

Diffusion thermique

Sommaire

I	Passer d'une description microscopique à une description macroscopique	2
I.1	Trois modes de transferts thermiques	2
I.2	Trois échelles de description de la matière : l'équilibre thermodynamique local . . .	3
I.3	Champs intensifs	3
I.4	Puissance thermique traversant une surface orientée	4
II	Équation de conservation de l'énergie	4
II.1	Bilan d'énergie à 1D en coordonnées cartésiennes	4
II.2	Présence d'un terme source supplémentaire	5
II.3	Bilan d'énergie à 1D radiale en coordonnées cylindriques ou sphériques	5
II.4	Équation de conservation de l'énergie dans le cas général 3D	6
III	Expression du vecteur densité de courant thermique : loi phénoménologique de Fourier	6
IV	Équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur)	6
IV.1	Établissement de l'équation de la diffusion thermique	6
IV.2	Analogies avec les autres phénomènes de transport	7
V	Conditions aux limites	7
V.1	Continuité des flux thermiques	8
V.2	Paroi calorifugée	8
V.3	Contact parfait	8
V.4	Transfert conducto-convectif	8
VI	Étude en régime stationnaire sans terme source	9
VI.1	Résolution dans le cas 1D cartésien	9
VI.2	Résistance thermique	9
VI.3	Autres calculs de résistances thermiques	11
VII	Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique	12
	Exercices	14

Questions de cours

- Vecteur densité de courant thermique, flux thermique, loi de Fourier : énoncé, interprétation physique, ord des conductivités (air, eau, béton, acier).
- Effectuer un bilan d'énergie à une dimension (en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique, au choix du colleur). Interpréter physiquement.
- Établir l'équation de la diffusion thermique à trois dimensions, en partant de l'équation de conservation de l'énergie. Interpréter physiquement.
- Présenter les différents types de conditions aux limites (interface entre deux milieux, paroi calorifugée, contact parfait, transfert conducto-convectif du type $j_Q = h(T_s - T_f)$).
- Régime stationnaire de diffusion thermique : calcul du champ de température et du flux thermique (cartésien selon \vec{e}_x , cylindrique ou sphérique selon \vec{e}_r , au choix du colleur).
- Notion de résistance thermique : définition, condition d'utilisation, associations, calcul en géométrie cartésienne à 1D.

Prise de notes : Le premier principe $\Delta E = W + Q$ fait intervenir deux formes de transfert d'énergie : ce qui n'est pas clairement identifiable à un travail (W) est appelé transfert thermique (Q). En réalité le transfert thermique est une somme de travaux liés à des déplacements microscopiques, qu'on ne peut connaître en détail et donc calculer. ★ L'objectif de ce chapitre est de décrire en détails l'un des modes de transfert thermique : la diffusion thermique. On reconnaîtra de nombreuses analogies avec la diffusion de particules.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Établir l'équation de la diffusion thermique à une dimension, dans tous les systèmes de coordonnées possibles.
2. Identifier les fortes analogies du transfert thermique avec le transport de particules (T2), le transport de charges (EM1) et le transport de masse (MF1).
3. Énoncer les conditions d'applications de la notion de résistance thermique et l'utiliser.

I Passer d'une description microscopique à une description macroscopique

I.1 Trois modes de transferts thermiques

a Le rayonnement

Un corps chaud émet un rayonnement électromagnétique (qui n'a donc pas besoin de milieu matériel pour se propager), d'après la théorie du corps noir. Ce mode de transfert thermique sera le centre du prochain chapitre de thermodynamique (T5).

b La convection

Il s'agit d'un mouvement d'ensemble de la matière (vitesse mésoscopique non nulle), qui emporte avec elle son énergie interne. Elle a lieu uniquement au sein d'un fluide. La convection peut être étudiée avec les outils de la mécanique des fluides. On distingue :

- la convection naturelle liée à un gradient de température, dont le moteur est la poussée d'Archimède (la densité du fluide a tendance à diminuer avec la température). Par exemple l'échauffement de l'air au niveau d'un radiateur va provoquer sa montée, l'air froid descendant et se faisant chauffer à son tour ;
- la convection forcée lorsqu'on provoque le déplacement du fluide. C'est par exemple le cas avec les ventilateurs : le renouvellement forcé de la couche d'air au-dessus d'un processeur d'ordinateur permet d'améliorer le transfert thermique du solide vers le gaz.

Pour étudier les transferts thermiques entre le fluide et l'extérieur, on suppose le régime d'écoulement stationnaire et on applique le 1er principe des fluides en écoulement stationnaire (cf. chapitre T3).

c La conduction ou diffusion thermique

L'expérience de chauffage des extrémités de tiges métalliques de natures différentes montre d'une part qu'il y a un flux d'énergie des températures élevées vers les températures basses, tendant à uniformiser la température, le tout **sans déplacement macroscopique de matière** (vitesse mésoscopique nulle). D'autre part on constate que le temps d'uniformisation, souvent assez long (échelle de la minute voire plus) est différent selon le matériau, ce que l'on va tenter de quantifier par la suite.

D'un point de vue microscopique, ce phénomène s'explique par l'agitation thermique des atomes, qui se transmet de proche en proche du fait des collisions.

I.2 Trois échelles de description de la matière : l'équilibre thermodynamique local

Prenons un exemple courant : on étudie le mur qui sépare une habitation de l'extérieur. Ce mur fait $L = 50$ cm de large. La température intérieure doit rester à 20°C , alors que la température extérieure oscille entre 0°C (la nuit) et 10°C (vers 14 h) (évolution journalière sur une durée $T = 24$ h).

Le mur est un système hors équilibre (température non stationnaire et uniforme). Or, les lois de la thermodynamique ne s'appliquent qu'entre deux états d'équilibre. On cherche donc un sous-système avec une température "quasiment" uniforme que l'on étudiera entre deux instants où il sera "quasiment" à l'équilibre.

Notons dx la taille de ce sous-système et dt l'intervalle de temps entre les deux instants de "quasi-équilibre".

Il faut bien sûr vérifier $dx \ll L$ et $dt \ll T$ (le mur global est hors équilibre).

Mais attention, on ne peut pas choisir dx et dt aussi petits que l'on veut. En effet, il faut avoir un grand nombre de collisions entre les particules pour atteindre un état d'équilibre. On introduit alors le l.p.m, qui est la distance parcourue par une particule entre deux collisions : $l.p.m. \ll dx$.

De même, on introduit le temps moyen entre deux collisions $\tau_c \sim \frac{l.p.m.}{u^*}$ (u^* : vitesse quadratique moyenne) : $\tau_c \ll dt$.

Équilibre thermodynamique local

Dans un système Σ globalement hors d'équilibre, l'**équilibre thermodynamique local** est réalisé dans tous les sous-systèmes de Σ à condition que l'on puisse distinguer des échelles spatiales et temporelles nettement séparées en ordre de grandeur :

$$l.p.m. \ll dx \ll L \quad \text{et} \quad \tau_c \ll dt \ll T$$

avec :

- $l.p.m.$ le libre parcours moyen $\sim 10^{-10}$ m (solides et liquides) à 10^{-7} m (gaz et électrons libres dans les conducteurs solides)
- L : taille macroscopique du système Σ entier
- τ_c la durée entre deux collisions $\sim 10^{-14}$ s (électrons libres) à 10^{-9} s (solides, gaz)
- T : temps caractéristique d'évolution du système Σ entier

Dans ce cas, les différents sous-systèmes de taille dx sont proches de l'équilibre thermodynamique entre deux instants séparés de dt .



Dans la suite, on n'appliquera le 1er principe qu'à un système mésoscopique (la température du système sera uniforme) entre les instants t et $t + dt$.

Remarque : L'équilibre thermodynamique local revient donc à supposer l'existence de l'échelle mésoscopique, à laquelle on se place toujours pour étudier les phénomènes de transport.

I.3 Champs intensifs

Les grandeurs énergétiques de thermodynamique sont des grandeurs extensives (énergie interne U , énergie mécanique E_m , capacité calorifique C , entropie S , etc.).

Définitions :

- Une grandeur A est extensive si sa valeur est proportionnelle à la "taille" du système. Autrement dit, si on multiplie par deux la quantité de matière $n \rightarrow 2n$ et le volume $V \rightarrow 2V$, alors $A \rightarrow 2A$.
- Une grandeur A est intensive si sa valeur ne dépend pas de la taille du système. Autrement dit, si $n \rightarrow 2n$ et $V \rightarrow 2V$, alors la valeur de la grandeur A n'est pas modifiée.
- Une grandeur A est additive si la valeur de A dans un système comprenant deux sous-

systèmes vaut $A_1 + A_2$, où A_1 est la valeur de A dans le sous-système 1 et A_2 celle dans le sous-système 2.

Comme on étudiera ici des sous-systèmes mésoscopiques (donc très petits), la formulation des lois de la diffusion thermique doit s'appuyer sur des grandeurs intensives. Par exemple, on utilisera :

- la température $T(M,t)$
- l'énergie interne massique $u(M,t) = \frac{dU}{dm}$
- la capacité calorifique massique $c(M,t)$
- la masse volumique $\rho(M,t)$

Remarque : On pourrait aussi définir des champs intensifs comme l'énergie interne volumique $u_v(M,t)$ ou la capacité calorifique volumique $c_v(M,t)$... mais ce n'est pas le choix que j'ai fait dans ce chapitre.

I.4 Puissance thermique traversant une surface orientée

Par analogie avec la définition du vecteur densité de flux de particules, on définit le vecteur **densité de courant thermique** \vec{j}_Q comme le vecteur tel que le transfert thermique δ^2Q traversant en dt une surface $d\vec{S}$ élémentaire orientée s'écrive :

$$\delta^2Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt$$

avec \vec{j}_Q exprimé en $W m^{-2}$.

On définit le flux thermique (ou courant thermique) à travers une surface (S) orientée comme le rapport entre l'énergie δQ traversant (S) pendant dt et le temps dt :

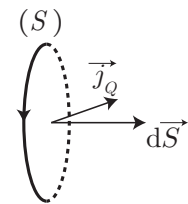
$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$$

s'exprimant en W. Il s'agit donc de la puissance thermique P_{th} traversant (S).

★

Ce débit n'est rien d'autre que le flux du vecteur \vec{j}_Q :

$$\Phi = P_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$



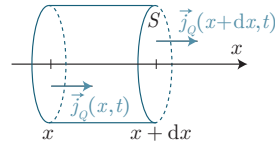
II Équation de conservation de l'énergie

II.1 Bilan d'énergie à 1D en coordonnées cartésiennes

Considérons un solide indéformable et immobile, homogène, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . Le solide est sous la forme d'un barreau cylindrique infiniment long calorifugé latéralement.

On rappelle que u est l'énergie interne massique.

1) Modélisation : On se place en coordonnées cartésiennes. Transferts thermiques uniquement selon l'axe (Ox) , c'est-à-dire $\vec{j}_Q = j_Q(x,y,z,t)\vec{e}_x$. Invariance par translation selon \vec{e}_x : $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{e}_x$ et $u(x,t)$. Afin de pouvoir utiliser la notion d'équilibre thermo local, on étudie les échanges thermiques d'une tranche d'épaisseur dx entre les instants t et $t + dt$, c'est-à-dire entre deux états « d'équilibre thermodynamique ». Appliquons le premier principe :



$$d^2U + \cancel{d^2E_c} + \cancel{d^2E_p} = \cancel{\delta^2W_{n.c.}} + \delta^2Q$$

2) Variation temporelle : Concernant d^2U :

★
$$d^2U = dm(u(x + dx,t) - u(x,t)) = \rho S dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

3) Echanges spatiaux : Concernant δ^2Q :

$$\begin{aligned} \delta^2Q &= \delta Q_{entrant}(x) - \delta Q_{sortant}(x + dx) = \left(\iint_{(S_x)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \right) dt - \left(\iint_{(S_{x+dx})} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \right) dt \\ &= j_Q(x,t)Sdt - j_Q(x + dx,t)Sdt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt \end{aligned}$$

4) Bilan : d'où avec $d^2U = \delta^2Q$:

$$\rho S dx dt \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt \iff \boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0}$$

On aboutit à une équation locale de conservation de l'énergie.

II.2 Présence d'un terme source supplémentaire

Dans le cas où, en plus d'un transfert thermique sur ses frontières en x et $x + dx$, le système est chauffé ou refroidi par une production d'énergie *in situ* (effet Joule, réaction chimique exo- ou endothermique, etc.), on peut ajouter un terme supplémentaire au bilan d'énergie :

$$\delta^2Q_{créé} = p_v S dx dt$$

Le bilan d'énergie devient alors

$$d^2U = \delta^2Q_{échangé} + \delta^2Q_{créé}$$

d'où l'équation locale suivante $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = p_v$.

Dans le cas de l'effet Joule dans un conducteur ohmique, on a démontré, au chapitre EM1, l'expression de la puissance volumique p_v fournie par le champ électrique aux électrons libres (puis au milieu solide) :

Puissance volumique p_v dans le cas de l'effet Joule

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \|\vec{j}\|^2$$

avec :

- \vec{j} le vecteur densité de courant électrique
- la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, où γ est la conductivité du métal

II.3 Bilan d'énergie à 1D radiale en coordonnées cylindriques ou sphériques

Exercice : À titre d'entraînement, effectuer le même raisonnement pour des géométries cylindriques et sphériques, en considérant des tranches infinitésimales (couronne cylindrique ou calotte sphérique) et des transferts thermiques selon \vec{e}_r uniquement. Montrer :

- en géométrie cylindrique $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_Q(r,t)) = p_v$;
- en géométrie sphérique $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_Q(r,t)) = p_v$.

★ Leur laisser le temps d'effectuer le raisonnement en coordonnées cylindriques.

II.4 Équation de conservation de l'énergie dans le cas général 3D

On retrouve la généralisation (déjà rencontrée pour le transport de particules) pour l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = p_v$$

III Expression du vecteur densité de courant thermique : loi phénoménologique de Fourier

On peut exprimer le vecteur densité de courant thermique à l'aide d'une loi semblable à la loi de Fick :

Loi phénoménologique de Fourier

Dans le cas où :

- les variations spatiales de température, caractérisées par $\overrightarrow{\text{grad}} T(M,t)$ ne sont pas trop intenses ;
- la température ne varie pas trop rapidement dans le temps;

le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q s'écrit :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

★

avec λ la conductivité thermique, en $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, caractéristique du matériau.

★ Le signe $-$ s'interprète *via* l'expérience : le transfert thermique spontané a lieu des zones chaudes vers les zones froides, donc à l'opposé du gradient de température.

Ordres de grandeur à connaître à 25 °C :

- $\lambda(\text{air}) = 2.6 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $\lambda(\text{eau}) = 0.60 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $\lambda(\text{béton}) = 0.92 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $\lambda(\text{acier}) = 16 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $\lambda(\text{cuivre}) = 4.0 \times 10^2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Dans toute la suite du chapitre, on étudiera des situations sans terme source : $p_v = 0$.

IV Équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur)

IV.1 Établissement de l'équation de la diffusion thermique

On cherche à obtenir une équation aux dérivées partielles portant uniquement sur la température. Il faut donc utiliser :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow \text{div } \vec{j}_Q = -\lambda \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) = -\lambda \Delta T$$

★

$$du = cdT \Rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

(GP ou PCII)

D'où en réutilisant l'équation locale :

Équation de la diffusion thermique

Pour un système homogène, de masse volumique ρ , capacité thermique massique c et conductivité thermique λ , la température dans le système $T(M,t)$ vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

★

en posant $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique, exprimée en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Comme on retrouve une équation de diffusion, les éléments énoncés dans le chapitre T2 de diffusion restent valables :

- cette équation traduit l'irréversibilité du phénomène, comme elle n'est pas invariante par renversement du temps ;
- cette équation différentielle aux dérivées partielles est linéaire, on peut donc lui appliquer le principe de superposition ;
- ★ en ordre de grandeur, la longueur caractéristique de diffusion thermique est reliée à D et au temps caractéristique τ par $L \sim \sqrt{D\tau}$.

Quelques ordres de grandeur à 25°C (à ne pas connaître) : $D(\text{air}) \simeq 2 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $D(\text{eau}) \simeq 1.4 \times 10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $D(\text{cuivre}) \simeq 1.1 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $D(\text{acier}) \simeq 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, $D(\text{bois}) \simeq 2 \times 10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

IV.2 Analogies avec les autres phénomènes de transport

	Diffusion de particules	Diffusion thermique
Débit de ...	particules $\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$	énergie $\Phi = P_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = \alpha$	$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = p_v$
Cause du transport :	gradient de densité particulaire n	gradient de température T
Loi phénoménologique locale	Fick : $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$	Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$
Equation de diffusion (sans terme source)	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$

	Conduction électrique	Fluide en écoulement
Débit de ...	charges $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$	masse $D_m = \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$
Équation de conservation locale	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_m = 0$
Cause du transport :	gradient de potentiel électrique V	force de pression ou de viscosité
Loi phénoménologique locale	Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$.

V Conditions aux limites

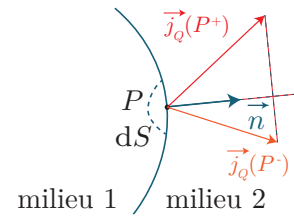
V.1 Continuité des flux thermiques

Considérons l'interface entre deux milieux différents, où l'on observe un flux thermique. Étant donné que l'interface est d'épaisseur nulle, elle ne stocke pas d'énergie. Il y a ainsi **continuité du flux thermique entre les deux milieux**, que l'on peut traduire par :

★

$$\begin{aligned} \Phi(P^-, t) &= \Phi(P^+, t) \\ \iff \vec{j}_Q(P^-, t) \cdot dS\vec{n} &= \vec{j}_Q(P^+, t) \cdot dS\vec{n} \end{aligned}$$

On a donc **continuité de la composante normale du vecteur \vec{j}_Q (i.e. de $\vec{j}_Q \cdot \vec{n}$) à l'interface.**



Par exemple entre deux milieux où la conduction est l'unique mode de transfert thermique, si on se place en géométrie unidimensionnelle on pourra écrire avec des notations évidentes :

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x_0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_0, t)$$



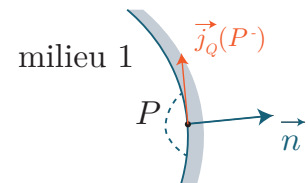
S'il y a continuité du flux thermique, il n'en est rien, de manière générale, pour la température !

V.2 Paroi calorifugée

Si une paroi est calorifugée, **aucun transfert thermique ne traverse cette paroi**, ce qui se traduit par :

$$\vec{j}_Q(P^-, t) \cdot dS\vec{n} = 0 \iff \vec{j}_Q(P^-, t) \cdot \vec{n} = 0$$

. La composante normale de \vec{j}_Q est nulle. Cependant rien n'empêche un transfert thermique tangentiellement à cette surface.



V.3 Contact parfait

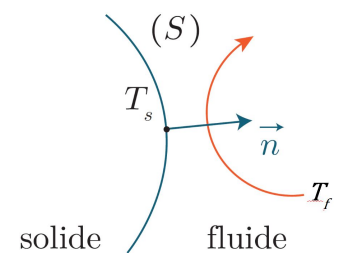
Un contact thermique à l'interface entre deux milieux est dit parfait si **la température est continue à l'interface** :

$$T(P^-, t) = T(P^+, t)$$

V.4 Transfert conducto-convectif

À la surface d'un solide en contact avec un fluide, on a souvent besoin de prendre en compte la convection dans le fluide. Les échanges d'énergie du solide vers le fluide à cette interface sont souvent modélisés par la loi de Newton (qui n'est pas à connaître) :

$$\begin{aligned} \vec{j}_Q &= h(T_s - T_f)\vec{n} \iff \delta\Phi = h(T_s - T_f)dS \\ &\iff \delta^2Q = h(T_s - T_0)dSdt \end{aligned}$$



avec T_s la température à la surface du solide, T_f la température du fluide (loin du solide), h le coefficient conducto-convectif en $\text{WK}^{-1}\text{m}^{-2}$. Ce dernier dépend de la nature du solide et du fluide, de la vitesse du fluide, de la forme de la surface (et même de la température...).

Remarque : Quelques ordg :

$\text{WK}^{-1}\text{m}^{-2}$	Solide/gaz	Solide / eau
Convection naturelle	5 à 30	10^2 à 10^3
Convection forcée	10 à 10^2	10^2 à 10^4

VI Étude en régime stationnaire sans terme source

VI.1 Résolution dans le cas 1D cartésien

Étudions la diffusion thermique selon l'axe (Ox) d'un barreau cylindrique de longueur L et section S calorifugé latéralement, de conductivité thermique λ . Notons T_A et T_B les températures aux deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$ respectivement.

Pour déterminer le champ de température, deux méthodes sont possibles.

a Résolution de l'équation de la diffusion thermique

(Schéma.) En régime stationnaire et sans terme source, la température vérifie l'équation de Laplace $\Delta T = 0$. Comme T ne dépend que de la position x , on a $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$. En intégrant $T(x) = ax + b$, soit avec les conditions aux limites :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L}x + T_A$$

★

On peut alors calculer le flux thermique à travers une surface orientée (représenter une surface au milieu du barreau et l'orienter) :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = -\lambda \left(\frac{T_B - T_A}{L} \right) \vec{e}_x \implies \Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = (T_A - T_B) \frac{\lambda S}{L}$$



Cette méthode n'est applicable que si l'expression du laplacien est connue.

b Conservation du flux (sous forme globale)

En régime stationnaire, d'après l'équation de conservation de l'énergie, $\text{div } \vec{j}_Q = 0$, c'est-à-dire que \vec{j}_Q est à flux conservatif. Donc :

$$\Phi = \text{cste} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

puis on effectue une séparation des variables :

★

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx \implies \int_{T(0)}^{T(x)} dT = -\int_{x=0}^x \frac{\Phi}{\lambda S} dx' \implies T(x) - T_A = -\frac{\Phi}{\lambda S} x$$

d'où avec la condition aux limites en $x = L$,

$$T_B - T_A = -\frac{\Phi L}{\lambda S} \iff \Phi = (T_A - T_B) \frac{\lambda S}{L}$$

(vérifier la cohérence du signe). Il ne reste qu'à réinjecter l'expression de Φ pour trouver $T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{L}x$.

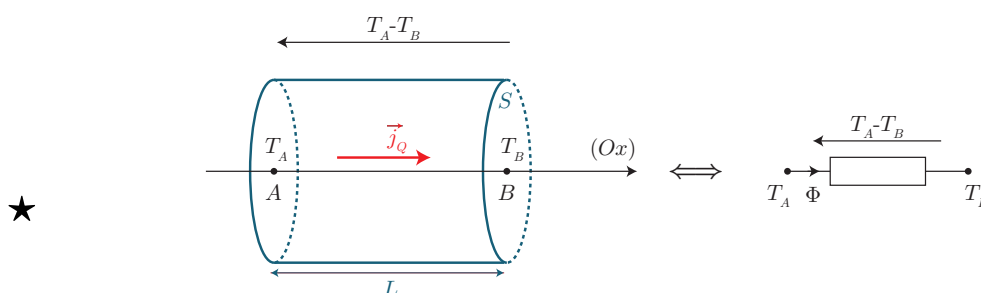
VI.2 Résistance thermique

a Analogie électrocinétique et définition

	Transport de charges	Conduction thermique
Cause : gradient de ..	potentiel électrique V	température T
Débit	... de charges I	... d'énergie $\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$

Par analogie, on définit alors une résistance thermique entre deux points A et B de l'espace :

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I} \iff R_{AB} = \frac{T_A - T_B}{\Phi_{A \rightarrow B}}$$



La résistance thermique s'exprime en K W^{-1} . En géométrie cartésienne, on a déterminé le flux $\Phi_{A \rightarrow B} = (T_A - T_B) \frac{\lambda S}{L}$, d'où :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Remarque : On définit aussi parfois la conductance thermique qui est l'inverse de la résistance thermique : $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$.

Conditions de validité de l'analogie électrocinétique :



★

En électrocinétique, le courant traversant une résistance se conserve : $I = \text{cste}$. L'équivalent thermique $\Phi = \text{cste}$ n'est valable que si le régime de conduction étudié est stationnaire et qu'il n'y a pas de perte/gain de flux intermédiaire. L'utilisation d'une résistance thermique n'est donc possible que sous ces conditions !

Exercice : Une résistance électrique $R = 10 \Omega$ est parcourue par un courant électrique $I = 500 \text{ mA}$ et est plongée dans de l'eau liquide au sein d'un calorimètre. *Contrairement à la modélisation usuelle du calorimètre* (évolution adiabatique), on va ici considérer les pertes thermiques entre l'intérieur du calorimètre et l'air extérieur. On donne la température extérieure $T_{\text{ext}} = 20^\circ \text{C}$ et la résistance thermique des parois du calorimètre $R_{th} \sim 10 \text{ K W}^{-1}$. Ecrire en régime stationnaire la loi d'Ohm thermique et en déduire la température T_{int} à l'intérieur du calorimètre.

Schéma du calorimètre et on choisit de compter le flux positivement de l'intérieur vers l'extérieur.

Loi d'Ohm thermique (régime stationnaire) : $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = R_{th} \Phi$ avec $\Phi = RI^2$

Donc : $T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} + R_{th} RI^2 = 45^\circ \text{C}$

★

Oralement : Conséquence : si on réalise cette expérience de calorimétrie (avec la même résistance et le même courant), on est en droit de négliger les pertes thermiques tant que l'élévation de température reste bien plus faible que 25°C . Sinon, il faut prendre en compte les pertes. + Cette élévation de température est indépendante du fluide mis dans le calo : logique, en stationnaire, le fluide n'absorbe plus aucune énergie.

b Association en série

Dans une maison, une étude approfondie des transferts thermiques de l'intérieur d'une pièce vers l'extérieur doit entre autres tenir compte des différentes couches, par exemple pour un mur : enduit, brique, air, isolant, placo ; ou pour le double vitrage : verre, air (ou gaz noble), verre.

Ces différentes couches sont **traversées par le même flux thermique**, on peut conclure à une **association en série des résistances thermiques** :

★

$$R_{th,eq} = \sum_i R_{th,i}$$

Il faut évidemment pouvoir définir une résistance thermique pour chaque couche.

Exemple : pour un double vitrage où les épaisseurs e d'air ($\lambda(\text{air}) = 2.6 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) et de verre ($\lambda(\text{verre}) \sim 1.5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) sont identiques, en géométrie unidimensionnelle, on a

$$R_{th} = \frac{2e}{\lambda(\text{verre})S} + \frac{e}{\lambda(\text{air})S} = \frac{e}{\lambda(\text{verre})S} \left(2 + \frac{\lambda(\text{verre})}{\lambda(\text{air})} \right) \simeq 50R_{th,verre}$$

On gagne un facteur 50 sur la résistance thermique par rapport à un simple vitrage de même surface, et donc pour une même différence de températures, on gagne également un facteur 50 sur le flux thermique qui constitue une perte en hiver.

c Association en parallèle

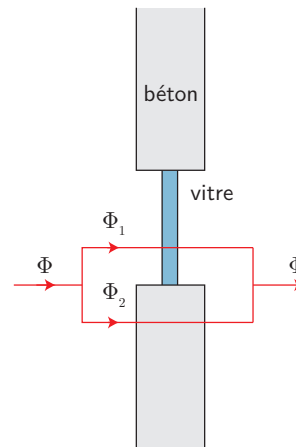
Il faut aussi tenir compte de toutes les ouvertures au sein d'une maison. Considérons un mur en béton de $S = 15 \text{ m}^2$ de $e = 30 \text{ cm}$ d'épaisseur, et que l'on y perce une fenêtre de $S' = 1 \text{ m}^2$ en plaçant un simple vitrage de $e' = 5 \text{ mm}$ d'épaisseur (la surface finale de béton est alors de $S - S'$), le flux thermique qui traverse tout le mur se partage entre le béton et la fenêtre.

Chaque partie du mur étant **soumise à la même différence de températures**, on peut alors ici considérer une **association de résistances thermiques en parallèle** :

$$\star \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{th,1}} + \frac{\Delta T}{R_{th,2}} = \frac{\Delta T}{R_{th,eq}}$$

qui conduit à la formule classique :

$$\frac{1}{R_{th,eq}} = \sum_i \frac{1}{R_{th,i}}$$



Exemple : Pour le béton seul, $R_{\text{béton,seul}} = \frac{e}{\lambda_b S} = 2.2 \times 10^{-2} \text{ K W}^{-1}$.

Pour le béton percé, $R_{\text{béton,percé}} = \frac{e}{\lambda_b(S-S')} = 2.3 \times 10^{-2} \text{ K W}^{-1}$, alors que pour la fenêtre $R_{\text{fenêtre}} = \frac{e'}{\lambda_v S'} = 3.3 \times 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$. Ainsi, l'association parallèle des deux résistances thermiques conduit à

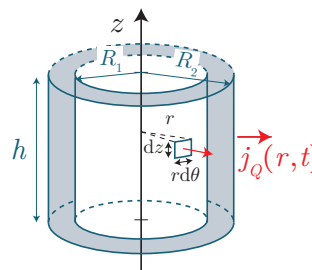
$$\frac{1}{R_{\text{béton+fenêtre}}} = \frac{1}{R_{\text{béton,percé}}} + \frac{1}{R_{\text{fenêtre}}} \iff R_{th,eq} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$$

soit en comparaison, $R_{\text{béton seul}}/R_{\text{béton+fenêtre}} \simeq 7.7$.

VI.3 Autres calculs de résistances thermiques

a Géométrie cylindrique

Pour pratiquer le calcul de résistance thermique, reprenons la méthode précédente sur une géométrie cylindrique, afin de déterminer la résistance thermique d'un manchon cylindrique de hauteur h , de rayon intérieur R_1 (de température T_1 uniforme sur la surface cylindrique) et de rayon extérieur R_2 (de température T_2). Il est traversé par une densité de courant thermique $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ radiale. On se place en régime stationnaire. ★



Régime stationnaire \Rightarrow Conservation du flux thermique. Calculons le flux thermique à travers une surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ orientée :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = cste = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h$$

(car les intégrations ne portent pas sur la variable r , donc r et $\frac{dT}{dr}$ peuvent sortir de l'intégrale.)

★ On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \frac{dr}{r} \iff T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = 2\pi\lambda h \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \implies R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda h}$$

Exercice (chez soi) : je vous conseille de réaliser la même démarche pour une coquille sphérique, vous trouverez $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

b Résistance thermique de conducto-convection

Dans le cas de la conducto-convection, via la loi de Newton, on avait, pour des températures uniformes sur la surface de contact :

$$\Phi_{s \rightarrow f} = \iint_{(S)} h(T_s - T_f) dS = h(T_s - T_f)S \implies R_{th} = \frac{T_s - T_f}{\Phi_{s \rightarrow f}} = \boxed{\frac{1}{hS}}$$

VII Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique

Exemple concret : Considérons le cas d'une barre de longueur L dans laquelle règne initialement un régime stationnaire avec T_1 et T_2 les températures aux extrémités (problème à 1D cartésienne). On modifie la température T_1 jusqu'à T'_1 , le passage de l'une à l'autre se faisant durant un temps Δt .

A priori, on ne sait pas résoudre analytiquement ce problème (équation aux dérivées partielles temporelles et spatiales). On peut alors procéder par une résolution numérique.

Algorithme de résolution :

On se limite ici au cas de la résolution de l'équation de la diffusion thermique à une dimension cartésienne. On doit donc résoudre :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour ce faire, on discrétise l'espace avec un pas spatial dx et le temps avec un pas de temps dt .

On approxime les dérivées partielles avec la méthode des différences finies, inspirée de la résolution d'Euler des ED. Par exemple, on peut écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x,t + dt) - T(x,t)}{dt}$$

Pour déterminer une forme similaire pour $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, effectuons des développements de Taylor-Young (c'est logique, on souhaite faire apparaître du $T(x + dx,t)$ et $T(x - dx,t)$) :

★

$$\begin{aligned} T(x + dx,t) &= T(x,t) + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2 \\ T(x - dx,t) &= T(x,t) - \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T(x + dx,t) + T(x - dx,t) - 2T(x,t)}{(dx)^2} \end{aligned}$$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit alors :

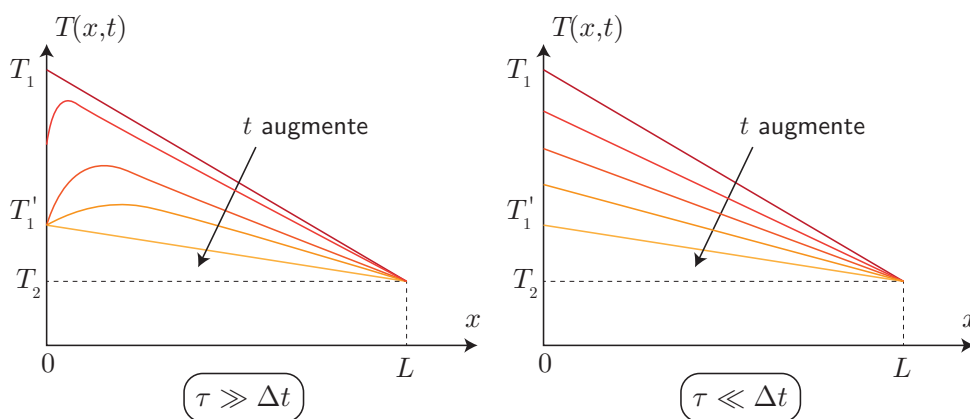
$$T(x,t + dt) = T(x,t) + \frac{Ddt}{(dx)^2} \times (T(x + dx,t) - 2T(x,t) + T(x - dx,t))$$

Le principe de l'algorithme de résolution est alors le suivant :

1. Discrétisation : on choisit le pas de temps dt et le pas spatial dx . On crée les listes de temps (entre 0 et T) et d'espace (entre 0 et L).
2. Initialisation : on utilise la condition initiale donnée $T(x,t = 0), \forall x \in [0,L]$.
3. Résolution : on réalise une boucle sur les instants t successifs. Pour chaque instant t :
 - (a) On utilise les conditions aux limites données $T(x = 0,t)$ et $T(x = L,t)$.
 - (b) On détermine tous les autres $T(x,t)$ grâce à la formule précédente et à la connaissance des $T(x,t - dt)$.
 - (c) On affiche graphiquement la solution pour différents instants t choisis.

Retour sur l'exemple concret : analyse

Comparons alors les résultats d'une simulation numérique selon la valeur de Δt .



Dans les deux simulations, le régime permanent est atteint, car le profil de température est affine (cas d'un régime stationnaire).

Le profil de température reste approximativement affine à chaque instant si Δt est grand devant un temps caractéristique τ , c'est-à-dire que l'on modifie lentement les conditions aux limites de sorte à ce que le système dans son ensemble puisse s'adapter. τ est le temps caractéristique pour qu'une variation à une extrémité se répercute à l'autre extrémité distante de L : $\tau \sim L^2/D$. La résolution effectuée en régime stationnaire se généralise alors aux systèmes vérifiant $\tau \ll \Delta t$ (régime nommé ARQS thermique).

★

Exercices

Ex. 1 Expérience d'Ingen-Housz

Dans cet exercice, on étudie l'expérience historique d'Ingen-Housz (1789). Une tige cylindrique de rayon R et d'axe (Ox) est constituée d'un métal de conductivité thermique λ . Cette tige est encastrée par l'une de ses extrémités (en $x = 0$) dans un récipient contenant de l'eau bouillante, de telle sorte que l'extrémité en $x = 0$ reste constamment à la température $T_0 = 373$ K. Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température $T_a = 293$ K.

On considère que la température de la barre est une fonction de la coordonnée x et du temps t . On admettra que les pertes thermiques sur la surface latérale de la tige sont données par la loi de Newton :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dS} = h(T(x,t) - T_a)$$

avec $\frac{d\mathcal{P}}{dS}$ la puissance perdue par unité de surface et h un coefficient de conducto-convection.

1. Préciser l'unité de λ et de h .
2. En réalisant un bilan énergétique, montrer que la température dans la tige vérifie :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R}(T(x,t) - T_a)$$

avec ρ la masse volumique du métal considéré et c sa capacité calorifique massique.

3. On se place en régime permanent. On considère que l'extrémité qui n'est pas en contact avec l'eau bouillante se situe en $x = +\infty$. Déterminer la loi de variation de la température dans la tige. On introduira une longueur caractéristique δ dont on donnera la signification physique.
4. Exprimer la puissance thermique P_{th} que l'eau bouillante fournit à la tige solide, en fonction de λ , h , T_0 , T_a et de R . Commenter.
5. On compare, dans les conditions précédentes, le comportement de deux barres de dimensions identiques, l'une en cuivre, l'autre en étain. Chaque barre est recouverte par une fine couche de paraffine dont la température de fusion est 333 K. On suppose que dans ces conditions, le paramètre h prend la même valeur dans les deux cas. Sur la barre de cuivre, la paraffine fond à une abscisse $x_1 = 15.6$ cm. Sur la barre en étain, cela se produit à $x_2 = 6.4$ cm. Exprimer alors la conductivité thermique λ_2 de l'étain en fonction de celle du cuivre ($\lambda_1 = 390$ W m⁻¹ K⁻¹), de x_1 et de x_2 . Faire l'application numérique.

Correction de l'exercice 1

1. En utilisation la loi de Fourier et la loi de Newton rappelée : λ en W m⁻¹ K⁻¹ et h en W m⁻² K⁻¹.
2. Il est indispensable de faire un schéma ! On pose un vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{e}_x$.
1er principe à une couche cylindrique d'épaisseur dx pendant dt :

$$d^2U = \delta^2 Q_{\text{entrant}}(x) - \delta^2 Q_{\text{sortant}}(x + dx) - \delta^2 Q_{\text{pertes latérales}}$$

On a : $d^2U = \rho c \pi R^2 dx dt$, puis, **en faisant bien attention aux surfaces mises en jeu** :

$$\delta^2 Q_{\text{entrant}}(x) - \delta^2 Q_{\text{sortant}}(x + dx) = j_Q(x,t)\pi R^2 dt - j_Q(x + dx,t)\pi R^2 dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} \pi R^2 dx dt \quad (\text{Ex.1})$$

$$- \delta^2 Q_{\text{pertes latérales}} = -2\pi R dx h(T(x,t) - T_a) dt \quad (\text{Ex.2})$$

Donc, en rassemblant tous les termes, et en utilisant la loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$:

$$\rho c \pi R^2 dx dt = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pi R^2 dx dt - 2\pi R dx h(T(x,t) - T_a) dt$$

, ce qui donne le résultat de l'énoncé après simplification.

3. En stationnaire :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}(T(x) - T_a) = 0$$

On résout, en posant $\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$:

$$T(x) = T_a + A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{+\frac{x}{\delta}}$$

Physiquement, la température ne peut pas diverger en $x = +\infty$: $B = 0$. En utilisant la CL en $x = 0$:

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\frac{x}{\delta}}$$

δ est la distance caractéristique de décroissance de la température dans la tige.

4. À l'interface eau bouillante/tige en $x = 0$, la puissance thermique allant de l'eau à la tige est, d'après la loi de Fourier :

$$P_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \pi R^2 = \frac{\lambda(T_0 - T_a)}{\delta} \pi R^2 = \sqrt{2\lambda h} (T_0 - T_a) \pi R^{3/2}$$

Cette puissance est positive : l'eau cède de la puissance thermique à la tige, qui la dissipe dans l'air environnant : cohérent. On vérifie que si h augmente, la puissance transférée augmente : OK. Idem si la différence de température eau/air augmente. Plus le métal conduit la chaleur, plus la puissance transférée est grande.

5. Si on appelle T_f la température de fusion de la paraffine, on doit vérifier :

$$T_f = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\frac{x_1}{\delta_1}} = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\frac{x_2}{\delta_2}} \Rightarrow \frac{x_1}{\delta_1} = \frac{x_2}{\delta_2}$$

Avec l'expression de δ , on aboutit à :

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 = 66 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

(cohérent avec la valeur tabulée !)

Ex. 2 (Ecrit CCINP-E3A PC 2023) Etude numérique d'un régime transitoire

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

On s'intéresse aux transferts thermiques dans le composite (figure 2) lorsque la température intérieure $T(t, x = 0) = T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et la température extérieure $T(t, x = L) = T_{\text{ext}} = 5^\circ\text{C}$. On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T_{\text{ext}}$.

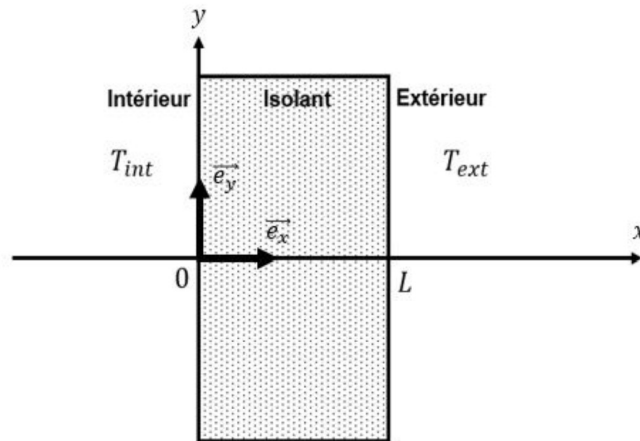


Figure 2 - Schématisation du problème

On cherchera alors à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

Une annexe rappelle l'utilisation de quelques fonctions Python classiques.

1. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?
2. Donner, sans démontrer, l'équation générale de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, λ_{isolant} la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la question Q1 et exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction des caractéristiques du matériau.
3. Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, représentant l'épaisseur de l'isolant, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (figure 3). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

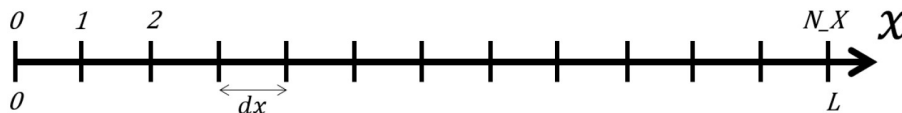


Figure 3 - Discrétisation de l'isolant selon x

4. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du i -ème point.
5. À l'aide de la formule de Taylor-Young (rappelée ci-dessous), exprimer :
 - (a) $T(t + dt, x)$ au premier ordre par rapport à t , dt étant l'incrément temporel ;
 - (b) $T(t, x - dx)$ au second ordre par rapport à x ;
 - (c) $T(t, x + dx)$ au second ordre par rapport à x .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

6. En déduire une expression de $\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx , $T(t,x)$, $T(t,x-dx)$ et $T(t,x+dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n .

7. En reformulant les résultats des questions 5 et 6, déterminer une relation entre :

(a) T_i^{n+1} , T_i^n , $\frac{\partial T(t,x)}{\partial t}$ et dt ;

(b) T_{i+1}^n , T_{i-1}^n , T_i^n , $\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ et dx .

8. A partir des questions 2 et 7, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt k_{th} \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} + T_i^n$$

Le code de l'algorithme 1 permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1 #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000 #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100 #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5 #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1] #Diffusivité thermique

#Discrétisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]
```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

9. Donner l'Instruction 1 permettant de définir la diffusivité thermique k_{th} .
10. L'équation démontrée en question 8 est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0, \dots, N_X\}$?
11. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0, t_{max}]$.
12. Déduire de la question 3 les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.

13. À partir de la question 8, compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

On donne en figure 4 le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

14. Associer à chaque courbe de la figure 4 les instants de la liste suivante :

$$t = [0 \text{ s}, 6000 \text{ s}, 12\,000 \text{ s}, 18\,000 \text{ s}]$$

15. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

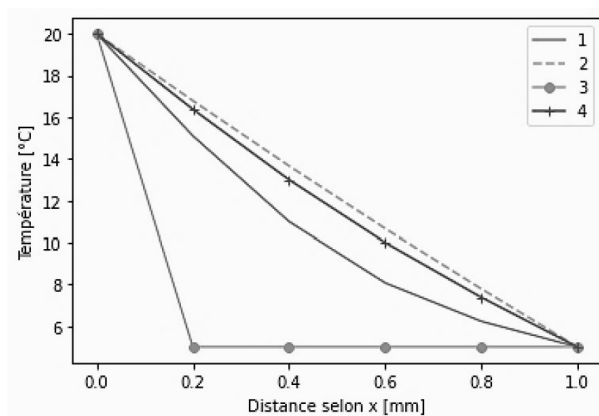


Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **`np.linspace(start, stop, N point) :`**

- o description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
- o argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code>

- **`np.zeros(i) :`**

- o description : renvoie un tableau de taille i rempli de zéros.
- o argument d'entrée : un scalaire
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.zeros(5)</code>	<code>[0, 0, 0, 0, 0]</code>

- **`np.array(liste) :`**

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

- **`A[i,j] :`**

- o description : retourne l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne i + 1 de la matrice A, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne j + 1 de la matrice A, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
- o argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A
- o argument de sortie : l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A

Commande	Résultat
<code>A = np.array([[1, 2, 1], [4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code>	3

Correction de l'exercice 2

- La température ne dépend que de x s'il y a invariance par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z : il faut donc que les dimensions du matériau selon \vec{e}_y et \vec{e}_z soient bien plus grandes que la dimension L .

Remarque : Cela revient à considérer que le matériau est infini selon \vec{e}_y et \vec{e}_z .

- L'équation de la diffusion thermique sans source interne à 3D est :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p} \Delta T}$$

Avec une modélisation unidimensionnelle selon x :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \Rightarrow \boxed{k_{th} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p}} \quad (\text{Ex.3})$$

- L'énoncé indique que :

$$\boxed{T(t > 0, x = 0) = T_{\text{int}} \quad T(t, x = L) = T_{\text{ext}} \quad T(t = 0, x > 0) = T_{\text{ext}} \quad T(t = 0, x = 0) = T_{\text{int}}}$$

4. Il y a N_x intervalles spatiaux. Donc :

$$dx = \frac{L}{N_x} \quad \text{et} \quad x_i = i \times dx = i \times \frac{L}{N_x}$$

Remarque : L'énoncé ne précise pas si le premier point est le point 0 ou le point 1, mais au vu de la numérotation de la figure 3, il faut considérer que le 1er point est le point 0.

5.

$$T(t + dt, x) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$T(t, x - dx) = T(t, x) - \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$T(t, x + dx) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2$$

6. On en déduit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(t, x + dx) - 2T(t, x) + T(t, x - dx)}{(dx)^2}$$

7.

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(dx)^2}$$

8. Avec l'équation de la diffusion et la Q.7 :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + k_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dt$$

Puis, avec la Q.7, on aboutit à :

$$T_i^{n+1} = k_{th} dt \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n$$

9. Avec la question Q.2 : [Instruction 1] : $\text{Lambda}/(\text{Rho} \cdot \text{Cp})$

10. Dans l'équation de la Q.8, il faut pouvoir définir T_{i+1}^n et T_{i-1}^n : il faut donc éliminer les positions $i = 0$ et $i = N_x$. Les températures en ces points sont déterminées avec les conditions aux limites.

11. Avec la Q.4 : [Instruction 2.1] : L/N_x

De même : [Instruction 2.2] : t_{max}/N_x

12. Dans l'algorithme, Temp est un tableau contenant sur chaque ligne, les températures à un instant, et en chaque colonne, les températures en une position (cf. initialisation du tableau avec np.zeros). Donc, avec la Q.3 :

[Instruction 3.1] : T_{int}

[Instruction 3.2] : $\text{Temp}[0, i] = T_{\text{ext}}$

[Instruction 3.3] : $\text{Temp}[n, 0] = T_{\text{int}}$

[Instruction 3.4] : $\text{Temp}[n, N_x] = T_{\text{ext}}$

13. En utilisant les questions Q.8 et Q.10 :

[Instruction 4.1] : $\text{range}(0, N_x)$

[Instruction 4.2] : $\text{range}(1, N_x)$

[Instruction 4.3] : $\text{Temp}[n+1, i] = K \cdot dt \cdot (\text{Temp}[n, i+1] + \text{Temp}[n, i-1] - 2 \cdot \text{Temp}[n, i]) / (dx^2) + \text{Temp}[n, i]$

14. La courbe 3 coïncide avec la condition initiale : Courbe 3 : instant $t = 0$ s

On en déduit que : Courbe 1 : $t = 6000$ s et Courbe 4 : $t = 12000$ s et Courbe 2 : $t = 18000$ s

15. La courbe 2 correspond à un profil affine de la température, ce qui correspond au **régime permanent** qui est atteint.

Ex. 3 Fuites thermiques dans un calorimètre

On dispose d'un calorimètre de TP que l'on remplit partiellement de diazote liquide. On cherche à déterminer expérimentalement l'enthalpie massique de vaporisation du diazote. Le diazote a une température de vaporisation de $T_a = 77\text{ K}$: il reste donc en permanence à cette température durant toute l'expérience.

Après une attente de quelques minutes, pendant lesquelles l'ébullition dans le calorimètre est très forte, l'ébullition se réduit : c'est le signe d'une thermalisation de la paroi interne du calorimètre avec le liquide. On réalise alors un premier protocole.

Protocole 1 :

- On introduit une résistance de $R = 6\ \Omega$ dans le calorimètre. On mesure la masse du calorimètre rempli à l'aide d'une balance.
- On mesure la masse du calorimètre $m_i = 985.3\text{ g}$ et on démarre l'alimentation stabilisée de la résistance, en fixant $I = 0.6\text{ A}$.
- Après une durée de $\Delta t = 100\text{ s}$, on mesure la masse finale du calorimètre $m_f = 983.0\text{ g}$ et on arrête l'alimentation stabilisée.

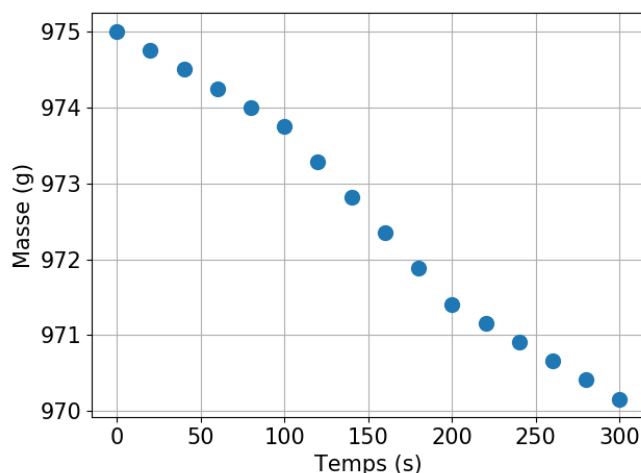
1. En supposant que le calorimètre soit parfait, calculer l'enthalpie de vaporisation de l'azote. La comparer avec la valeur tabulée $\Delta_{\text{vap}}h = 198.38\text{ kJ kg}^{-1}$. Que signifie l'hypothèse de "calorimètre parfait" ?

Vu le résultat faiblement satisfaisant obtenu avec ce 1er protocole, on réalise un second protocole.

Protocole 2 :

- On introduit une résistance de $R = 6\ \Omega$ dans le calorimètre. On mesure la masse du calorimètre rempli à l'aide d'une balance.
- Phase A : Alors que l'alimentation électrique est éteinte, on mesure la masse m du calorimètre rempli. On prend un point toutes les 20 s. On réalise ceci durant 100 s.
- Phase B : On alimente la résistance avec une intensité $I = 0.6\text{ A}$ et on mesure toujours m toutes les 20 s. Après 100 s, on coupe l'alimentation.
- Phase C : Alimentation coupée, on continue de mesurer la masse m au cours du temps.

Le graphe obtenu est le suivant :



2. Que met en évidence cette deuxième expérience ?
3. Afin de modéliser les échanges thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre, on souhaite utiliser la notion de résistance thermique. Justifier que la condition d'application de l'analogie électrocinétique est validée.

Dans la suite, on notera donc R_{th} la résistance thermique du calorimètre.

4. Exprimer théoriquement la valeur de la pente $\left(\frac{dm}{dt}\right)_A$ dans la phase A. On supposera que le contact thermique est parfait à l'intérieur et à l'extérieur du calorimètre et on notera T_0 la température de l'air extérieur.

- De même, exprimer théoriquement la pente $\left(\frac{dm}{dt}\right)_B$ dans la phase B.
- En déduire numériquement l'enthalpie de vaporisation expérimentale du diazote. Estimer également numériquement la puissance de "fuite thermique" du calorimètre dans cette expérience.

Correction de l'exercice 3

- On applique le 1er principe au système {calorimètre + diazote + résistance} sur la durée de l'expérience, en supposant que la transformation est adiabatique :

$$\Delta H = (m_i - m_f)\Delta_{\text{vap}}h \underbrace{=}_{\text{car isobare}} W_{\text{elec}} = RI^2\Delta t \iff \Delta_{\text{vap}}h = \frac{RI^2\Delta t}{m_i - m_f} = 94 \text{ kJ kg}^{-1}$$

La valeur expérimentale calculée est donc plus de deux fois inférieure à la valeur tabulée : la modélisation de cette expérience est donc visiblement fautive. Ceci provient de l'hypothèse de "calorimètre parfait", revenant à supposer que le calorimètre n'a aucun échange thermique avec l'extérieur.

Remarque : Pas besoin de prendre en compte la valeur en eau du calorimètre, car celui-ci ne change pas de température au cours de la transformation ($T = 77 \text{ K}$ en permanence).

- Si la transformation précédente était réellement adiabatique, la masse du calorimètre devrait être inchangée au cours des phases A et C, ce qui n'est pas le cas : cette expérience met en évidence des fuites thermiques entre l'extérieur et l'intérieur du calorimètre.
- Le champ de température est stationnaire : on peut utiliser l'analogie électrocinétique.
- En phase A : On applique le 1er principe au diazote seul durant dt (**attention aux conventions de signe et d'orientation**) :

$$dH = (\delta m)_{\text{vaporisée pendant } dt}\Delta_{\text{vap}}h = (-\delta m)_{\text{liquide}}\Delta_{\text{vap}}h = \delta Q = \Phi_{\text{ext} \rightarrow \text{int}}dt = \frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}}}dt$$

grâce à la loi d'Ohm thermique. (On vérifie la cohérence des signes !!!)

Donc :

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_A = -\frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}} \times \Delta_{\text{vap}}h}$$

- En phase B : On applique le 1er principe au diazote et à la résistance durant dt :

$$dH = -\delta m\Delta_{\text{vap}}h = \frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}}}dt + RI^2dt \iff \left(\frac{dm}{dt}\right)_B = -\frac{1}{\Delta_{\text{vap}}h} \times \left(\frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}}} + RI^2\right) = \left(\frac{dm}{dt}\right)_A - \frac{RI^2}{\Delta_{\text{vap}}h}$$

- On lit expérimentalement :

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_A = -12.5 \times 10^{-3} \text{ g/s} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_B = -23 \times 10^{-3} \text{ g/s}$$

De là, on en déduit :

$$\Delta_{\text{vap}}h = 2.1 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$$

ce qui est bien plus cohérent avec la valeur tabulée (écart relatif de 4%) !

Au cours de cette expérience, la puissance de fuite thermique du calorimètre vaut

$$\Phi = \frac{T_0 - T_a}{R_{\text{th}}} = 2.6 \text{ W}$$

ce qui est loin d'être négligeable devant la puissance apportée par la résistance $RI^2 = 2.2 \text{ W}$. On notera que cette puissance de fuite dépend de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre (logique !).

Remarque : On peut donner une analyse graphique simple pour trouver l'enthalpie de vaporisation de l'azote. Si l'on prolonge la droite modélisant la phase A, alors l'écart entre cette droite prolongée et celle modélisant la phase C représente la masse vaporisée du fait de la puissance apportée par effet Joule (on a pris en compte les pertes). On peut alors appliquer directement la formule de la Q.1.

Ex. 4 (Oral CCINP PSI 2016) Epaisseur d'un igloo

On considère un igloo de rayon intérieur R , de conductivité thermique $\lambda = 0.05 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, contenant un seul habitant. On modélise l'igloo comme une demi-sphère épaisse comprise entre les rayons R et $R + e$. La température

intérieure minimale nécessaire à la survie est égale à $T_{\min} = 10^\circ\text{C}$; la température extérieure est égale à $T_{\text{ext}} = -20^\circ\text{C}$. On considère que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance $P = 50\text{ W}$.

Déterminer l'épaisseur minimale e des murs de l'igloo pour permettre la survie de l'individu.



Correction de l'exercice 4

Voir corrigé manuscrit.

Ex. 5 (Oral Mines-Télécom MP 2024) Isolation thermique d'une pièce

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁵

Une pièce a une température uniforme de $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et la température extérieure constante est de $T_{\text{ext}} = 10^\circ\text{C}$. La résistance thermique des murs est de $R_m = 10\text{ mK W}^{-1}$, celle du toit et des tuiles de $R_t = 2.0\text{ mK W}^{-1}$.

1. Calculer la puissance \mathcal{P} de chauffage à fournir à la pièce pour que sa température soit constante.
2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique R de ce matériau isolant telle que \mathcal{P} soit divisée par 2.
3. On arrête de chauffer la pièce à $t = 0$. On note C la capacité thermique de la pièce. Donner la loi $T(t)$ décrivant l'évolution de la température dans la pièce. Dans quelle mesure ce modèle est-il valide ?

Correction de l'exercice 5

1. L'étude est en régime stationnaire : la puissance \mathcal{P} de chauffage est la puissance traversant les parois de la pièce (conservation globale du flux thermique) et on peut utiliser la loi d'Ohm thermique. Ainsi, en orientant \mathcal{P} vers l'extérieur :

$$\mathcal{P} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}}$$

où R_{tot} est la résistance thermique totale des parois. Ici, les deux résistances sont en parallèle : $\frac{1}{R_{\text{tot}}} =$

$$\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_t}. \text{ Donc :}$$

$$\mathcal{P} = (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_t} \right)$$

A.N. : $\mathcal{P} = 6.0\text{ kW}$

2. On veut que $R'_{\text{tot}} = 2R_{\text{tot}}$. Les résistances du nouveau matériau isolant et du toit et des tuiles sont en série, si bien que : $\frac{1}{R'_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_t + R} = \frac{1}{2R_{\text{tot}}} \Rightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{2R_{\text{tot}}} - \frac{1}{R_m}} - R_t = \frac{2}{\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_m}} - R_t$. A.N. :

$$R = 3.0\text{ mK W}^{-1}.$$

⁵ Faire l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire et appliquer le premier principe de la thermodynamique. On trouve $R_{\text{tot}} = \frac{5}{\mathcal{P}}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$.

3. On suppose que l'étude est en régime quasi-stationnaire, ce qui permet d'utiliser la loi d'Ohm thermique sur un intervalle de temps dt .
 1er principe de la thermodynamique à la pièce entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q \Rightarrow C dT = \frac{T_{ext} - T(t)}{R'_{tot}} dt$$

en faisant attention à considérer δQ entrant dans le système, i.e. une puissance thermique dirigée de l'extérieur vers l'intérieur. On en déduit :

$$R'_{tot} C \frac{dT}{dt} + T(t) = T_{ext}$$

ce qui est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1, de constante $\tau = R'_{tot} C$ (**très forte analogie avec un circuit RC !!!**).

La résolution est usuelle. Avec la CI :

$$T(t) = T_{ext} + (T_{int} - T_{ext}) e^{-t/\tau}$$

Condition de validité : Il faut que le régime soit effectivement quasi-stationnaire, i.e. que le temps caractéristique d'évolution de la température τ soit bien plus grand que le temps caractéristique de diffusion à travers les murs $\tau_{diff} \sim \frac{L^2}{D}$ avec L la taille des murs et D le coefficient de diffusion thermique. (En pratique, c'est assez bien vérifié pour une maison, mais pas simple à prouver de manière immédiate.)

Ex. 6 (Ecrit Centrale PSI 2024) Température autour d'un combustible nucléaire

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁶

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au coeur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du coeur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à $p = 155$ bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

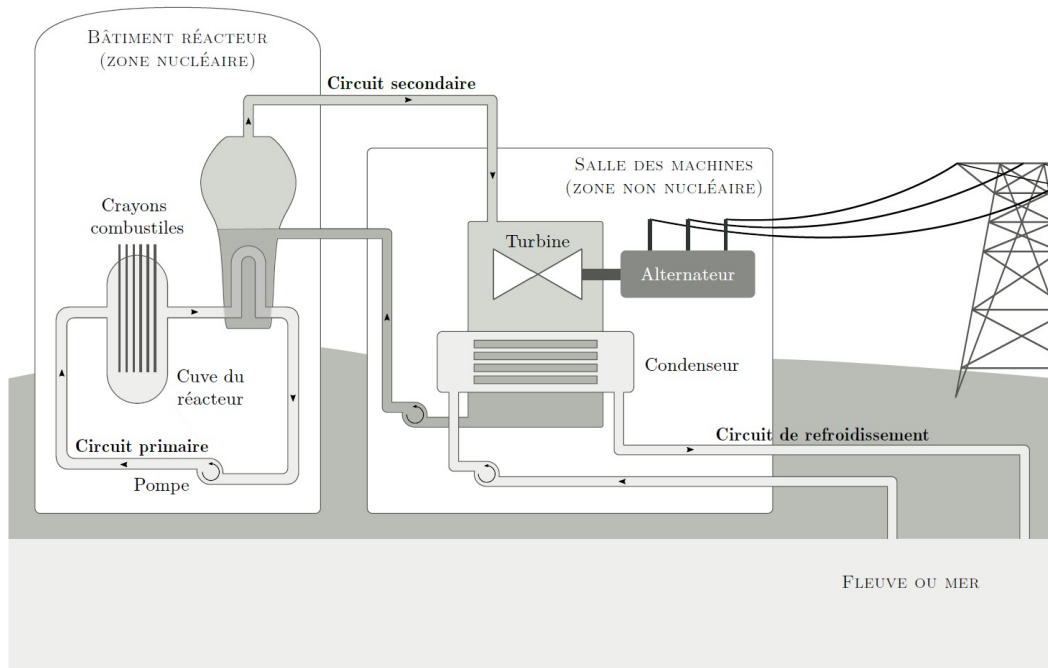


Figure 1 Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF.

6

9 50. Vu les variables autorisées dans l'expression finale, il faut utiliser la conservation du flux thermique.

Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'au combustible nucléaire et à l'eau du circuit primaire. On se place en régime stationnaire.

Le coeur est constitué de $N = 41448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66$ m et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5$ mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques. La puissance thermique développée dans le coeur vaut : $P_1 = 2776$ MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, UO_2 (s), dont la température de fusion vaut 2800°C . La conductivité thermique de UO_2 (s) vaut $\lambda_2 = 3.5$ W/m/K.

La pression de vapeur saturante de l'eau (fluide caloporteur) à 345°C vaut 155 bar.

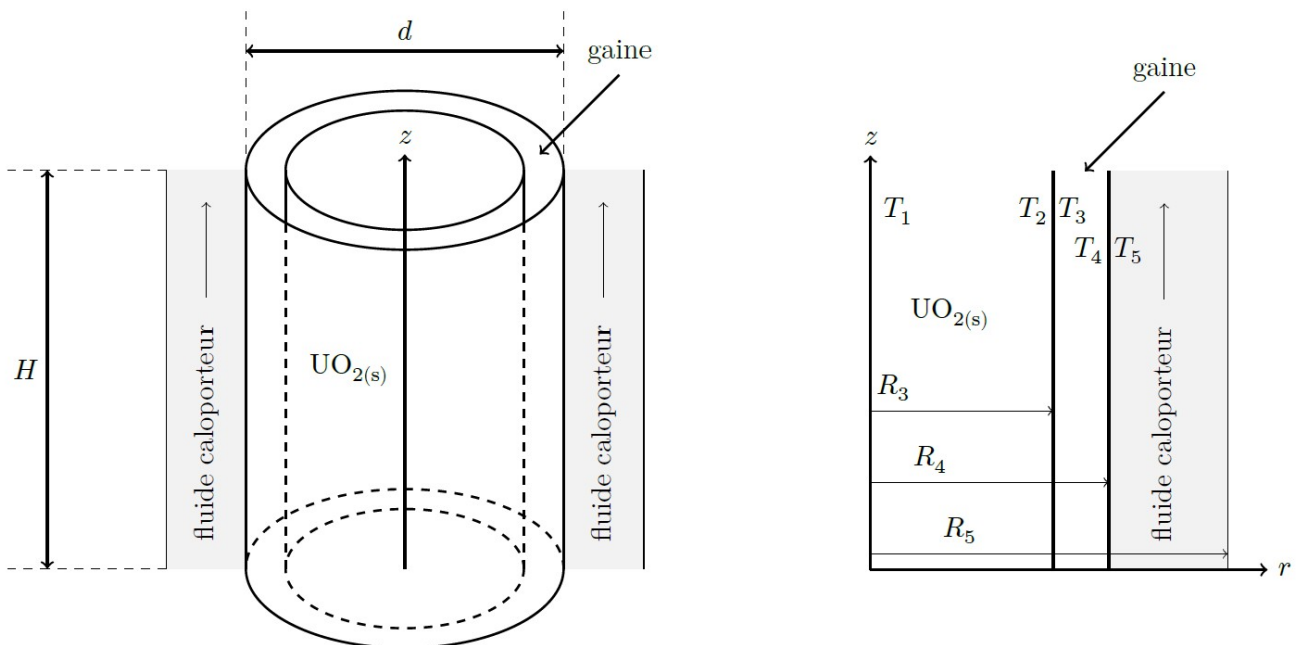
On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible UO_2 (s) et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303^\circ\text{C}$.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $hdS(T_s - T_a)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10 \text{ kW m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25 \text{ kW m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60$ mm dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16$ W/m/K.



1. Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H .

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au coeur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

3. Exprimer la température $T(r)$ dans UO_2 (s) en fonction de P_V, T_2, R_3, λ_2 et r .
4. Exprimer la température T_3 en fonction de T_2, P_1, h_2, d, e, H et N .
5. Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de $T_4, P_1, R_4, \lambda_3, S_{tot}$ et r .
6. Calculer les températures T_4, T_3, T_2 et T_1 .
7. Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.
8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

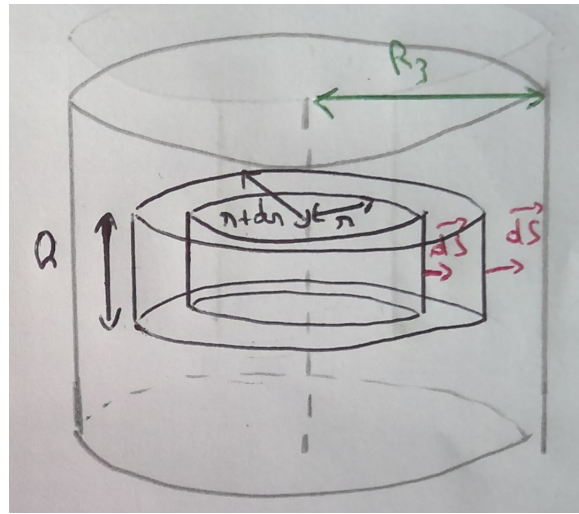
Correction de l'exercice 6

1. La surface latérale totale est : $S_{tot} = N \times \pi dH$.
2. Modélisation : Coordonnées cylindriques. Régime stationnaire avec terme source. $r \leq R_3$.

Les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale : le vecteur densité de courant thermique s'écrit : $\vec{j}_Q = j_Q(r, \theta, z) \vec{e}_r$. Par invariance par rotation d'angle θ et en négligeant les effets de bord : $\vec{j}_Q = j_Q(r) \vec{e}_r$.

On applique le premier principe au système entre r et $r + dr$ (cf. schéma) et entre t et $t + dt$:

$$d^2U = \delta^2Q_{\text{éch}} + \delta^2Q_{\text{créé}}$$



Variation temporelle : En régime stationnaire, $d^2U = 0$.

Echanges spatiaux :

$$\begin{aligned} \delta^2Q_{\text{éch}} &= \delta^2Q_{\text{entrant}}(r) - \delta^2Q_{\text{sortant}}(r + dr) \\ &= \left(\iint_{(S)_{\text{entr}}} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt - \left(\iint_{(S)_{\text{entr}+dr}} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt \\ &= 2\pi h dt (j_Q(r)r - j_Q(r + dr)(r + dr)) \\ &= -2\pi h dt dr \frac{dr j_Q(r)}{dr} \end{aligned}$$

En utilisant la loi de Fourier et le formulaire : $\vec{j}_Q = -\lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}}(T) \Rightarrow j_Q(r) = -\lambda_2 \frac{dT}{dr}$

Donc :

$$\delta^2Q_{\text{éch}} = 2\pi h \lambda_2 dt dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

Création interne :

$$\delta^2Q_{\text{créé}} = P_V dt \times 2\pi r dr h$$

Bilan :

$$0 = 2\pi h \lambda_2 dt dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + P_V dt \times 2\pi r dr h \iff \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0$$

avec $A = \frac{P_V}{\lambda_2}$

3. En intégrant deux fois cette équation, avec α et β des constantes d'intégration :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{P_V}{2\lambda_2} r^2 + \alpha$$

$$T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_2} r^2 + \alpha \ln(r) + \beta$$

Conditions aux limites :

- En $r = 0$, non divergence de la température : $\alpha = 0$
- En $r = R_3$, $T(R_3) = -\frac{P_V}{4\lambda_2} R_3^2 + \beta = T_2$

Donc :

$$T(r) = T_2 + \frac{P_V}{4\lambda_2} (R_3^2 - r^2) \quad \text{pour } r < R_3$$

On vérifie bien que la température décroît avec r .

4. En régime stationnaire, par continuité du flux au niveau de l'interface, la puissance thermique traversant la surface latérale en $r = R_3$ est égale à la puissance totale créée dans le cœur combustible P_1 .

Remarque : On peut également le voir en calculant le flux thermique sortant en $r = R_3^-$:


$$\Phi(r = R_3^-) = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \times N \times 2\pi R_3 H = P_V N \pi R_3^2 H = P_V \times \mathcal{V}_{\text{combustible}} = P_1$$

Ainsi, en intégrant la loi de Newton sur la surface latérale, le flux thermique sortant en $r = R_3$ vaut :

$$h_2(T_2 - T_3) \times N \times 2\pi R_3 H = P_1 \iff T_3 = T_2 - \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi R_3 H}$$

En utilisant $e = R_4 - R_3 = \frac{d}{2} - R_3 \iff R_3 = \frac{d}{2} - e$:

$$T_3 = T_2 - \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi H \left(\frac{d}{2} - e\right)}$$

5.  Dans la gaine, il n'y a plus de terme de création de puissance thermique.

Méthode 1 : Résoudre l'équation de la diffusion thermique

Dans la gaine, l'équation de la diffusion thermique est donc simplement $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$. En intégrant deux fois cette équation, avec γ et ε des constantes :

$$T(r) = \gamma \ln(r) + \varepsilon$$

Conditions aux limites :

- En $r = R_4$: $T(R_4) = \gamma \ln(R_4) + \varepsilon = T_4$
- En $r = R_3$: *Vu qu'on ne doit pas exprimer $T(r)$ en fonction de T_3 mais de P_1 , l'idée est d'utiliser une condition sur le flux.* Par continuité du flux thermique sortant de la surface latérale en $r = R_3^+$:

$$\Phi(r = R_3^+) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr}(R_3) \times N \times 2\pi R_3 H = -\lambda_3 \gamma N \times 2\pi H = P_1 \iff \gamma = -\frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3}$$

On fait apparaître S_{tot} (cf. Q.1) :

$$\gamma = -\frac{P_1 d}{2S_{tot} \lambda_3} = -\frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3}$$

Finalement :

$$T(r) = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} (\ln(R_4) - \ln(r)) = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

Si r augmente, T diminue : cohérent.

Méthode 2 : Utiliser directement la conservation du flux thermique

On peut écrire que le flux thermique se conserve à travers toute surface de rayon r tel que $R_3 \leq R_4$ (surface orientée vers l'extérieur ici), car le régime est ici stationnaire sans terme source :

$$\Phi(r) = P_1 = -\lambda_3 \frac{dT}{dr} 2\pi r N H$$

On sépare les variables et on intègre entre r et R_4 (pour faire intervenir T_4) :

$$\int_{T(r)}^{T_4} dT = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 N H} \int_r^{R_4} \frac{1}{r} dr \Rightarrow T(r) = T_4 + \frac{P_1}{2\pi \lambda_3 N H} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right) = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

6. Il reste à trouver la relation entre T_4 et T_5 : elle est donnée par la loi de Newton. La puissance thermique sortant de la surface latérale en $r = R_4$ est :

$$h_4(T_4 - T_5) \times N \times 2\pi R_4 H = P_1 \iff T_4 = T_5 + \frac{P_1}{2\pi N R_4 H h_4}$$

A.N. : $T_4 = 328 \text{ }^\circ\text{C}$

D'après la Q.5,

$$T_3 = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

A.N. : $T_3 = 352 \text{ }^\circ\text{C}$

D'après la Q.4 :

$$T_2 = T_3 + \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi H \left(\frac{d}{2} - e\right)}$$

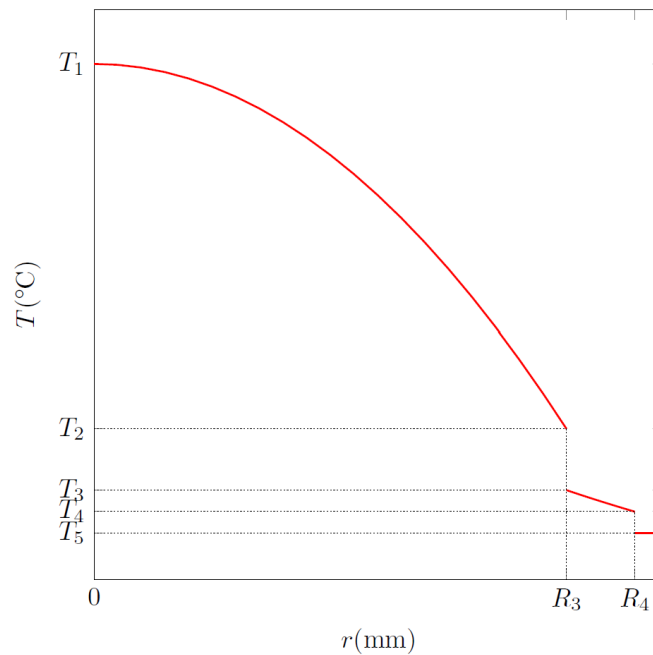
A.N. : $T_2 = 422 \text{ }^\circ\text{C}$

D'après la Q.3 :

$$T_1 = T_2 + \frac{P_V}{4\lambda_2} R_3^2$$

A.N. : $T_1 = 838 \text{ }^\circ\text{C}$

7. .



8. Si le pressuriseur du circuit primaire est défectueux et que la pression du fluide caloporteur diminue, alors la température de vaporisation de l'eau diminue aussi (cf. diagramme $P - T$). Le souci est que si T_5 devient supérieur à la température de vaporisation, alors l'eau du circuit primaire se vaporise : il en résulte une mauvaise évacuation de la puissance thermique dégagée par le combustible (baisse du coefficient h_4 , perturbation des pompes de circulation...). Dans ce cas, les températures dans le combustible et la gaine augmentent, pouvant conduire à une vaporisation de celles-ci.

Pour évacuer une puissance plus importante, on peut augmenter la vitesse de circulation du fluide caloporteur (ce qui revient à augmenter h_4 et augmenter le débit massique du fluide caloporteur), mais tout en ne diminuant pas la pression du fluide caloporteur (ce qui n'est pas si simple à réaliser techniquement).