

Ondes acoustiques dans les fluides

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Modélisation de la propagation des ondes sonores | 2 |
| I.1 | Présentation | 2 |
| I.2 | Approximation acoustique | 2 |
| I.3 | Équations linéarisées | 3 |
| I.4 | Équation de propagation de d'Alembert | 4 |
| I.5 | Célérité des ondes acoustiques | 5 |
| II | Étude énergétique | 5 |
| II.1 | Bilan énergétique | 5 |
| II.2 | Intensité acoustique et niveau d'intensité sonore | 6 |
| III | Ondes planes progressives harmoniques (OPPH) | 6 |
| III.1 | Définition (rappels) | 6 |
| III.2 | Relation de dispersion | 7 |
| III.3 | Caractère longitudinal de l'OPPH sonore | 7 |
| III.4 | Impédance acoustique | 8 |
| III.5 | Aspects énergétiques d'une OPPH | 8 |
| III.6 | Justification de l'approximation acoustique | 9 |
| IV | Réflexion et transmission sur une interface plane | 10 |
| IV.1 | Modélisation de l'onde plane | 10 |
| IV.2 | Conditions aux limites à l'interface $x = 0$ | 10 |
| IV.3 | Coefficients de réflexion et de transmission en amplitudes | 11 |
| IV.4 | Coefficients de réflexion et de transmission en puissances | 12 |
| V | Ondes sphériques | 12 |
| V.1 | Ondes sphériques progressives | 12 |
| V.2 | Cas d'une onde sphérique progressive harmonique divergente | 12 |
| V.3 | Onde plane / sphérique et diffraction | 13 |
| | Exercices | 14 |

Questions de cours

- Présenter l'approximation acoustique et établir dans ce modèle les équations linéarisées.
- À partir des équations linéarisées, établir l'équation de propagation pour la surpression à 1D et citer une généralisation à 3D. Établir l'expression de la célérité des ondes acoustiques dans l'air (gaz parfait) en fonction de la température.
- Citer l'équation de conservation de l'énergie acoustique, en définissant les différents termes. Définir l'intensité sonore et le niveau d'intensité sonore. Ordres de grandeurs.
- Présenter l'onde plane progressive harmonique. Démontrer l'expression de l'impédance acoustique.
- Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude pour la vitesse et la surpression dans le cas d'une interface de surface S entre deux milieux non miscibles d'impédances Z_1 et Z_2 .
- Onde sphérique : présentation et commentaire de la surpression générée par une sphère pulsante : $p(r,t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r}$. Lien avec les ondes planes progressives harmoniques.

Prise de notes : Le type d'onde mécanique (i.e. se propageant dans un milieu matériel) qui nous est le plus utile dans la vie de tous les jours est l'onde acoustique. On pense bien sûr à la voix et à la musique, mais il existe de très nombreuses applications (échographie, traitement médical pour détruire des caillots (cancer de la prostate), lévitation acoustique pour déplacer des masses en industrie, détection d'objets via des sonars, mesure de vitesse par effet Doppler...).

- ★ On a déjà étudié les ondes acoustiques (i.e. pour nous, ondes longitudinales) dans les solides, via la loi de Hooke $F = ES \frac{\Delta L}{L}$. Modélisation mésoscopique 1D avec l'étude d'une portion de solide entre x et $x + dx$. On avait alors trouvé une éq de d'Alembert avec $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$. La grosse différence dans les fluides est qu'on va considérer le caractère 3D de l'onde : on va retrouver la structure d'onde plane/onde sphérique.

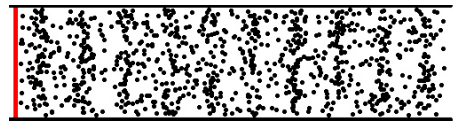
Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Déterminer une équation de propagation de d'Alembert, via la linéarisation des équations de mécanique des fluides.
2. Décrire la structure spatiale tridimensionnelle de deux modèles simples d'ondes progressives.
3. Exprimer des coefficients de réflexion et de transmission des ondes acoustiques à une interface plane, sous incidence normale.

I Modélisation de la propagation des ondes sonores

I.1 Présentation

Le son est une onde mécanique qui se propage à travers un milieu matériel. Dans les fluides, cette onde est transmise par changement de pression du milieu. Le mécanisme de propagation principal est le suivant : lorsqu'un son est émis, le milieu proche est comprimé, puis comprime à son tour le fluide un peu plus loin, et ainsi de suite, dans la direction de propagation de l'onde : il s'agit alors d'ondes **longitudinales**.



On distingue trois domaines fréquentiels à connaître :

- Infrasons : $f < 20$ Hz (inaudible par l'homme)
- Domaine audible : 20 Hz $< f < 20$ kHz
- Ultrasons : $f > 20$ kHz (inaudible par l'homme) (beaucoup d'applications physiques dans ce domaine fréquentiel)

I.2 Approximation acoustique

On souhaite modéliser la propagation des ondes sonores dans les fluides. Pour cela, on considère que :

- L'écoulement est instationnaire mais périodique de période T .
- L'écoulement est faiblement compressible : la masse volumique μ dépend de la pression P .

Dans le cadre du cours, réalisons également quelques hypothèses que nous validerons a posteriori :

- Les effets de la pesanteur seront négligés.
 - L'écoulement est parfait, i.e. les processus diffusifs sont négligés. Donc : pas de diffusion de la quantité de matière (viscosité dynamique $\eta = 0$) + pas de diffusion thermique (adiabatique). Du point de vue thermodynamique, on considère donc des transformations réversibles, et donc des transformations isentropiques.
- ★

Les champs physiques associés aux ondes sonores sont la **pression** $P(M,t)$, la **vitesse** (eulérienne)

des particules du milieu $\vec{v}(M,t)$ et leur **masse volumique** $\mu(M,t)$. Il nous faut donc 5 équations pour pouvoir connaître l'ensemble de ces champs. Les équations de la mécanique des fluides vont coupler de manière non linéaire ces différents champs : on va donc **linéariser** à l'ordre le plus bas ces équations. Pour ce faire, on considère que :

- au repos, en l'absence d'ondes sonores, le fluide est décrit par :

$$P(M,t) = P_0 \text{ uniforme} \quad , \quad \mu(M,t) = \mu_0 \text{ uniforme} \quad \text{et} \quad \vec{v}(M,t) = \vec{0} \quad (\text{I.1})$$

- **Approximation acoustique** : lors du passage d'une onde, on décrit l'onde sonore par des termes infiniment petits d'ordre 1, indicés par 1 :

★

$$P(M,t) = P_0 + P_1(M,t) \quad , \quad \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t) \quad (\text{I.2})$$

où $|P_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$. Quant à \vec{v}_1 , on peut la comparer à la vitesse caractéristique, c'est-à-dire la célérité c des ondes sonores : $\|\vec{v}_1\| \ll c$.

De plus, en notant a l'amplitude caractéristique de la vibration des particules de fluide, elle est de l'ordre de $v_1 T$ très inférieure à $cT = \lambda$: on a donc $a \ll \lambda$.

Remarque : On appelle $P_1(M,t) = P(M,t) - P_0$ la **surpression**. Elle est parfois notée en minuscule $p(M,t)$.

I.3 Équations linéarisées

a Équation du mouvement d'une particule de fluide

- Référentiel du laboratoire galiléen

Le fluide étant parfait, l'équation du mouvement est l'équation d'Euler, dans laquelle on néglige la pesanteur :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

soit

★

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1 \right) = - \overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + P_1) \quad (\text{I.3})$$

Or (en comptant les indices) :

- $\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$: ordre 2
- $\mu_0 (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1$: ordre 2
- $\mu_1 (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1$: ordre 3

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}}(P_1)}$$

b Équation de conservation de la masse

Exprimons et linéarisons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \iff \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \vec{v}_1 + \mu_1 \vec{v}_1) = 0 \implies \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0} \quad (\text{I.4})$$

c Équation thermodynamique

Nous avons pour l'instant 4 équations pour 5 inconnues, il nous faut donc une équation supplémentaire, reliant la masse volumique μ à la pression P . On parle d'équation thermodynamique, car on se sert de l'hypothèse d'un écoulement adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On va alors utiliser un **coefficient thermoélastique** tabulé, à savoir le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, noté χ_s et défini par :

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (\text{I.5})$$

Ce coefficient χ_s , quasiment constant, est positif, homogène à l'inverse d'une pression, et petit. Typiquement, à l'équilibre, $\chi_s(\text{eau}) \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\chi_s(\text{air}) \simeq 7 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

Pour une particule de fluide de masse δm constante (système fermé), on a :

$$\chi_s = - \left(\frac{\mu}{\delta m} \frac{\partial \frac{\delta m}{\mu}}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s$$

Dans le modèle effectué, l'entropie reste constante :

$$\star \quad \chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$$

En évaluant χ_s au repos :

$$\chi_s = \chi_{s,0} = \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{P_1} \Rightarrow \mu_1 = \mu \chi_{s,0} P_1 = (\mu_0 + \mu_1) \chi_{s,0} P_1$$

En linéarisant à l'ordre 1 :

$$\boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1}$$

(Je conseille de connaître cette dernière équation par coeur.)

Remarque : Afin que le terme de droite de cette dernière équation soit d'ordre 1, il faut bien évaluer χ_s au repos (on a alors $\chi_s = \chi_{s,0}$). Pour alléger les notations, on se contentera d'écrire dans la suite χ_s .

I.4 Équation de propagation de d'Alembert

Dans le cadre du programme, on va établir l'équation de propagation associée à la surpression à 1D en coordonnées cartésiennes.

Ainsi, tous les champs ne dépendent que de x et de t et $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\vec{e}_x$. Les 3 équations couplées sont :

- $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$
- $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$
- $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$

Donc :

$$\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = 0$$

★ Or, avec le théorème de Schwarz :

$$\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}} \quad (\text{I.6})$$

La surpression vérifie donc une équation de d'Alembert à 1D, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité.

Le même travail peut être effectué pour la vitesse $\vec{v}_1 = v_1(x,t)$ dans une modélisation unidimensionnelle et on aboutit à $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$.

On peut généraliser ces équations d'onde dans le cas 3D :

Equations de d'Alembert 3D pour les ondes acoustiques

Dans le cadre de l'approximation acoustique dans un écoulement parfait et en négligeant la pesanteur, on admet que les ondes acoustiques sont régies par des équations de d'Alembert 3D :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta P_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{v}_1$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité des ondes (μ_0 : masse volumique du fluide au repos et χ_s : coefficient de compressibilité isentropique au repos).

I.5 Célérité des ondes acoustiques

La détermination de la célérité des ondes sonores (à ne pas confondre avec la vitesse mésoscopique des particules de fluide v_1) nécessite de connaître la masse volumique μ_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_s . Dans le cas d'un gaz parfait, on peut se servir de :

- l'équation des gaz parfait $Pd\tau = \delta n RT = \frac{\delta m}{M} RT$ conduisant à $\mu = \frac{PM}{RT}$ et donc $\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$;
- la loi de Laplace, du fait de la transformation isentropique d'un gaz parfait : $PV^\gamma = \text{cste} = P\mu^{-\gamma}$. On différencie logarithmiquement :

★

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \implies \chi_s = \frac{1}{\gamma P} \implies \chi_{s,0} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (\text{I.7})$$

D'où une célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{RT_0}{MP_0}} \times \gamma P_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \quad (\text{I.8})$$

soit avec $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, $\gamma = \frac{7}{5}$ (GP diatomique) à $T = 298 \text{ K}$, il vient $c = 345 \text{ m s}^{-1}$.

Pour des gaz réels, ou pour d'autres fluides, on peut par contre se servir des valeurs tabulées de μ_0 et χ_s . En particulier, retenons $c(\text{eau}) = 1400 \text{ m s}^{-1}$.

II Étude énergétique

II.1 Bilan énergétique

a Vecteur densité de courant énergétique

Soit un élément de surface $d\vec{S}$. Sous l'effet de l'onde, celui-ci se déplace à la vitesse \vec{v}_1 , l'onde acoustique exerçant la force $d\vec{F} = P_1 d\vec{S}$. L'énergie, sonore, qui traverse cette surface pendant la durée dt vaut donc :

$$d^2 \mathcal{E} = (d\vec{F} \cdot \vec{v}_1) dt = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt \quad (\text{II.1})$$

avec $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ le **vecteur de Poynting acoustique**, vecteur densité de courant énergétique acoustique, homogène à une puissance surfacique (exprimée en W m^{-2}). Notons que l'on ne tient compte que de la surpression qui caractérise l'onde sonore, et non de la pression au repos.

La puissance sonore traversant une surface S vaut alors :

★

$$P_{\text{son}} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

b Équation de conservation de l'énergie

Afin d'écrire un bilan énergétique, faisons un parallèle avec les équations de conservation établies dans le cadre de la diffusion :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

où ρ est homogène à une densité volumique de la grandeur transportée, soit ici une énergie volumique. On a alors fortement envie de calculer la divergence du vecteur de Poynting acoustique. Pour cela, on utilise une formule d'analyse vectorielle : $\text{div}(f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad}(f) + f \text{div}(\vec{A})$.

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\Pi}) &= \vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(P_1) + P_1 \text{div}(\vec{v}_1) \\ &= -\mu_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + P_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - P_1 \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right) - \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right) \end{aligned}$$

d'où l'équation locale de conservation de l'énergie acoustique :

$$\boxed{\frac{\partial e_a}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{e_a = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2} \quad (\text{II.3})$$

★ Unité de e_a : J m^{-3}

L'énergie volumique acoustique e_a se décompose en un terme d'énergie cinétique volumique, et un autre terme ressemblant à une sorte d'énergie potentielle élastique volumique.

II.2 Intensité acoustique et niveau d'intensité sonore

On définit l'intensité acoustique (ou sonore) comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting acoustique :

$$I = \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle \quad (\text{II.4})$$

Elle s'exprime également en W m^{-2} .

Or, l'oreille humaine détecte des intensités sonores variant entre 10^{-12} W/m^2 (seuil de détection) et 10 W/m^2 (seuil de douleur), soit sur 13 décades ! Les capteurs humains (oreilles et yeux) sont des détecteurs **logarithmiques**. On utilise alors plutôt le **niveau d'intensité sonore**, exprimé en décibel :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{II.5})$$

avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, intensité sonore de référence, correspondant au seuil moyen de perception sonore.

Ordres de grandeurs à connaître :

- Seuil de détection : $I_{dB} = 0 \text{ dB}$
- Conversation normale : $I_{dB} = 60 \text{ dB}$
- Seuil de douleur : $I_{dB} = 120 \text{ dB}$

III Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

III.1 Définition (rappels)

Comme à chaque fois que l'on a rencontré une équation de d'Alembert, une base de solutions est l'ensemble des OPPH se propageant dans toutes les directions de l'espace. Ecrivons, par exemple, la fonction d'onde de suppression d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants :

★ $P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi)$
soit en notation complexe : $\underline{P}_1(x,t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{P}_{10} = P_{10} e^{j\varphi}$

Cette fonction d'onde caractérise bien une OPPH car :

- *Onde plane* : A t fixé, si $x = \text{cste}$, on a bien $P_1 = \text{cste}$: les surfaces d'onde sont des plans d'équation $x = \text{cste}$.
- *Onde progressive* : Il y a couplage spatio-temporel dans un terme $\omega t - kx$.
- *Onde harmonique* : La fonction d'onde varie sinusoidalement avec t .

D'après la théorie de Fourier, toute onde plane progressive (OPP) est somme (éventuellement continue) d'ondes planes progressives harmoniques, et sera également solution de l'équation de d'Alembert. Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x croissants :

$$P_1(M,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{1n} \cos(n\omega t - n\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_n)$$

ou $P_1(M,t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi(\omega)) d\omega$

III.2 Relation de dispersion

Exercice : Déterminer la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert 3D sur la surpression.

★ Une OPPH de la forme $\underline{P}_1(M,t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est solution de l'équation de d'Alembert si :

$$(j\omega)^2 \underline{P}_1 = c^2 (-j\vec{k})^2 \underline{P}_1 \iff \omega^2 = c^2 k^2 \iff k = \pm \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.1})$$

On retrouve la relation de dispersion classique. On en déduit que la vitesse de phase (que l'on définit ici positivement) vaut toujours $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$: la propagation n'est pas dispersive.

III.3 Caractère longitudinal de l'OPPH sonore

Pour justifier le caractère longitudinal d'une OPPH sonore, il faut montrer que \vec{v}_1 est colinéaire à \vec{k} . On l'obtient avec l'équation d'Euler linéarisée :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_1)$$

Comme on étudie une OPPH, le plus simple pour calculer des dérivées spatio-temporelles est de passer en complexes :

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{v}}_1 = \underline{\vec{v}}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Il va donc nous falloir préciser l'action de l'opérateur vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}$ sur le champ complexe \underline{P}_1 .

Action d'un opérateur d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{P}_1) = \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial z} \vec{e}_z = -jk_x \underline{P}_1 \vec{e}_x - jk_y \underline{P}_1 \vec{e}_y - jk_z \underline{P}_1 \vec{e}_z = (-j\vec{k}) \underline{P}_1$$

★ Ainsi, l'équation d'Euler linéarisée donne :

$$\mu_0 j\omega \underline{\vec{v}}_1 = -(-j\vec{k}) \underline{P}_1 \Rightarrow \underline{\vec{v}}_1 = \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 \omega} \vec{k}$$

Le champ eulérien des vitesses est donc colinéaire au vecteur \vec{k} , ce qui traduit bien le caractère longitudinal : le mouvement des particules de fluide est dans la même direction que la propagation de l'onde.

III.4 Impédance acoustique

On définit la notion d'impédance acoustique comme le rapport, en notation complexe, entre la "cause" de l'onde (grandeur d'excitation, source) sur la "conséquence", ici respectivement la surpression et le champ de vitesse eulérien. Ainsi, on définit l'**impédance acoustique** par (2 définitions possibles) :

$$Z = \frac{P_1(M,t)}{v_1(M,t)} \quad \text{ou parfois} \quad Z = \frac{P_1(M,t)}{D_v(M,t)} \quad (\text{III.2})$$

où $D_v = Sv_1(M,t)$ est le débit volumique à travers la surface S à travers laquelle passe l'onde réelle. Dans toute la suite nous utiliserons la première définition.

On souhaite faire le lien entre les champs de vitesse et de surpression : on utilise donc à nouveau le PFD linéarisé.

Pour une OPPH se propageant dans le sens $+\vec{e}_x$, on a :

$$\vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0\omega} k\vec{e}_x = \frac{P_1}{\mu_0c} \vec{e}_x \implies Z = \mu_0c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}} = Z_c \quad (\text{III.3})$$

★

Pour une OPPH se propageant dans le sens $-\vec{e}_x$ du type $P_1 = P_{10}e^{j(\omega t+kx)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$, un signe apparaît du fait de la dérivée spatiale :

$$\vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0\omega} (-k\vec{e}_x) = -\frac{P_1}{\mu_0c} \vec{e}_x \implies Z = -\mu_0c = -Z_c \quad (\text{III.4})$$

Relation entre surpression et vitesse pour une OPP

L'impédance étant réelle et indépendante de ω , on généralise la notion d'impédance acoustique à toute OPP :

- pour une OPP se propageant dans le sens $+\vec{u}$, $P_1^+(M,t) = Z_c v_1^+(M,t)$;
- pour une OPP se propageant dans le sens $-\vec{u}$, $P_1^-(M,t) = -Z_c v_1^-(M,t)$;

en posant $Z_c = \mu_0c$. Citons deux ordres de grandeurs importants (à ne pas connaître) : $Z(\text{air}) = 410 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $Z(\text{eau}) = 1.4 \times 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

De manière globale :

$$Z(\text{solide}) \gg Z(\text{liquide}) \gg Z(\text{gaz}) \quad (\text{III.5})$$

III.5 Aspects énergétiques d'une OPPH

Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air :

$$P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x,t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{III.6})$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ et $P_1(x,t) = Z_c v_1(x,t) \implies P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0c$.

Exercice : Dans le cas particulier d'une OPPH, déterminer l'expression des deux énergies volumiques, les comparer. Exprimer enfin le vecteur de Poynting en fonction de e_a .

Écrivons les deux énergies volumiques ainsi définies :

$$\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{III.7})$$

tandis que l'équivalent d'énergie potentielle s'écrit :

$$\star \quad \frac{1}{2}\chi_s P_1^2 = \frac{\chi_s}{2} P_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\chi_s \mu_0^2 c^2}{2} v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 \quad (\text{III.8})$$

On observe donc que les deux énergies sont égales à tout instant : on parle d'**équipartition de l'énergie**. (Ce résultat est général pour une OPP.)

Donc, $e_a = \mu_0 v_1^2$. Enfin le vecteur de Poynting acoustique s'écrit :

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1 = \mu_0 c v_1^2 \vec{e}_x = \boxed{e_a c \vec{e}_x} \quad (\text{III.9})$$

faisant le lien entre le vecteur densité de courant énergétique, la densité volumique d'énergie et la vitesse de propagation de l'énergie !

III.6 Justification de l'approximation acoustique

Grâce aux OPPH, nous allons pouvoir vérifier *a posteriori* que les approximations sur lesquelles s'appuie la théorie de propagation d'une onde acoustique sont bien vérifiées quantitativement.

a Validation des linéarisations à l'ordre 1

Vérifions quantitativement que l'amplitude de la vitesse, la surpression et le déplacement a vérifient bien $v_{10} \ll c$, $P_{10} \ll P_0$ et $a \ll \lambda$. Plaçons-nous à une fréquence $f = 1$ kHz, et avec $I_{dB} = 120$ dB, c'est-à-dire $I = I_0 10^{I_{dB}/10} = 1 \text{ W m}^{-2}$ (seuil de douleur).

On a :

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = Z \langle v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{10}^2 \quad (\text{III.10})$$

On en déduit $v_{10} = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}}$. Puis :

★

$$P_{10} = Z v_{10} = \mu_0 c \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}} = \sqrt{2I \mu_0 c}$$

L'amplitude du mouvement vaut alors (leur dire que $x(t) = \int v_1(t) dt$) : $a \simeq \frac{v_{10}}{\omega}$.

A.N. : Pour l'air, avec $\mu_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et $c = 340 \text{ m/s}$, on a : $v_{10} = 7 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} \ll c$ et $P_{10} = 3 \times 10^1 \text{ Pa} \ll P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $a = 1 \times 10^{-5} \text{ m} \ll \lambda = \frac{c}{f} = 0.3 \text{ m}$

Les linéarisations à l'ordre 1 sont largement vérifiées quantitativement.

b Validation du fait de négliger la pesanteur

On souhaite vérifier que $\|\mu \vec{g}\| \ll \|\vec{\text{grad}}(P)\|$. Il faut comparer des termes d'ordre 1 entre eux (les termes d'ordre 0 correspondent au cas d'équilibre, donc sans onde). Ainsi, on doit vérifier :

$$\mu_1 g \ll \frac{P_1}{\lambda} \iff \mu_0 \chi_s P_1 g \ll \frac{P_1}{\lambda} \iff g \lambda (\mu_0 \chi_s) = \frac{g \lambda}{c^2} \ll 1 \iff \frac{g}{c f} \ll 1 \iff f \gg \frac{g}{c}$$

Pour l'air, on a $\frac{g}{c} = 29 \times 10^{-3} \text{ Hz}$. Donc, cette approximation est largement vérifiée également pour des sons audibles.

c Validation du caractère adiabatique

On souhaite vérifier que les phénomènes de diffusion thermique sont négligeables à l'échelle caractéristique d'évolution de l'onde, soit en terme spatial, que la longueur de diffusion thermique $L_{\text{diff}} \ll \lambda$.

Pour l'air, le coefficient de diffusion thermique $D_{\text{diff}} \sim 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. En ordre de grandeur :
 $L_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{D_{\text{diff}}}{f}}$.

Ainsi, on souhaite vérifier que :

$$L_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{D_{\text{diff}}}{f}} \ll \lambda = \frac{c}{f} \iff f \ll \frac{c^2}{D_{\text{diff}}} = 6 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Le caractère adiabatique est donc, là encore, largement validé quantitativement.

IV Réflexion et transmission sur une interface plane

IV.1 Modélisation de l'onde plane

On étudie la propagation d'une OPPH incidente de pulsation ω dirigée selon $+\vec{e}_x$, rencontrant une interface plane située en $x = 0$ sous incidence normale séparant deux milieux non miscibles caractérisés par leur impédance Z_1 et Z_2 et leur célérité c_1 et c_2 . Étant donné le changement d'impédance, on ne peut pas avoir, avec une seule OPPH (champs P_1 et v_1), $P_1 = Z_1 v_1 = Z_2 v_2$: il est nécessaire d'avoir une onde réfléchie (indiquée r) et une onde transmise (indiquée t) :

$$\begin{aligned} \underline{P}_i(x,t) &= \underline{P}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} & \text{et} & & \underline{v}_i &= \underline{v}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x \\ \underline{P}_r(x,t) &= \underline{P}_{r0} e^{j(\omega t + k_r x)} & \text{et} & & \underline{v}_r &= \underline{v}_{r0} e^{j(\omega t + k_r x)} \vec{e}_x \\ \underline{P}_t(x,t) &= \underline{P}_{t0} e^{j(\omega t - k_t x)} & \text{et} & & \underline{v}_t &= \underline{v}_{t0} e^{j(\omega t - k_t x)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Plusieurs remarques sur cette modélisation des ondes :

Prise de notes (car déjà fait plein de fois) :

- L'onde réfléchie se propage selon $-\vec{e}_x$, alors que les ondes incidente et transmise se propagent selon $+\vec{e}_x$: attention au $\pm kx$.
- Par linéarité des phénomènes de propagation acoustique, la pulsation temporelle de l'onde est conservée au cours de la propagation (même ω).
- ★ • Pour que ces ondes soient solutions de l'équation de d'Alembert, il est nécessaire que $k = \frac{\omega}{c_1} = k_r$ et que $k_t = \frac{\omega}{c_2}$.
- Il y a un lien entre la surpression et la vitesse : $\underline{P}_{i0} = Z_1 \underline{v}_{i0}$; $\underline{P}_{r0} = -Z_1 \underline{v}_{r0}$ et $\underline{P}_{t0} = Z_2 \underline{v}_{t0}$.
- On pourrait imposer l'un des déphasages à l'origine des temps et de l'espace nul sans perte de généralité.

Ainsi, dans la zone $x \leq 0$, la surpression **totale** est, par superposition : $\underline{P}_1(x,t) = \underline{P}_i(x,t) + \underline{P}_r(x,t)$. Dans la zone $x \geq 0$, la surpression **totale** vaut : $\underline{P}_2(x,t) = \underline{P}_t(x,t)$.

IV.2 Conditions aux limites à l'interface $x = 0$

a Cas général

On considère l'interface fixe en $x = 0$, car, d'après l'approximation acoustique, l'amplitude des déplacements est très petite devant la longueur caractéristique de l'onde λ . Il y a alors deux conditions aux limites à respecter en $x = 0$:

1. **Continuité du débit volumique** Dans le cas contraire, il y aurait mélange des deux fluides ou création de vide.
2. **Condition aux limites pour la surpression** L'idée est d'appliquer le PFD sur l'interface, en prenant en compte les forces de pression appliquées par les deux fluides de part et d'autre.

b Cas particulier : interface (sans masse) entre deux fluides non miscibles

Dans toute la suite du cours, on traitera uniquement le cas particulier où l'on place deux fluides non miscibles dans un récipient. La surface de contact est de dimension S . Traduisons les deux conditions aux limites dans ce cas particulier.

- Les ondes étant planes, la vitesse associée est constante sur la section S . Donc, la continuité du débit volumique s'écrit :

$$Sv_i(0,t) + Sv_r(0,t) = Sv_t(0,t) \Rightarrow v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$$

Il y a continuité de la vitesse.

- PFD à une tranche d'épaisseur 2ε autour de $x = 0$, projeté selon \vec{e}_x :

$$\star \quad \delta m(\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} = S(P_0 + P_i(-\varepsilon,t) + P_r(-\varepsilon,t)) - S(P_0 + P_t(+\varepsilon,t))$$

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $\delta m(\varepsilon) \rightarrow 0$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ borné, conduisant à :

$$P_i(0,t) + P_r(0,t) = P_t(0,t)$$

Il y a continuité de la surpression, dans le cas où l'interface n'a pas de masse (pas de cloison).

IV.3 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitudes

On peut ensuite chercher à déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la vitesse et la pression :

$$\underline{r}_v = \frac{v_{r0}}{v_{i0}} \quad , \quad \underline{t}_v = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \quad , \quad \underline{r}_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{t}_p = \frac{P_{t0}}{P_{i0}} \quad (\text{IV.1})$$

Ces coefficients sont définis avec les caractéristiques des ondes au niveau de l'interface.

Réécrivons les conditions aux limites en termes d'impédances et de vitesse :

$$\underline{v}_{i0} e^{j\omega t} + \underline{v}_{r0} e^{j\omega t} = \underline{v}_{t0} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{v}_{i0} + \underline{v}_{r0} = \underline{v}_{t0} \quad \text{et} \quad Z_1 \underline{v}_{i0} - Z_1 \underline{v}_{r0} = Z_2 \underline{v}_{t0} \quad (\text{IV.2})$$

puis on utilise les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour les vitesses :

$$\underline{v}_{i0}(1 + \underline{r}_v) = \underline{t}_v \underline{v}_{i0} \quad \text{et} \quad Z_1(1 - \underline{r}_v) \underline{v}_{i0} = Z_2 \underline{t}_v \underline{v}_{i0} \iff 1 + \underline{r}_v = \underline{t}_v \quad \text{et} \quad Z_1(1 - \underline{r}_v) = Z_2 \underline{t}_v \quad (\text{IV.3})$$

conduisant à

$$\star \quad Z_1(1 - \underline{r}_v) = Z_2(1 + \underline{r}_v) \iff \underline{r}_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = r_v \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \underline{t}_v = 1 + \underline{r}_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = t_v \in \mathbb{R}.$$

D'autre part,

$$\underline{r}_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} = \frac{-Z_1 \underline{v}_{r0}}{Z_1 \underline{v}_{i0}} = -\underline{r}_v = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = r_p \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \underline{t}_p = \frac{Z_2 \underline{v}_{t0}}{Z_1 \underline{v}_{i0}} = \frac{Z_2}{Z_1} \underline{t}_v = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = t_p \in \mathbb{R}.$$

On constate (comme d'habitude !) qu'il n'y a pas d'onde réfléchie dans le cas d'adaptation d'impédance $Z_1 = Z_2$.

Prise de notes : Il existe cependant des situations où il est impossible de modifier Z_1 ou Z_2 : on peut alors ajouter un milieu supplémentaire pour limiter les réflexions. C'est le cas des sous-marins allemands utilisés pendant la guerre : eau / couche de caoutchouc mousse / fer. Attention au cas de la sonde d'échographie : changement de milieu intermédiaire : utilisation d'un gel dans l'unique but de limiter la présence d'une couche d'air qui n'est pas adaptée au niveau des impédances (on passe de sonde / air / peau à sonde / gel / peau). On peut aussi changer la section : cas des hauts-parleurs.

IV.4 Coefficients de réflexion et de transmission en puissances

On définit également des coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$R = \frac{\langle P_{\text{son,r}}(x=0) \rangle}{\langle P_{\text{son,i}}(x=0) \rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle P_{\text{son,t}}(x=0) \rangle}{\langle P_{\text{son,i}}(x=0) \rangle}$$

Pour des ondes planes, le vecteur de Poynting est identique sur toute la section S de l'interface, à chaque instant. On peut donc sortir les surfaces $S_1 = S_2 = S$ des intégrales précédentes :

$$R = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0) \right\| \right\rangle S_1}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0) \right\| \right\rangle S_1} = \frac{I_r(0)S_1}{I_i(0)S_1} = \frac{I_r(0)}{I_i(0)} \quad \text{et} \quad T = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(x=0) \right\| \right\rangle S_2}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0) \right\| \right\rangle S_1} = \frac{I_t(0)S_2}{I_i(0)S_1} = \frac{I_t(0)}{I_i(0)}$$

Comme $I_i = \langle \|P_i \vec{v}_i\| \rangle = Z_1 \langle v_i^2 \rangle$ et $I_r = Z_1 \langle v_r^2 \rangle$, il vient

$$R = \frac{v_{r0}^2/2}{v_{i0}^2/2} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (\text{IV.4})$$

tandis que comme $I_t = Z_2 \langle v_t^2 \rangle$, le coefficient de transmission en puissance vaut :

$$T = \frac{Z_2 \langle v_t^2 \rangle}{Z_1 \langle v_i^2 \rangle} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (\text{IV.5})$$

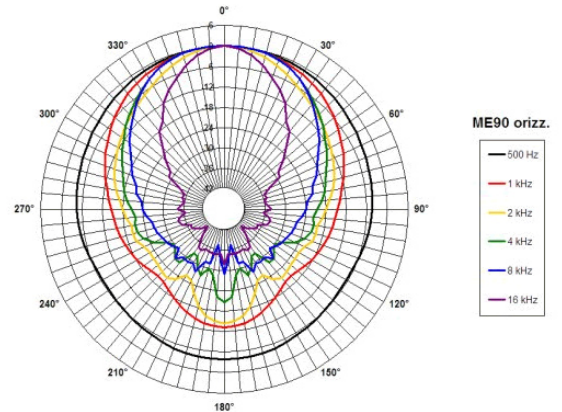
On vérifie alors que $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie à l'interface.

- ★ On remarque que si $Z_1 = Z_2$, alors $R = 0$ et $T = 1$: il y a transfert maximal de puissance entre l'onde incidente et l'onde transmise. On parle alors d'adaptation d'impédances.

V Ondes sphériques

V.1 Ondes sphériques progressives

Une source sonore réelle n'émet jamais dans une seule direction, mais souvent de manière anisotrope dans plusieurs directions. On peut d'ailleurs mesurer, à distance fixée, un diagramme de directivité d'un haut-parleur en traçant l'intensité sonore en fonction de l'angle. La modélisation en ondes planes semble donc peu adaptée pour décrire une onde acoustique réelle...



V.2 Cas d'une onde sphérique progressive harmonique divergente

Considérons le cas d'une sphère pulsante située en $r = 0$ imposant localement une perturbation sinusoïdale de sa surface, à l'origine d'une onde acoustique sphérique divergente. On peut alors écrire la surpression avec une dépendance harmonique du type :

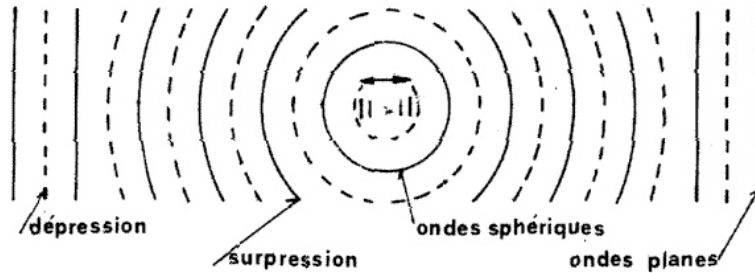
$$P_1(r,t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r} \quad (\text{V.1})$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'après la relation de dispersion.

On peut commenter cette expression :

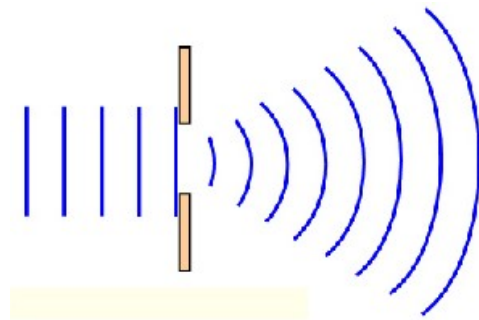
- Les surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Le centre $r = 0$ de ces sphères est appelé foyer de l'onde sphérique.
- L'amplitude des ondes décroît en $1/r$, mais ce n'est PAS dû à de la dissipation d'énergie. En effet, aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte dans les équations du mouvement. Si l'amplitude diminue, c'est que la puissance de l'onde, qui reste constante, est répartie sur une surface de plus en plus grande, de valeur $4\pi r^2$. (Le vecteur de Poynting acoustique est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$.) On parle d'atténuation géométrique (et surtout pas d'absorption).
- À grande distance de l'émetteur isotrope, les surfaces d'ondes, qui sont des sphères de rayon r , deviennent localement assimilables à des ondes planes (à condition de se placer dans une zone d'extension spatiale de petite dimension devant le rayon de courbure de l'onde sphérique).

★



V.3 Onde plane / sphérique et diffraction

Notons enfin l'importance de la diffraction. En effet, si on place sur le parcours d'une onde plane (ou assimilée) un obstacle de dimension caractéristique $a \leq \lambda$, l'onde cesse d'être plane en aval de l'obstacle, et les fronts d'onde se déforment. L'onde en aval s'approche alors d'une onde sphérique.



★

Définir le demi-angle d'ouverture de diffraction $\theta \sim \frac{\lambda}{a}$ sur le schéma.

Exercices

Ex. 1 (*Ecrit Centrale PC 2025*) **Prise en compte de la viscosité et d'un mouvement d'ensemble du fluide**

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un numéro de question souligné. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Des données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'exercice.

On s'intéresse dans cette partie **II** à la propagation d'ondes acoustiques dans l'eau, en présence du champ de pesanteur d'intensité $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et d'un éventuel mouvement d'ensemble de l'eau (circulation dans une canalisation, courant marin...) de vitesse uniforme et constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Ainsi, la pression et la vitesse dans l'eau seront caractérisées, en notations complexes, par :

$$p(\vec{r}, t) = p_{\text{st}}(z) + p_1 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \vec{u}_x + \vec{v}_1 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$$

où $p_{\text{st}}(z)$ désigne la répartition statique de pression (en l'absence d'onde) avec, à la surface libre $z = 0$ de l'eau, $p_{\text{st}}(0) = p_0 = 1 \text{ bar}$; on se limitera à $|p_1| \ll p_{\text{st}}(z)$ et $\|\vec{v}_1\| \ll v_0 \ll c_a$ où c_a désignera la célérité de l'onde ainsi étudiée. On rappelle l'équation dynamique de Navier-Stokes qui lie les évolutions de la pression p , de la vitesse \vec{v} et de la masse volumique ρ en fonction de la viscosité dynamique de l'eau η :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}.$$

Q27. En déduire l'expression de dp_{st}/dz puis une forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes.

Dans toute la suite on pourra noter les expressions complexes de la pression $p(\vec{r}, t) = p_{\text{st}}(z) + \underline{p}$, de la masse volumique $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \underline{\rho}$ et de la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \vec{u}_x + \underline{\vec{v}}$. Dans ces expressions, $p_{\text{st}}(z)$, ρ_0 et $v_0 \vec{u}_x$ désignent les valeurs moyennes en l'absence d'onde tandis que \underline{p} , $\underline{\rho}$ et $\underline{\vec{v}}$ désignent les (petites) fluctuations de ces grandeurs dues à l'onde.

II.1 – Propagation et atténuation des ondes acoustiques

Q28. Rappeler la définition de la compressibilité χ de l'eau en en déduire le lien entre les fluctuations \underline{p} de la pression et $\underline{\rho}$ de la masse volumique, en se limitant au premier ordre.

Dans l'eau, l'intensité acoustique (des sonars par exemple) est mesurée par $I_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{|\underline{p}|}{p_{\text{ref}}}$ où $p_{\text{ref}} = 1 \mu\text{Pa}$; les sonars les plus puissants atteignent (exceptionnellement) $I_{\text{dB}} = 240 \text{ dB}$, dépassant ainsi les chants des baleines qui atteignent au maximum $I_{\text{dB}} = 180 \text{ dB}$.

On s'intéresse d'abord à la propagation des ondes acoustiques dans un fluide parfait ($\eta = 0$) en l'absence de courant d'ensemble ($v_0 = 0$).

Q29. Établir les deux équations linéarisées $\rho_0 \omega \underline{\vec{v}} = \vec{k} \underline{p}$ et $\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = \chi \omega \underline{p}$. En déduire la célérité c_a des ondes acoustiques dans l'eau et faire l'application numérique.

Q30. Dans le cas des ondes émises lors du chant d'une baleine près de la surface libre de l'eau, estimer et commenter les amplitudes des ondes de masse volumique $|\underline{\rho}|$ et de vitesse $|\underline{\vec{v}}|$.

On cherche maintenant à connaître l'effet de la prise en compte de la viscosité de l'eau sur la propagation des ondes acoustiques. On exprime à cet effet l'équation de dispersion donnant \vec{k}^2 en fonction de ω , c_a et d'autres caractéristiques du fluide (\vec{k}^2 peut être une fonction complexe). En l'absence de viscosité, $\vec{k}^2 = f_0(\omega, c_a)$.

Q31. Montrer que $\vec{k}^2 = \frac{f_0(\omega, c_a)}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$ et exprimer ω_c en fonction de η et χ . Proposer une interprétation simple de la grandeur ω_c et commenter sa valeur numérique.

Q32. On lit dans la littérature technique que l'atténuation des ondes acoustiques dans l'eau est faible dans le domaine audio basse fréquence ; à plus haute fréquence et pour les ultrasons elle s'exprime par un coefficient d'atténuation β qui s'exprime en décibel par kilomètre. Justifier cette affirmation puis exprimer le coefficient β en fonction notamment de la viscosité de l'eau, avant de proposer une application numérique pour deux domaines de fréquences dont vous justifierez le choix. Comparer aux mesures effectuées dans l'atlantique pour lesquelles $\beta \sim 0,12 \text{ dB/km}$ aux fréquences audio, et conclure.

II.2 – Entraînement de l'onde acoustique par un courant d'ensemble

On revient ici à l'étude des ondes acoustiques dans un fluide parfait ($\eta = 0$) mais on tient compte de la vitesse d'ensemble de l'eau, uniforme et constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$; l'onde se propage dans une direction caractérisée par le vecteur d'onde réel $\vec{k} = k \vec{u}$ où $k > 0$ et \vec{u} est un vecteur unitaire. La vitesse des courants océaniques en particulier vérifie $|v_1| \ll v_0 \ll c_a$.

Q33. Proposer un ordre de grandeur pour v_0 , en kilomètre par heure. Expliciter ensuite $\text{div}(\rho \vec{v})$ et $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ avec $\vec{v} = \vec{v}_0 + \underline{\vec{v}}$ et $\rho = \rho_0 + \underline{\rho}$ en vous limitant aux termes du premier ordre en $\underline{\rho}$ et $\underline{\vec{v}}$.

Q34. Montrer les deux équations $\rho_0 \underline{\vec{v}}(\omega - \Omega) = \underline{p} \vec{k}$ et $\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = (\omega - \Omega) \underline{p} \chi$ et expliciter la grandeur Ω en fonction de v_0 , k et $\vec{u} \cdot \vec{u}_x = \cos \theta$.

Q35. En déduire la célérité c'_a des ondes acoustiques en fonction de v_0 , $\cos \theta$ et de la valeur c_a obtenue dans l'eau au repos. Peut-on parler de loi de composition des vitesses ?

Données numériques :

- Compressibilité isentropique de l'eau : $\chi = 4.10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
- Masse volumique moyenne de l'eau : $\rho_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'eau : $\eta = 1.20 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$

Formulaire : $\text{div}(F \vec{A}) = F \text{div}(\vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}}(F) \cdot \vec{A}$

Correction de l'exercice 1

27. Au repos, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_{st}) - \rho g \vec{u}_z$$

soit en projection sur \vec{u}_z : $\frac{dp_{st}}{dz} = -\rho g$. On peut alors simplifier l'équation de Navier-Stokes dans le cas où une onde est présente :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} + (\underline{\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \underline{\vec{v}} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) + \eta \Delta \underline{\vec{v}}$$

La pesanteur n'a donc finalement pas d'influence sur la propagation de l'onde acoustique.

Propagation et atténuation des ondes acoustiques

28. Définition de la compressibilité : $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$.



Dans cet exercice, l'écoulement peut être visqueux. Il ne s'agit donc pas de la compressibilité isentropique... L'énoncé le passe sous silence et parle d'une compressibilité, de manière très générale. Au premier ordre, on doit évaluer χ à l'équilibre :

$$\chi \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Rightarrow \underline{\rho} = \rho_0 \chi \underline{p}$$

29. Equation d'Euler, issue de l'équation de Navier-Stokes dans le cas où $\eta = 0$:

$$(\rho_0 + \underline{\rho}) \left(\frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} + (\underline{\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \underline{\vec{v}} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{p})$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{p}) \Rightarrow \rho_0 i \omega \underline{\vec{v}} = -(-i \vec{k}) \underline{p} \Rightarrow \rho_0 \omega \underline{\vec{v}} = \vec{k} \underline{p}$$

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\vec{v}}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \underline{\rho}) \underline{\vec{v}}) = 0$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\underline{\vec{v}}) = 0 \Rightarrow i \omega \underline{\rho} + \rho_0 (-i \vec{k}) \cdot \underline{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = \frac{\omega}{\rho_0} \underline{\rho}$$

En utilisant la Q.28 :

$$\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = \chi \omega \underline{p}$$

En combinant les 2 équations :

$$\vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\underline{p}}{\rho_0 \omega} = \chi \omega \underline{p} \Rightarrow \vec{k}^2 = \chi \rho_0 \omega^2 \Rightarrow c_a^2 = v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} = \frac{1}{\chi \rho_0} \Rightarrow c_a = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}$$

Pour l'A.N., on peut utiliser la compressibilité isentropique de l'eau car le fluide est parfait et est donc en évolution adiabatique et réversible. A.N. : $c_a = 1.56 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$

30. On a : $|\underline{p}| = p_{ref} 10^{I_{dB}/20} = 1 \times 10^3 \text{ Pa}$. D'après la Q.28 : $|\underline{\rho}| = \rho_0 \chi |\underline{p}|$. A.N. : $|\underline{\rho}| = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$.
En utilisant l'une ou l'autre des équations données en Q.29, on a :

$$|\underline{\vec{v}}| = \frac{|\vec{k}|}{\omega} \frac{|\underline{p}|}{\rho_0} = \sqrt{\frac{\chi}{\rho_0}} |\underline{p}|$$

A.N. : $|\underline{\vec{v}}| = 6 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$.

On vérifie bien systématiquement $|\underline{p}| = p_1 \ll p_0$, $|\underline{\rho}| \ll \rho_0$ et $|\underline{\vec{v}}| = |\underline{\vec{v}}_1| \ll c_a$: l'approximation acoustique est validée a posteriori.

31. En l'absence de viscosité, on a établi que

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2} = \chi \rho_0 \omega^2 = f_0(\omega, c_a)$$

En prenant en compte la viscosité, l'équation de conservation de la masse et l'équation définissant la compressibilité sont inchangées. On a donc toujours : $\vec{k} \cdot \underline{\vec{v}} = \chi \omega \underline{p}$ (on passe sous silence le fait qu'il ne faudrait plus considérer la compressibilité isentropique).

En reprenant la Q.27, l'équation de Navier-Stokes devient cette fois, à l'ordre 1 :

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{p}) + \eta \Delta \underline{\vec{v}} \Rightarrow i \omega \rho_0 \underline{\vec{v}} = -(-i \vec{k}) \underline{p} + \eta (-i \vec{k})^2 \underline{\vec{v}} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{i \underline{p} \vec{k}}{i \omega \rho_0 + \eta \vec{k}^2}$$

En combinant ces deux équations, on trouve :

$$\frac{i \vec{k}^2 \underline{p}}{i \omega \rho_0 + \eta \vec{k}^2} = \chi \omega \underline{p} \Rightarrow \vec{k}^2 = \chi \rho_0 \omega^2 - i \eta \chi \omega \vec{k}^2 \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\chi \rho_0 \omega^2}{1 + i \eta \chi \omega} = \frac{f_0(\omega, c_a)}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$$

en posant $\omega_c = \frac{1}{\eta \chi}$.

ω_c est la pulsation caractéristique à partir de laquelle les effets visqueux influencent fortement la propagation de l'onde acoustique. Pour $\omega > \omega_c$, on a alors \vec{k}^2 non réel : il y a atténuation de l'onde acoustique. A.N. : $\omega_c = 2.03 \times 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$. Ainsi, dans le domaine audible et dans les applications ultrasonores, on a toujours $\omega \ll \omega_c$, l'atténuation reste relativement faible.

32. APPROPRIATION :

A basses fréquences audio, on peut considérer que $\vec{k}^2 \simeq f_0(\omega, c_a)$, ce qui implique que $k \in \mathbb{R}$: il n'y a quasiment pas d'atténuation de l'onde au cours de sa propagation.

A hautes fréquences audibles et pour les ultrasons, on a \vec{k}^2 non réel : il y a atténuation de l'onde au cours de sa propagation, caractérisée par la partie imaginaire de k .

STRATEGIE :

- Exprimer la partie imaginaire k_i dans le domaine hautes fréquences.
- Ré-écrire l'onde en décomposant $k = k_r + ik_i$ et en déduire l'expression de β .

RESOLUTION :

Au vu de l'A.N. de la question précédente, on peut considérer qu'on a toujours $\omega \ll \omega_c$, y compris pour les ultrasons utilisés dans les applications technologiques. Donc, on peut réaliser un développement limité de la relation de dispersion, à l'ordre 1 en ω/ω_c :

$$|\vec{k}| = \frac{\omega/c_a}{\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}} \Rightarrow |\vec{k}| \simeq \frac{\omega}{c_a} \left(1 - i\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = k_r + ik_i$$

avec $k_i = -\frac{\omega^2}{2c_a\omega_c}$.

On peut alors ré-écrire la surpression comme

$$\underline{p} = p_1 e^{k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)}$$

si on suppose une propagation selon $+\vec{e}_x$. On a donc $|\underline{p}| = p_1 e^{k_i x}$ et donc

$$I_{dB} = 20 \log\left(\frac{p_1}{p_{ref}}\right) + \frac{20}{\ln(10)} k_i x$$

soit un coefficient d'atténuation linéique

$$\beta = -\frac{20}{\ln(10)} k_i = \frac{10\eta\chi\omega^2}{\ln(10)c_a}$$

VALIDATION :

A.N. : Pour $f = 20$ kHz, limite de l'audible : $\beta = 0.0216$ dB/km, ce qui est inférieur d'un facteur 5 à la valeur tabulée pour l'Atlantique. Il faudrait savoir ce que l'énoncé entend par onde audio, mais cela semble montrer l'existence d'autres processus d'atténuation de l'onde acoustique dans l'eau de mer, que l'on n'a pas pris en compte dans la modélisation.

A.N. : Pour $f = 1$ MHz, fréquence ultrasonore maximale utilisée dans les sonars des sous-marins, on a $\beta = 54$ dB/km ce qui est une atténuation trop rapide avec la propagation pour des applications de type sonar.

Entraînement de l'onde acoustique par un courant d'ensemble

33. On a typiquement $v_0 \sim 1$ km h⁻¹.

A l'ordre 1, on a $\text{div}(\rho\vec{v}) = \text{div}(\rho_0\vec{v} + \underline{\rho}\vec{v}_0) = \rho_0 \text{div}(\vec{v}) + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\underline{\rho})$ en utilisant le formulaire.

A l'ordre 1, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$.

34. On a toujours : $\underline{\rho} = \rho_0\chi p$.

Equation d'Euler (cf Q.27) à l'ordre 1 :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{p}) \Rightarrow \rho_0 (i\omega - iv_0 k_x) \vec{v} = i\vec{k} \underline{p} \Rightarrow \rho_0 v v v (\omega - v_0 k \cos(\theta)) = \vec{k} \underline{p}$$

, soit le résultat demandé avec $\Omega = v_0 k \cos(\theta)$.

Equation de conservation de la masse à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) + \vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) = 0 \Rightarrow i\omega \underline{\rho} - i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v} - i\vec{v}_0 \cdot \vec{k} \underline{\rho} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v} = \frac{\omega \underline{\rho}}{\rho_0} - v_0 k \cos(\theta) \frac{\underline{\rho}}{\rho_0} = (\omega - \Omega) \frac{\underline{\rho}}{\rho_0}$$

En injectant la relation liée à la définition de la compressibilité, on obtient finalement

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = (\omega - \Omega)\chi p$$

35. En combinant les 2 équations, on obtient :

$$k^2 = \rho_0 \chi (\omega - \Omega)^2 = \frac{(\omega - \Omega)^2}{c_a^2}$$

La vitesse de phase est alors $v_\varphi = c'_a = \frac{\omega}{k}$. Donc :

$$c_a'^2 = \frac{c_a^2}{\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{c_a^2}{\left(1 - \frac{v_0 \cos(\theta)}{c'_a}\right)^2} \Rightarrow (c'_a - v_0 \cos(\theta))^2 = c_a^2 \Rightarrow c'_a = v_0 \cos(\theta) \pm c_a$$

Or, vu les odg, on a $v_0 < c_a$ et donc $v_0 \cos(\theta) < c_a$. Pour ne garder que la solution $c'_a > 0$, on en déduit :

$$c'_a = c_a + v_0 \cos(\theta)$$

ce qui correspond à une formule classique de composition des vitesses en considérant comme vitesse d'entraînement uniquement la composante de la vitesse du mouvement d'ensemble selon la direction de propagation de l'onde.

Remarque : Il n'était pas du tout évident que l'on trouve une formule type composition des vitesses, car ici on compose une vitesse des particules de fluides et une célérité d'onde.

Ex. 2 (Ecrit Mines-Ponts PSI 2022) Cloison

On considère de l'air initialement au repos (pression P_0 et masse volumique $\mu_0 = 1.0 \text{ kg m}^{-3}$ uniformes). On néglige l'influence de la pesanteur. Lors du passage d'une onde sonore, on note $P(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ la pression de l'air et $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$ sa masse volumique. On pose $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\vec{e}_x$ la vitesse des particules de fluide. L'écoulement provoqué par le passage de l'onde est supposé parfait.

9. Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

Sous cette approximation, on montre que $p_1(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

10. On rappelle que la solution générale de cette équation de d'Alembert s'écrit $p_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_s}\right)$.

Pourquoi peut-on néanmoins se limiter à l'étude des solutions de la forme, en notation complexe :

$$\underline{p}_1(x,t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$$

où \underline{A} , \underline{B} , ω et k sont des constantes ?

En représentation complexe, on note $\underline{p}_1(x,t) = p_{\text{im}} e^{j(\omega t - kx)}$ la surpression de l'air due à une onde plane progressive monochromatique et on pose $\underline{v}_1(x,t) = \frac{p_{\text{im}}}{Z_a} e^{j(\omega t - kx)}$ la vitesse associée des particules de fluide. Cette onde arrive en incidence normale sur une cloison située initialement en $x = 0$.

- - 11. Déterminer l'expression de Z_a en fonction de μ_0 et c_s . Comment appelle-t-on cette grandeur en acoustique? L'interaction de l'onde incidente avec la cloison donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p}_r(x,t) = \underline{p}_{\text{rm}} e^{j(\omega t + kx)}$ et une onde transmise $\underline{p}_t(x,t) = \underline{p}_{\text{tm}} e^{j(\omega t - kx)}$. Donner les expressions de $\underline{v}_r(x,t)$ et $\underline{v}_t(x,t)$ en fonction de Z_a , $\underline{p}_r(x,t)$ et $\underline{p}_t(x,t)$.

La cloison, de masse m , de surface S et d'épaisseur e , vibre en bloc sous l'effet de l'onde sonore de longueur d'onde $\lambda \gg e$. On modélise les efforts exercés sur la cloison par le plafond, le sol et les autres murs par une force de rappel élastique de raideur K . On note $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ la grandeur complexe associée au déplacement de la cloison par rapport à sa position d'équilibre en $x = 0$.

- - 12. En traduisant la continuité de la vitesse en $x \approx 0$ (au niveau de la cloison), déterminer une relation entre $\underline{v}_{\text{im}}$, $\underline{v}_{\text{rm}}$ et $\underline{v}_{\text{tm}}$. Pourquoi peut-on écrire cette condition aux limites en $x \approx 0$ malgré le déplacement de la cloison ?
- - 13. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la cloison en $x \approx 0$, montrer que celle-ci joue le rôle d'un filtre sonore de fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{p}_{\text{tm}}}{\underline{p}_{\text{im}}} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

où on explicitera H_0 , Q et ω_0 en fonction de m , S , K et Z_a . Tracer l'allure de la courbe $|\underline{H}|(\omega)$ et discuter le comportement de la cloison sur la transmission des ondes sonores. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$?

- - 14. On néglige désormais l'élasticité de la cloison. Dans quel cas est-ce légitime ? Donner alors l'expression approchée de $\underline{H}(j\omega)$ et commenter le comportement de la cloison. Déterminer l'épaisseur e de la cloison (de masse volumique $\mu_c = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) pour que l'intensité sonore soit affaiblie de 40 dB pour une fréquence de 200 Hz.

Correction de l'exercice 2

9. **Approximation acoustique** : les termes associés au passage de l'onde sont des termes infiniment petits d'ordre 1 : $|p_1| \ll P_0$; $|\mu_1| \ll \mu_0$ et $|v_1| \ll c_s$ avec c_s la célérité des ondes acoustiques.
10. La solution générale est une combinaison linéaire d'ondes planes progressives contra-propageantes. On peut se limiter à une combinaison linéaire de 2 OPPH contra-propageantes, car d'après l'analyse de Fourier, la solution générale sera alors une combinaison linéaire des OPPH à toutes les pulsations possibles.
11. On injecte les formes proposées d'OPPH complexes dans l'équation d'Euler linéarisée :

$$\mu_0 j\omega \frac{p_i}{Z_a} = -(-kx)p_i \rightarrow Z_a = \mu_0 \frac{\omega}{k} = \mu_0 c_s$$

en utilisant la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert $k = \frac{\omega}{c_s}$. Z_a est appelée l'impédance acoustique.

On a bien des OPPH réfléchi et transmise qui se propagent toutes deux dans l'air, on peut donc utiliser l'impédance acoustique :

$$\underline{v}_r(x,t) = -\frac{p_{rm}}{Z_a} e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_t(x,t) = \frac{p_{tm}}{Z_a} e^{j(\omega t - kx)}$$

12. Il y a continuité de la vitesse totale de l'air en $x = 0$, donc :

$$\underline{v}_i(x=0,t) + \underline{v}_r(x=0,t) = \underline{v}_t(x=0,t) \Rightarrow \underline{v}_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm}$$

La cloison vibre avec une amplitude $|X_m| \ll \lambda$ dans le cadre de l'approximation acoustique. Ainsi, du point de vue de l'onde, tout se passe comme si la paroi était quasiment immobile en $x = 0$.

Remarque : On raisonne de manière similaire pour justifier que l'on peut négliger l'épaisseur e de la cloison dans l'écriture de la CL sur les vitesses.

13. Théorème de la résultante cinétique à la paroi dans le référentiel du laboratoire galiléen (faire un schéma) :

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} = +(p_i(x=0,t) + p_r(x=0,t))S\vec{e}_x - p_t(x=0,t)S\vec{e}_x - K\vec{r}$$

soit en projetant sur \vec{e}_x et en passant en complexes :

$$-\omega^2 m X_m = (\underline{p}_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm})S - K X_m$$

Détermination de la fonction de transfert : On a déterminé les 2 CL en $x = 0$, mais il reste désormais à les reformuler pour qu'elles ne fassent intervenir que les surpressions associées aux OPPH. Pour la CL sur la vitesse, en utilisant la Q.11 :

$$\frac{1}{Z_a} (\underline{p}_{im} - \underline{p}_{rm}) = \frac{1}{Z_a} \underline{p}_{tm} \Rightarrow \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{im} - \underline{p}_{tm}$$

Pour la CL liée au PFD sur la cloison, il faut ré-exprimer X_m . D'après la continuité de la vitesse, la cloison vibre en bloc à la vitesse $\underline{v}_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm}$. Donc, en intégrant $X_m = \frac{\underline{v}_{tm}}{j\omega} = \frac{\underline{p}_{tm}}{j\omega Z_a}$. Ainsi, la CL devient finalement :

$$\frac{j\omega m \underline{p}_{tm}}{Z_a} = 2S(\underline{p}_{im} - \underline{p}_{tm}) - K \frac{\underline{p}_{tm}}{j\omega Z_a}$$

On en déduit tous calculs faits :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega m}{2SZ_a} \right) - \frac{K}{2SZ_a \omega}}$$

On identifie :

$$H_0 = 1 ; \frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{2SZ_a} ; Q\omega_0 = \frac{K}{2SZ_a} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} ; Q = \frac{\sqrt{mK}}{2SZ_a}$$

GRAPHE

La cloison joue le rôle de filtre passe-bande acoustique, permettant d'atténuer les ondes acoustiques basses et hautes fréquences.

Pour $\omega = \omega_0$, on a $p_{tm} = p_{im}$, soit en utilisant la CL sur la vitesse $p_{rm} = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie. Toute l'énergie incidente est alors transmise par la paroi (ce qui est absolument à éviter si on souhaite avoir une bonne isolation acoustique d'une pièce !).

14. On peut négliger l'élasticité de la cloison si $\frac{K}{2SZ_a\omega} \ll \frac{m\omega}{2SZ_a} \iff \omega > 10\omega_0$. On peut alors simplifier :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}}$$

c'est-à-dire la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1. La cloison coupe les ondes acoustiques hautes fréquences mais transmet les ondes basses fréquences (on entend les basses !).

En reprenant le raisonnement de la Q.7, on a pour des OPPH :

$$I_t = \frac{|p_{tm}|^2}{2Z_a}$$

On en déduit que le niveau d'intensité sonore s'écrit :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{|p_{tm}|^2}{2Z_a I_0} \right) = 20 \log(|\underline{H}|) + 10 \log \left(\frac{|p_{im}|^2}{2Z_a I_0} \right)$$

Pour obtenir une atténuation de 40 dB, il faut que $20 \log(|\underline{H}|) = -40 \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{100}$. En injectant l'expression simplifiée de \underline{H} , on en déduit enfin :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{Q\omega}{\omega_0} \right)^2} = 100 \Rightarrow \frac{Q\omega}{\omega_0} = \frac{\mu_c e \omega}{2Z_a} \simeq 100$$

Ainsi :

$$e = \frac{100Z_a}{\mu_c \pi f}$$

A.N. : $e = 45$ mm, ce qui est réalisable en pratique dans une habitation.

Ex. 3 Modes propres dans un instrument à vent


Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau d'axe (Ox) de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités (en $x = 0$) et ouvert à l'autre (en $x = \ell$).

Les pressions, température et masse volumique moyennes de l'air contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\mu_0 = 1,22$ kg.m⁻³. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$.

1. Montrer que les conditions aux limites imposent, d'un côté, un nœud de vitesse, et de l'autre, un nœud de surpression.
2. On cherche les modes propres. On pose pour cela l'onde de surpression sous la forme $P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t) \cos(kx + \psi)$.
 - (a) Rappeler la définition d'un mode propre et commenter le choix de la forme de la fonction d'onde de surpression. Quel est le lien entre ω et k ?
 - (b) Dédire de la fonction d'onde de surpression, la forme sous laquelle on recherche la fonction d'onde de vitesse. Commenter la structure des ondes de vitesse et de surpression, et en particulier les positions respectives des nœuds de surpressions et des ventres de vitesses.
 - (c) Déterminer numériquement les fréquences ν_0 et ν_1 du fondamental et du premier harmonique d'amplitude non nulle.
3. À la fréquence ν_1 , on a mesuré une amplitude maximale des elongations de l'air à $a_0 = 1$ mm. En déduire l'amplitude correspondante P_{10} pour la surpression et T_{10} pour la température.

Correction de l'exercice 3

1. On considère que la membrane fermée est en $x = 0$, alors que l'ouverture est en $x = \ell$.
 - Une membrane fermée fixe impose un noeud de vitesse, car le fluide ne peut pas pénétrer dans la membrane solide : $v_1(x = 0, t) = 0, \forall t$.
 - Concernant l'ouverture en $x = \ell$, la condition aux limites est un peu plus délicate à déterminer. Étant donné que l'onde acoustique se développe dans un tube, on peut supposer raisonnablement que cette onde est plane (une seule direction de propagation $\pm \vec{e}_x$). Donc, en $x = \ell$, la surpression est constante sur tout le plan d'onde que constitue l'ouverture du tuyau. Or, en $x = \ell$ et au bord du tuyau, cette surpression vaut forcément $P_1 = 0$, par continuité avec la pression atmosphérique extérieure. Donc, nécessairement, vu que l'onde dans le tuyau est plane : $P_1(x = \ell, t) = 0, \forall t$.
2. (a) Mode propre : onde plane stationnaire harmonique solution de l'équation de d'Alembert et respectant les CL. La forme proposée convient donc. D'après la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert : $k = \frac{\omega}{c}$.

- (b)  Pour faire le lien avec $v_1(x, t)$, on ne peut pas utiliser l'impédance acoustique car on n'a pas une onde plane **progressive** !
 À partir de la loi de la quantité de mouvement linéarisée, on en déduit le champ de vitesse correspondant :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} = +P_{10}k \cos(\omega t) \sin(kx + \psi) \iff v_1(x, t) = \frac{P_{10}}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \psi) + f(x) \quad (\text{Ex.1})$$

où l'on prend $f(x) = 0$ car une fonction de l'espace uniquement ne peut pas représenter une onde (qui est caractérisée par un couplage spatio-temporel).

Par conséquent, l'onde de vitesse est elle aussi plane stationnaire harmonique. Pour des positions x telles que $\cos(kx + \psi) = 0$, on a un noeud de surpression, mais aussi $\sin(kx + \psi) = \pm 1$ et donc un ventre de vitesse. Réciproquement, chaque noeud de vitesse correspond à un ventre de pression.

- (c) En utilisant les deux conditions aux limites, il vient :

$$v_1(x = 0, t) = 0 \forall t \implies \sin \psi = 0 \implies \psi = 0 \quad \text{ou} \quad \pi \quad \text{Choix : } \psi = 0 \quad (\text{Ex.2})$$

$$P_1(x = \ell, t) = 0 \forall t \implies \cos(k\ell + \psi) = 0 \implies \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad (\text{Ex.3})$$

soit avec $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, $\nu_n = \frac{c}{4\ell} + n\frac{c}{2\ell}$. On trouve numériquement : $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 340 \text{ m/s}$, puis $\nu_0 = 85 \text{ Hz}$ et $\nu_1 = 255 \text{ Hz} = 3\nu_0$. Dans un instrument à vent, seules les harmoniques impaires existent, contrairement aux instruments à cordes : c'est ce qui explique leur nette différence de timbre !

3. Comme $\frac{P_{10}}{\mu_0 c}$ est l'amplitude maximale de la vitesse, mais qu'elle vaut aussi $a_0\omega$ à partir de l'amplitude maximale de l'élongation, il vient

$$P_{10} = a_0\omega\mu_0 c = 2\pi\mu_0 c a_0\nu_1 = 670 \text{ Pa} \quad (\text{Ex.4})$$

Concernant la température, on a forcément besoin d'une loi thermodynamique. On utilise le fait que la transformation est adiabatique réversible pour un gaz parfait, soit en différenciant logarithmiquement une des lois de Laplace :

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste} \iff (1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dT}{T} = 0 \implies \frac{P_{10}}{P_0}(1-\gamma) + \gamma\frac{T_{10}}{T_0} = 0 \implies T_{10} = \frac{(\gamma-1)T_0 P_{10}}{\gamma P_0} = 0.55 \text{ K} \quad (\text{Ex.5})$$

On constate que la température évolue sensiblement peu lorsque l'instrument est sollicité (ce qui valide encore et toujours l'approximation harmonique : $T_{10} \ll T_0$).

Ex. 4 (Ecrit CCINP/E3A Modélisation PC 2024) Ondes acoustiques dans un tube souple

Un véhicule est détecté lors de son passage sur un tube en caoutchouc placé perpendiculairement à la chaussée (**figure 1**). Le tube est bouché à une extrémité et relié à un compteur à l'autre extrémité. Les roues du véhicule écrasent localement le tube. Il s'ensuit une variation de pression dans le tube qui se propage jusqu'aux extrémités. Le compteur associé transforme ce déplacement d'air en signal électrique.

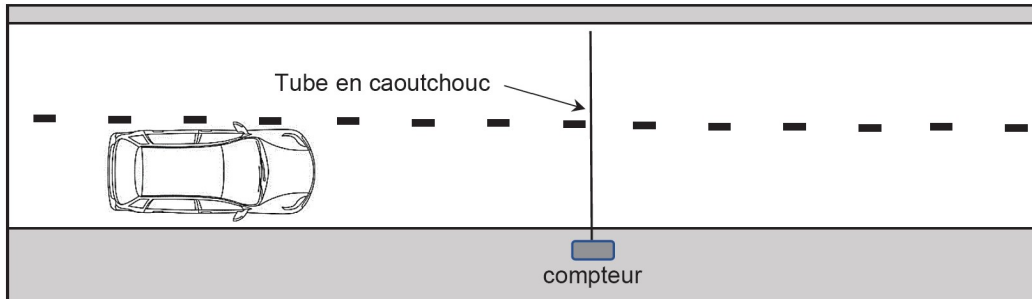


Figure 1 - Capteur pneumatique

On considère un tube en caoutchouc de section circulaire et d'axe Ox rempli d'air (**figure 2**). Au repos, l'air a une masse volumique μ_0 et une pression intérieure P_0 égale à la pression extérieure. À l'équilibre, on suppose que le champ des vitesses est nul et que la section du tube est uniforme et notée A_0 .

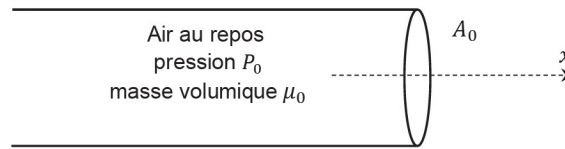


Figure 2 - Tube de section A_0 rempli d'air au repos

On s'intéresse à la propagation de perturbations de petites amplitudes suivant l'axe Ox , ce qui permet de se placer dans l'approximation acoustique. Les champs de vitesse, de pression et de masse volumique s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, t) &= v(x, t)\vec{u}_x \text{ où } \vec{u}_x \text{ est le vecteur unitaire selon la direction } Ox \\ P(x, t) &= P_0 + p_1(x, t) \text{ où } |p_1(x, t)| \ll P_0 \\ \mu(x, t) &= \mu_0 + \mu_1(x, t) \text{ où } |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0. \end{aligned}$$

$\vec{v}(x, t)$ est appelée la vitesse acoustique et $p_1(x, t)$ est la surpression par rapport à P_0 . On suppose que ces grandeurs sont uniformes sur une section du tube, les effets de la pesanteur étant négligés.

L'air est considéré comme un gaz parfait, on ne tient pas compte de la viscosité ni des échanges thermiques à l'intérieur du tube au sein de l'air. Les détentes et les compressions locales du fluide sont isentropiques.

Le coefficient de compressibilité isentropique, constant, s'écrit :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu(x, t)} \left(\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_s.$$

Le tube se déforme sous l'effet de l'augmentation de la pression interne. La section $A(x, t)$ du tube varie légèrement, devenant dépendante de l'abscisse x et du temps t .

On pose alors :

$$A(x, t) = A_0 + a_1(x, t) \text{ où } |a_1(x, t)| \ll A_0.$$

On peut alors décrire ce phénomène par un paramètre D , appelé distensibilité du tube qui s'exprime comme :

$$D = \frac{1}{A(x, t)} \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_s.$$

La distensibilité, supposée constante, caractérise l'aptitude du tube à se déformer au passage de l'onde de pression.

Équation de la conservation de la masse

On étudie comme système une tranche d'air d'épaisseur dx située entre les abscisses x et $x + dx$, sur un intervalle de temps entre t et $t + dt$.

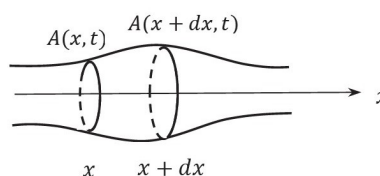


Figure 3 - Système étudié : tranche d'air d'épaisseur dx

Q1. Exprimer la masse $dm(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $A(x, t)$, $\mu(x, t)$ et de dx . De la même manière, exprimer $dm(t + dt)$ à l'instant $t + dt$.

Q2. Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans ce système pendant la durée dt en fonction de $\mu(x, t)$, $v(x, t)$, $A(x, t)$ et dt . De la même manière, exprimer la masse δm_s sortant de ce système pendant la même durée.

Q3. En réalisant un bilan de masse sur le système considéré, établir avec soin que l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu(x, t)A(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)A(x, t)v(x, t)] = 0.$$

Q4. En se limitant aux termes d'ordre 1, montrer que l'on obtient l'équation linéarisée suivante :

$$\mu_0 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Équation d'Euler

Q5. Rappeler l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits en tenant compte des hypothèses de l'étude. Préciser le nom des deux termes qui composent la dérivée particulaire.

Q6. Linéariser l'équation d'Euler afin d'établir une relation entre μ_0 , $v(x, t)$ et $p_1(x, t)$. La relation obtenue est notée (2).

Distensibilité du tube

Q7. En linéarisant l'expression de la distensibilité, montrer que a_1 est proportionnel à p_1 . La relation obtenue est notée (3).

Coefficient de compressibilité isentropique

Q8. Linéariser l'expression du coefficient de compressibilité isentropique et montrer que μ_1 est proportionnel à p_1 . La relation obtenue est notée (4).

Équation de propagation des ondes sonores dans le tube souple

Q9. À l'aide des relations (1), (3) et (4), démontrer la relation suivante :

$$(\chi_s + D) \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Q10. Montrer que la surpression $p_1(x, t)$ obéit à une équation d'onde de type d'Alembert avec une célérité c qui sera exprimée en fonction de χ_s , D et de μ_0 . Vérifier l'unité de c .

Q11. Calculer numériquement la valeur de c avec $D = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$, $\chi_s = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Correction de l'exercice 4

- 1) $dm(t) \cong \mu(x,t)A(x,t)dx$ et de même $dm(t+dt) \cong \mu(x,t+dt)A(x,t+dt)dx$ en supposant dx suffisamment petit pour négliger la variation de section.
- 2) $\delta m_e = (\iint_{A(x)} \mu v dS) dt = \mu(x,t)v(x,t)A(x,t)dt$ et de même $\delta m_s = \mu(x+dx,t)v(x+dx,t)A(x+dx,t)dt$
- 3) Bilan de masse pour la tranche dx entre t et $t+dt$: $dm(t+dt) - dm(t) = \delta m_e - \delta m_s$
 - $dm(t+dt) - dm(t) = [\mu(x,t+dt)A(x,t+dt) - \mu(x,t)A(x,t)]dx \approx \frac{\partial}{\partial t}(\mu(x,t)A(x,t))dtdx$ en faisant un développement limité du premier ordre en t de la fonction μA .
 - De même $\delta m_e - \delta m_s = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,t)A(x,t)v(x,t))dtdx$ en faisant un développement limité du premier ordre en x de la fonction $\mu v A$.

Alors en simplifiant $dtdx$: $\frac{\partial}{\partial t}(\mu(x,t)A(x,t)) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,t)A(x,t)v(x,t)) = 0$ (E)
- 4) Or $\mu(x,t)A(x,t) = (\mu_0 + \mu_1)(A_0 + a_1) \approx \mu_0 A_0$ (cte) + $\mu_1 A_0 + \mu_0 A_1$ en se limitant aux termes d'ordre 1.
Et $\mu(x,t)A(x,t)v(x,t) = (\mu_0 + \mu_1)(A_0 + a_1)v \approx \mu_0 A_0 v$ en se limitant aux termes d'ordre 1.
Alors (E) implique $\mu_0 \frac{\partial a_1}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ (1)

- 5) Équation d'Euler : $\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad} P$ en négligeant la viscosité et les effets de la pesanteur où $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ (dérivée particulaire) = $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (dérivée locale) + $\vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v})$ (dérivée convective)
- 6) En se limitant aux termes d'ordre 1 et projetée sur Ox : $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ (2)
- 7) $D = \frac{1}{A(x,t)} \frac{\partial A}{\partial P} \approx \frac{1}{A_0} \frac{\partial A}{\partial P}$ alors $a_1 \approx DA_0 p_1$ (3) en assimilant dérivée à un rapport de petites variations
- 8) De même $\chi_s = \frac{1}{\mu(x,t)} \frac{\partial \mu}{\partial P} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu}{\partial P}$ alors $\mu_1 \approx \chi_s \mu_0 p_1$ (4)
- 9) On remplace dans (1) $a_1 \approx DA_0 p_1$ et $\mu_1 \approx \chi_s \mu_0 p_1$ alors $\mu_0 DA_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \chi_s \mu_0 A_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$
d'où $(D + \chi_s) \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ (5)
- 10) Alors en dérivant (5) par rapport à t et en injectant (2) : $(D + \chi_s) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$, équation d'onde de type d'Alembert $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(D + \chi_s)}}$
Les unités de μ_0, D et χ_s étant $kgm^{-3}, Pa^{-1} \sim s^2 m kg^{-1}$ alors l'unité de c en ms^{-1} (caractéristique de la célérité).
- 11) AN : $c = 2,6 \cdot 10^2 ms^{-1}$

Ex. 5 (Ecrit CCINP/E3A Modélisation PC 2023) Etude numérique de l'indice de perte de transmission

Aide à la résolution de l'exercice en bas de page⁵

Une annexe rappelant l'utilisation de quelques fonctions Python est disponible en fin d'exercice. Nous allons utiliser les résultats d'essais réalisés dans le but de quantifier les performances acoustiques d'un matériau isolant. Ils consistent à enregistrer la réponse perçue par un récepteur suite à l'émission d'un son à fréquence variable par un émetteur placé de l'autre côté d'une plaque de ce matériau.

⁵ Dans la boucle for, la variable lu est une chaîne de caractères prenant successivement comme valeur chaque ligne de fichier. Exemple pour le 1er passage dans la boucle : lu='500\1.0\10.47\m'. Rappel : \t est la notation Python pour une tabulation et \n est celle pour un saut à la ligne.

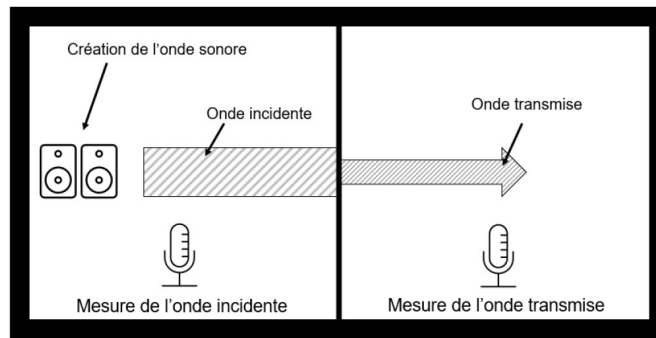


Figure 6 - Essais permettant de déterminer l'indice d'amortissement acoustique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Fichier = open("Resultats.txt", 'r')

[Instructions 1.1]
for lu in Fichier:
    ligne = lu.split("\t")
    [Instructions 1.2]
[Instructions 1.3]

[Instruction 2]

plt.plot([Instruction 3.1])
[Instruction 3.2]
[Instruction 3.3]
[Instruction 3.4]
[Instruction 3.5]
```

Algorithme 2 - Algorithme permettant d'extraire et de tracer les résultats expérimentaux

1. Le fichier résultat comprend trois colonnes précisant respectivement la fréquence du signal et les intensités perçues par l'émetteur et le récepteur. Compléter **Instructions 1.1**, **Instructions 1.2** et **Instructions 1.3** de l'algorithme 2 permettant d'extraire sous trois listes distinctes *frequence*, *Iemetteur* et *Irecepteur* les fréquences de prise d'échantillonnage et les intensités perçues par l'émetteur et le récepteur. Ces listes seront initialisées par les **Instructions 1.1** et converties en tableaux à l'aide des **Instructions 1.3**.

On appelle indice d'amortissement acoustique le réel, exprimé en dB, R_w défini par

$$R_w = 10 \log \left(\frac{I_{emetteur}}{I_{recepteur}} \right)$$

2. Compléter l'**Instruction 2** de l'algorithme 2 permettant de calculer $Gain_{dB}$, le gain en dB lié à l'amortissement acoustique de la plaque.
3. Compléter les **Instructions 3** de l'algorithme 2 afin d'obtenir les résultats de la figure 7 :
 - (a) L'**Instruction 3.1** définit les grandeurs à tracer ;
 - (b) L'**Instruction 3.2** permet d'afficher la légende ;
 - (c) L'**Instruction 3.3** génère le titre de l'axe des abscisses ;
 - (d) L'**Instruction 3.4** génère le titre de l'axe des ordonnées ;
 - (e) L'**Instruction 3.5** nomme le graphique.

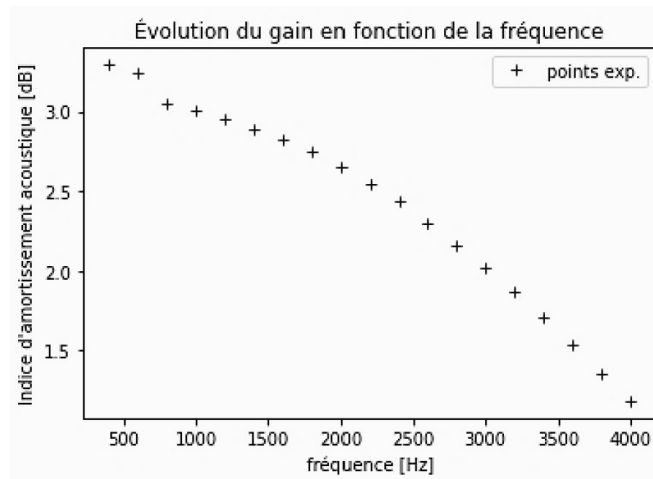


Figure 7 - Résultats expérimentaux

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- `np.array(liste)` :

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

| Commande | Résultat |
|----------------------------------|------------------------|
| <code>np.array([4, 3, 5])</code> | <code>[4, 3, 5]</code> |

- `chaine.split(motif)` :

- o description : divise une chaîne de caractères en une liste ordonnée de sous-chaînes, place ces sous-chaînes dans un tableau et retourne le tableau. La division est effectuée en recherchant un motif
- o argument d'entrée : motif
- o argument de sortie : un tableau

| Commande | Résultat |
|--|---------------------------------|
| <code>A = 'azert yuiop'</code> <code>A.split('')</code> | <code>['azert', 'yuiop']</code> |

II. - Bibliothèque MATPLOTLIB.PYPLOTT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import matplotlib.pyplot as plt`.

- o description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y . Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché
- o argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

| Description | Ligne continue | Ligne traitillée | Marqueur rond | Marqueur plus |
|-------------|----------------|------------------|---------------|---------------|
| Symbole S | - | -- | o | + |

Valeurs possibles pour C (couleur) :

| Description | bleu | rouge | vert | noir |
|-------------|------|-------|------|------|
| Symbole C | b | r | g | k |

- o argument de sortie : un graphique

```
x= np.linspace(3,25,5)
y=sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```

Correction de l'exercice 5

1. . [Instructions 1.1] :

```
1 frequence=[]
2 Iemetteur=[]
3 Irecepteur=[]
```

En s'aidant de l'annexe, la variable *ligne* est une liste de 3 chaînes de caractères contenant les valeurs de la fréquence, de l'intensité émise et de l'intensité reçue. Donc : [Instructions 1.2] :

```
1 frequence.append(float(ligne[0]))
2 Iemetteur.append(float(ligne[1]))
3 Irecepteur.append(float(ligne[2]))
```

. [Instructions 1.3] :

```
1 frequence=np.array(frequence)
2 Iemetteur=np.array(Iemetteur)
3 Irecepteur=np.array(Irecepteur)
```

2. On peut directement faire des calculs avec des tableaux numpy. Donc, on écrit simplement : [Instruction 2] :

```
1 GaindB=10*np.log(Iemetteur/Irecepteur)
```

3. Oui, l'annexe du sujet originel ne rappelait pas comment afficher une légende...

(a) . [Instruction 3.1] :

```
1 frequence,GaindB, '+'
```

(b) . [Instruction 3.2] :

```
1 plt.legend('points exp.')
```

(c) . [Instruction 3.3] :

```
1 plt.xlabel('frequence [Hz]')
```

(d) . [Instruction 3.4] :

```
1 plt.ylabel('indice d\'amortissement acoustique [dB]')
```

(e) . [Instruction 3.5] :

```
1 plt.title('Evolution du gain en fonction de la frequence')
```

Remarque : Le graphe sera affiché même si l'instruction `plt.show()` n'est pas présente dans le code.