduit à s en sortie de pompe. On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. On note D_v le débit volumique de l'écoulement (qui se conserve). On cherche la puissance utile P_u que la pompe fournit au fluide.

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse $\vec{v}_e$).

- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse $\vec{v}_s$).

Le système étant fermé, on va pouvoir appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre t et $t + dt$:

$$dE_c + dE_p = E_c(t + dt) - E_c(t) + E_p(t + dt) - E_p(t) = \delta W_{nc}$$

★



Le système est déformable (fluide !), donc δW_{nc} est le travail de toutes les forces non conservatives, y compris les forces **intérieures**.

On admet alors le résultat suivant :

Puissance des forces intérieures pour un écoulement parfait et incompressible

Pour un écoulement **parfait et incompressible**, la puissance des forces intérieures au fluide est nulle.

ii) Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de (Σ) durant dt

Par additivité :

- à l'instant t , $E_c(t) = E_{c,\Sigma_c}(t) + \delta E_{c,e}$
 - à l'instant $t + dt$, $E_c(t + dt) = E_{c,\Sigma_c}(t + dt) + \delta E_{c,s}$
- En régime stationnaire : $E_{c,\Sigma_c}(t) = E_{c,\Sigma_c}(t + dt)$. Donc,

★

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta E_{c,s} - \delta E_{c,e} = \frac{1}{2} \rho D_v dt v_s^2 - \frac{1}{2} \rho D_v dt v_e^2$$

$$\text{Or, } D_v = v_e S = v_s s. \text{ Donc : } E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2} \rho D_v^3 dt \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right)$$

On raisonne de manière similaire pour l'énergie potentielle, liée ici seulement à l'énergie potentielle de pesanteur.

Par additivité :

- à l'instant t , $E_p(t) = E_{p,\Sigma_c}(t) + \delta E_{p,e}$
- à l'instant $t + dt$, $E_p(t + dt) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt) + \delta E_{p,s}$

En régime stationnaire : $E_{p,\Sigma_c}(t) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt)$.

Donc :

$$E_p(t + dt) - E_p(t) = \delta E_{p,s} - \delta E_{p,e} = \delta m_s g z_s^0 - \delta m_e g z_e = \rho D_v dt gh$$

iii) Bilan des travaux non conservatifs

★

- Forces de pression : $\delta W_p = P_e S v_e dt - P_s s v_s dt = (P_e - P_s) D_v dt$
- Force de la pompe sur le fluide : $\delta W_{pompe \rightarrow fluide} = P_u dt$
- Forces intérieures au fluide, de puissance nulle, car l'écoulement est parfait et incompressible

iv) Application du TEC dans le référentiel terrestre galiléen

★

$$\begin{aligned} E_c(t + dt) - E_c(t) + E_p(t + dt) - E_p(t) &= \delta W_p + \delta W_{pompe \rightarrow fluide} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho D_v^3 dt \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) + \rho D_v dt gh &= (P_e - P_s) D_v dt + P_u dt \\ \Rightarrow P_u &= (P_s - P_0) D_v + \frac{1}{2} \rho D_v^3 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien la même expression que celle déterminée avec la vision thermodynamique du bilan d'énergie.