T5

Thermodynamique

Rayonnement thermique

Sommaire

I Modèle du corps noir **2**
- I.1 Comment modéliser macroscopiquement l'interaction lumière/matière ? 2
- I.2 Propriétés du rayonnement électromagnétique émis 3
- I.3 Critique du modèle du corps noir : l'albédo 5

II Température moyenne au niveau du sol terrestre **6**
- II.1 Cas 1 : en l'absence d'atmosphère 6
- II.2 Cas 2 : avec présence de l'atmosphère - modèle à une couche 6

Exercices **8**

Questions de cours

- Modèle du corps noir : présentation, exemples, description qualitative des caractéristiques du rayonnement émis et limites.
- Effet de serre : présentation qualitative, puis étude quantitative dans le cadre d'un modèle à une couche de l'atmosphère.

.

★ *Prise de notes :* Nous avons déjà vu au chapitre T4 qu'il existe trois modes de transferts thermiques entre deux systèmes : la diffusion (ou conduction) thermique, la convection et le rayonnement thermique. La diffusion se caractérise, du point de vue microscopique, par un transfert d'énergie de proche en proche, du fait de l'agitation thermique des particules. La convection consiste en un mouvement du fluide support, emportant avec lui les particules agitées thermiquement. Le rayonnement thermique est lui, complètement différent : il y a un échange d'énergie entre le corps chaud et le rayonnement électromagnétique (ondes EM), et c'est le rayonnement EM qui transporte l'énergie jusqu'à un second corps qu'il va chauffer en ré-échangeant de l'énergie avec lui.
L'exemple phare à avoir en tête : Soleil -> EM -> Terre. (Et d'ailleurs, quasi toute l'énergie sur Terre provient du Soleil (végétaux, énergie thermique...)) Dans ce chapitre, on va donc trouver la puissance émise par le Soleil (pourquoi le Soleil brille-t-il ?), et déterminer la T à la surface de la Terre.

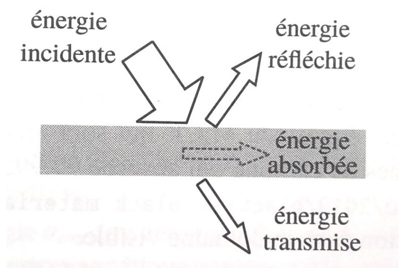
Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Décrire le modèle du corps noir en distinguant rayonnement électromagnétique incident et rayonnement électromagnétique émis. Critiquer le modèle.
2. Déterminer la température à la surface de la Terre.

I Modèle du corps noir

I.1 Comment modéliser macroscopiquement l'interaction lumière/matière ?

Lorsqu'un système matériel reçoit un rayonnement électromagnétique incident, on distingue trois phénomènes :



Une partie de l'énergie incidente est réfléchie, une partie est absorbée et une autre est transmise. La somme des énergies réfléchie, absorbée et transmise est égale à l'énergie incidente.

Afin de caractériser les interactions entre le rayonnement électromagnétique et le système matériel, on réalise souvent un modèle idéalisé : le modèle du corps noir.

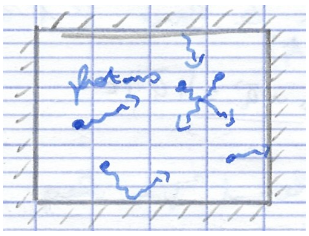
Modèle du corps noir

Un corps noir à la température T est un système matériel thermostaté (température T uniforme et stationnaire) en équilibre thermodynamique avec le rayonnement électromagnétique.

Propriété : Cet équilibre thermodynamique n'étant possible que s'il y a échange d'énergie entre le champ électromagnétique et la matière, le corps noir doit donc absorber toutes les longueurs d'onde du rayonnement électromagnétique incident.

Comment réaliser un corps noir en pratique ?

★



Cavité fermée et thermostatée. Des OEM s'établissent alors spontanément dans la cavité. L'intérêt de réaliser une cavité est d'empêcher le rayonnement EM de sortir et donc de maintenir un équilibre thermo (si du rayonnement sort, il y a une perte d'énergie : hors équilibre thermo). Pour détecter le rayonnement EM, on réalise une petite ouverture dans la cavité.

Quelle est la couleur d'un corps noir ? :D

★ ⚠ Certes, le corps noir absorbe intégralement le rayonnement électromagnétique incident, mais du fait de l'équilibre thermodynamique de la matière, toute l'énergie absorbée par la matière doit être ré-émise par la matière : le corps noir ré-émet aussi un rayonnement électromagnétique.

- Cas d'une cavité fermée (corps noir idéal) : aucun rayonnement ne sort de la cavité : elle paraît noire.
- Autres cas : La couleur d'un corps noir est la couleur du rayonnement électromagnétique émis, qui peut être dans l'IR (aspect noir) ou dans le visible (aspect coloré ou blanc).

Exemples de systèmes modélisés couramment par des corps noirs :

★ *Prise de notes :* Quelles sources lumineuses connaissez-vous ? (Soleil, lampe à incandescence classique, lampe à incandescence à halogène, tube néon, tube fluorescent, LED) Pourquoi ces sources lumineuses brillent-elles ? Dans le cas du Soleil et des lampes à incandescences : elles brillent car elles sont chaudes ! **Un corps chaud émet un rayonnement EM continu.**

I.2 Propriétés du rayonnement électromagnétique émis

Le rayonnement électromagnétique émis par le corps noir possède, comme tout champ électromagnétique, une densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\|\vec{E}\right\|^2 + \frac{\left\|\vec{B}\right\|^2}{2\mu_0}$$

Du fait de l'équilibre thermodynamique, la densité volumique d'énergie du rayonnement émis par le corps noir ne peut que dépendre de la température T du corps.

<u>Définition</u> : Densité spectrale d'énergie volumique
On définit la densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique $u_\lambda(\lambda,T)$, appelée aussi plus simplement *densité spectrale d'énergie électromagnétique*, par le rapport entre la densité volumique d'énergie électromagnétique $\mathrm{d}u_{em}$ comprise dans l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda; \lambda+\mathrm{d}\lambda]$ et ce $\mathrm{d}\lambda$:

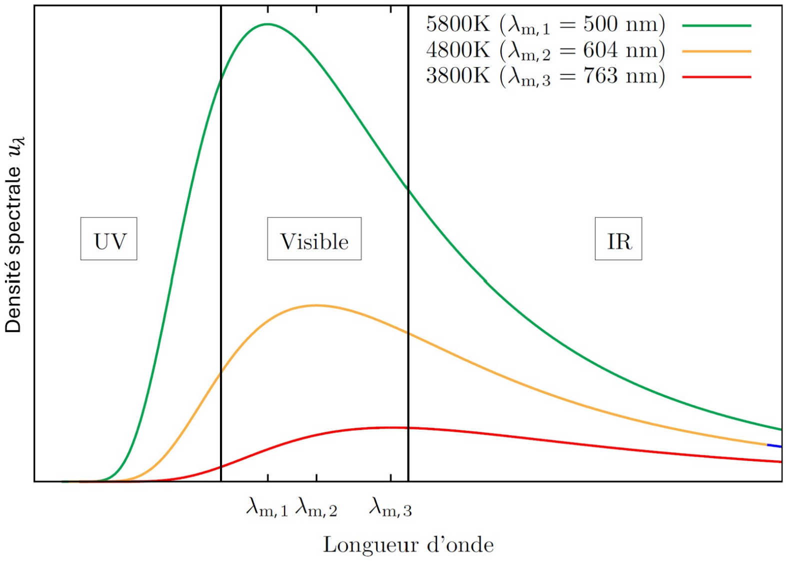
$$u_\lambda(\lambda,T) = \frac{\mathrm{d}u_{em}}{\mathrm{d}\lambda}$$

Ainsi, on calcule la densité volumique d'énergie électromagnétique totale en intégrant cette densité spectrale :

$$u_{em}(T) = \int_0^{+\infty} u_\lambda(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda$$

Sur la base de résultats expérimentaux antérieurs, Max Planck a alors établi théoriquement la loi d'émission du corps noir, appelée loi de Planck (1900) (pas à connaitre) :

$$u_\lambda(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$



Commentaires (à savoir) :

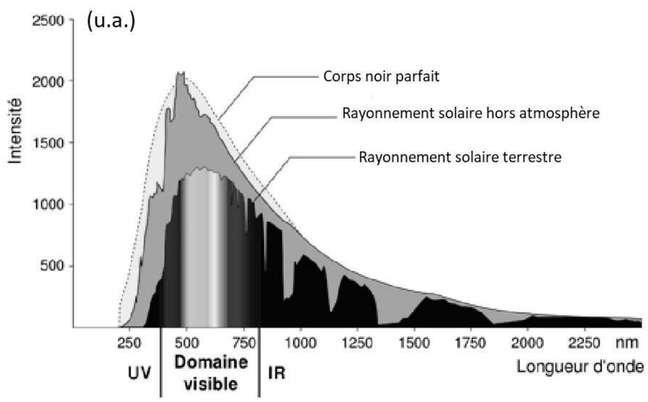
★
- Un corps noir émet un spectre continu, et non un spectre de raies.
- Plus un corps noir est chaud, plus la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission diminue (une étoile émettant dans le bleu a une température de surface plus élevée qu'une étoile brillant dans le rouge). Ceci est caractérisé par la loi de Wien.
- Plus un corps noir est chaud, plus la densité volumique totale d'énergie électromagnétique augmente. Ceci est caractérise par la loi de Stefan.

Loi de Wien (1893) :

La longueur d'onde λ_m du maximum d'émission du corps noir est donnée par la loi de Wien (pas à connaître) :

$$\lambda_m T = 2.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$$

Exercice : On donne ci-dessous le spectre mesuré au sommet de l'atmosphère terrestre et au niveau du sol. Estimer la température de surface du Soleil.



★ $\lambda_m = 500\,\mathrm{nm}$. D'après la loi de Wien : $T = \dfrac{2.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{\lambda_m} = 5.8 \times 10^3\,\mathrm{K}$

Exercice : Déterminer la longueur d'onde du maximum d'émission du sol terrestre.

★ Température moyenne du sol sur Terre : $T = 15\,°\mathrm{C} = 288\,\mathrm{K}$. D'après la loi de Wien : $\lambda_m = 10\,\mu\mathrm{m}$, c'est-à-dire une émission dans l'IR lointain.

<u>Loi de Stefan</u> (1879) :

La puissance électromagnétique moyenne émise par un corps noir de surface extérieure S est donnée par la loi de Stefan, aussi appelée loi de Stefan-Boltzmann (pas à connaître) :

$$P_{em} = \Phi = \sigma T^4 S$$

avec $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ la constante de Stefan.

Appliquons la loi de Stefan à la puissance émise par le Soleil, de température T_S : $\Phi_{\text{émise Soleil}} = \sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2$ avec le rayon du Soleil $R_S = 7.0 \times 10^8\,\mathrm{m}$.
Schéma Soleil, Terre, d_{T-S}, R_S et R_T.
(La Terre ne reçoit pas toute cette puissance, car) celle-ci se répartit sur une sphère de surface $4\pi d_{T-S}^2$ avec $d_{T-S} = 1\,\mathrm{u\,a} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$. Donc, la puissance surfacique au niveau de l'orbite de la Terre est $\varphi_{\text{orbite Terre}} = \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle = \dfrac{\Phi_S}{4\pi d_{T-S}^2} = \dfrac{\sigma T_S^4 R_S^2}{d_{T-S}^2}$.
Or, $R_T = 6400\,\mathrm{km} \ll d_{T-S}$. Donc, on peut considérer que les rayons lumineux arrivent parallèles entre eux sur toute la surface de la Terre. Donc, la puissance reçue par la Terre de la part du Soleil est :

★

$$\Phi_S = \varphi \times \pi R_T^2 = \frac{\sigma T_S^4 R_S^2 \pi R_T^2}{d_{T-S}^2}$$

On s'intéresse plus couramment au flux surfacique moyen reçu sur toute la surface de la Terre de la part du Soleil :

$$\varphi_S = \frac{\Phi_S}{4\pi R_T^2} = \frac{\sigma T_S^4 R_S^2}{4 d_{T-S}^2} = 3.5 \times 10^2\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

I.3 Critique du modèle du corps noir : l'albédo

Prenons un exemple courant où on compare la température de deux sols différents : l'un en béton et l'autre végétalisé. Si l'on modélise ces deux systèmes comme deux corps noirs, comme ils reçoivent le même rayonnement électromagnétique provenant du Soleil, ils auraient la même température de surface. Cela n'est pas le cas : les systèmes réels diffèrent du corps noir car ils n'absorbent pas intégralement le rayonnement incident et en réfléchissent une partie.

Pour prendre en compte simplement le fait que l'énergie incidente réfléchie n'est pas nulle pour un système réel, on introduit l'albédo.

Albédo

La fraction du rayonnement électromagnétique incident qui est réfléchie par un système réel est appelée albédo et est notée A. On parle alors de modèle du corps "gris".

★ Donc, sans unité et $0 \leqslant A \leqslant 1$.

Exemple : Pour le système {Terre + atmosphère}, l'albédo $A = 0.31$. (On ne le prend en compte que pour le rayonnement électromagnétique émis dans le visible de la part du Soleil.)

★ Donc, le flux surfacique moyen reçu au sol de la part du Soleil est : $(1-A)\varphi_S$.

II Température moyenne au niveau du sol terrestre

II.1 Cas 1 : en l'absence d'atmosphère

On étudie le sol terrestre, à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire que sa température T_T est stationnaire et uniforme.

En réalisant un bilan d'énergie à un volume $\mathrm{d}\tau$ du sol terrestre, entre t et $t+\mathrm{d}t$, en régime stationnaire :

$$\mathrm{d}^2U = 0 = \delta^2 Q = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \Rightarrow \sum \Phi_{\text{entrant}}\mathrm{d}t = \sum \Phi_{\text{sortant}}\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{\sum \Phi_{\text{entrant}} = \sum \Phi_{\text{sortant}}}$$

★ On ne considère ici qu'un transfert thermique par rayonnement (faire un schéma avec les flux surfaciques) :

$$\Phi_{\text{entrant}} = (1-A)\varphi_S \mathrm{d}S = \Phi_{\text{sortant}} = \varphi_T \mathrm{d}S \iff (1-A)\varphi_S = \varphi_T$$

(Le redire avec des mots, et montrer que c'est intuitif ! Ils peuvent désormais se contenter d'un schéma et donner la dernière relation.) On raisonnera désormais directement avec les flux surfaciques sur un schéma.

En utilisant la loi de Stefan, on en déduit que :

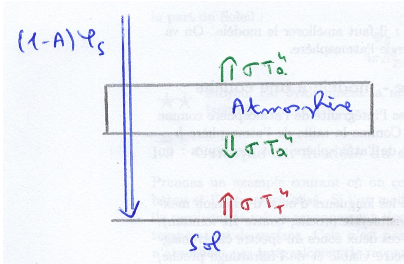
★ $$(1-A)\varphi_S = \sigma T_T^4 \iff T_T = \left(\frac{(1-A)\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4} = 255\,\mathrm{K} = -18\,^\circ\mathrm{C}$$

Cette température est incohérente avec la réalité : il faut améliorer le modèle. On va prendre en compte l'effet de serre lié à la présence de l'atmosphère.

II.2 Cas 2 : avec présence de l'atmosphère - modèle à une couche

On se place à nouveau en régime stationnaire. On modélise l'intégralité de l'atmosphère comme une couche de température uniforme et stationnaire T_a. Comme la taille de l'atmosphère $h \sim 50\,\mathrm{km} \ll R_T$, on considère que les surfaces de la Terre et de l'atmosphère sont identiques : on raisonne alors directement en flux surfaciques.

Cependant, d'après la loi de Wien, nous avons montré que les longueurs d'onde d'émission maximale du Soleil et du sol terrestre sont très différentes (visible/IR proche, contre IR lointain). L'atmosphère ne se comporte pas de la même manière sur ces deux zones du spectre électromagnétique : elle laisse quasiment passer l'intégralité du spectre visible et de l'infrarouge proche, alors qu'elle absorbe fortement les infrarouges lointains.



★

Qualitativement, le sol terrestre reçoit désormais un flux surfacique plus élevé, du fait du rayonnement vers le bas de l'atmosphère. Pour être en équilibre thermique, le sol doit donc émettre un flux surfacique plus grand, ce qui, d'après la loi de Stefan, entraine une augmentation de température du sol par rapport au cas sans atmosphère. C'est l'effet de serre.

Quantitativement, on réalise deux bilans :

- Pour le sol : $(1-A)\varphi_S + \sigma T_a^4 = \sigma T_T^4$
- Pour {sol + atmosphère} : $(1-A)\varphi_S = \sigma T_a^4$

La résolution donne :

$$T_a = \left(\frac{(1-A)\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4} = 255\,\mathrm{K} = -18\,^\circ\mathrm{C}$$
$$T_T = \left(\frac{(1-A)\varphi_S}{\sigma} + T_a^4\right)^{1/4} = 304\,\mathrm{K} = 30\,^\circ\mathrm{C}$$

La température du sol terrestre est plus proche de la température moyenne réelle qu'avec le modèle précédent, mais elle est désormais trop élevée dans ce modèle.

On peut proposer quelques pistes d'amélioration :

- Prendre en compte l'absorption de l'atmosphère pour le rayonnement visible.
- Prendre en compte une absorption seulement partielle de l'atmosphère pour le rayonnement infrarouge.
- Effectuer un modèle à deux couches de températures T_1 et T_2 pour l'atmosphère.
- Différencier l'effet de l'atmosphère pour les différentes zones du spectre électromagnétique émis par la Terre : chaque gaz à effet de serre absorbe dans une zone différente du spectre électromagnétique, et certaines longueurs d'onde du spectre ne sont quasiment pas absorbées.
- Ne pas considérer que le sol terrestre est à l'équilibre thermodynamique : une partie de la puissance absorbée sert pour l'évaporation des océans.

Exercices

Ex. 1 (*Écrit Centrale PC 2024*) Température à la surface de la planète Mars

L'objectif de cette partie du sujet est de s'intéresser aux transformations à appliquer à l'atmosphère martienne pour permettre l'habitabilité de la planète.

Données :

- Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil $r_m = 2.28 \times 10^8$ km
- Rayon moyen de la planète Mars $R_m = 3.39 \times 10^3$ km
- Température à la surface de Mars $T_0 = 210$ K
- Rayon moyen du Soleil $R_s = 6.96 \times 10^5$ km
- Température de surface du Soleil $T_s = 5778$ K

Terraformer, c'est aussi changer la température sur la planète à coloniser. Avec une température moyenne de 210 K, l'eau liquide n'est quasiment pas présente à la surface de la planète Mars. On va étudier dans quelle mesure l'atmosphère peut permettre, par effet de serre, une augmentation de la température.

On rappelle la loi de Stefan-Boltzmann qui donne la puissance émise par unité de surface d'un corps noir à la température T : $p_\mathrm{e} = \sigma \mathrm{T}^4$ où $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}.

De même, on rappelle la loi du déplacement de Wien qui permet de prédire la longueur d'onde pour laquelle la densité spectrale de puissance du rayonnement thermique émis par ce corps est maximale : $\lambda = \frac{\beta}{T}$, avec $\beta = 2{,}90 \times 10^{-3}$ m·K. Dans la suite, on pourra considérer que ce rayonnement est monochromatique.

Les puissances surfaciques sont indiquées par des p minuscules, les puissances totales, par des $\mathcal{P}$ majuscules caligraphiés. On repère par un premier indice, s ou m, les grandeurs relatives respectivement au Soleil ou à la planète Mars ; un second indice, i, e ou a, indique respectivement si la puissance est incidente, émise ou absorbée.

II.A.1) Détermination de la température d'équilibre en l'absence d'atmosphère

En l'absence d'atmosphère, la principale source d'énergie permettant au sol martien d'atteindre sa température d'équilibre, notée T_m, est le rayonnement solaire. On suppose que T_m est uniforme en tout point de la surface de Mars.

Dans ce modèle, on considère que le sol de Mars n'absorbe pas la totalité de la puissance du rayonnement solaire incident, notée $\mathcal{P}_{m,\mathrm{i}}$. Il en réfléchit une partie, notée $\mathcal{P}_{m,\mathrm{r}}$, selon la loi $\mathcal{P}_{m,\mathrm{r}} = \alpha \mathcal{P}_{m,\mathrm{i}}$ où la constante α, appelée albédo de Bond de la surface de Mars, vaut 0,25.

Q 23. Exprimer la puissance totale émise par la surface du Soleil, notée $\mathcal{P}_{s,\mathrm{e}}$.

Q 24. Exprimer la puissance moyenne surfacique reçue $p_{m,\mathrm{i}}$, au niveau de l'orbite de Mars.

Q 25. Exprimer la puissance totale absorbée par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,\mathrm{a}}$.

Q 26. Exprimer la puissance émise par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,\mathrm{e}}$.

Q 27. Justifier que la puissance absorbée doit être égale à la puissance émise, puis en déduire l'expression et la valeur de la température d'équilibre T_m pour la surface de Mars en l'absence d'atmosphère. Commenter.

II.A.2) Utilisation du modèle de l'effet de serre

On considère que le sol martien absorbe toujours une fraction du rayonnement solaire incident selon la loi indiquée dans la sous-partie précédente. Par contre, on admet qu'il absorbe totalement le rayonnement atmosphérique. On note T'_m, la nouvelle température d'équilibre de la surface du sol martien, supposée uniforme.

Quant à l'atmosphère, elle peut être modélisée par une fine couche de gaz (épaisseur $e \ll R_m$) totalement transparente aux rayonnements électromagnétiques, sauf aux infrarouges pour lesquels elle absorbe une fraction ε des rayonnements. On suppose que l'atmosphère, homogène, possède une température uniforme notée T_a.

On néglige tout phénomène de réflexion du rayonnement par l'atmosphère.

Q 28. Indiquer à quel domaine du rayonnement électromagnétique correspond le rayonnement émis par le Soleil. Préciser également à quel domaine du rayonnement électromagnétique doit correspondre le rayonnement émis par le sol martien.

Q 29. En respectant les conventions de notations adoptées, réaliser un schéma faisant apparaître les puissances surfaciques incidentes, absorbées et émises par la surface du sol martien et par son atmosphère.

Q 30. À partir de deux bilans de puissances, déterminer la température d'équilibre du sol martien, T'_m, en présence d'une atmosphère en fonction de $\mathcal{P}_{s,e}$, α, ε et r_m, puis en fonction uniquement de T_m et ε.

Q 31. Calculer la valeur du coefficient d'absorption ε qu'il faudrait pour obtenir une température moyenne au sol de 298 K sur Mars. Commenter le résultat.

Q 32. Déterminer la température d'équilibre du sol martien maximale envisageable en supposant que l'on soit capable d'optimiser les coefficients α et ε. Conclure.

Correction de l'exercice 1

Corrigé rédigé par Mickaël Loire et Marc Legendre (UPS Physique).

Q23 On applique la loi de Stefan-Boltzmann au Soleil pour trouver

$$\boxed{\mathcal{P}_{s,e} = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4}$$

Q24 Par conservation de l'énergie, cette puissance se retrouve sur une sphère de rayon r_m. On en déduit que la puissance surfacique au niveau de Mars est

$$\boxed{p_{m,i} = \frac{\mathcal{P}_{s,e}}{4\pi r_m^2} = \sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2}}$$

Q25 La puissance absorbée est la puissance incidente moins la puissance réfléchie :

$$\mathcal{P}_{m,a} = (1-\alpha)\mathcal{P}_{m,i}$$

Comme $\mathcal{P}_{m,i} = p_{m,i}\pi R_m^2$ (surface apparente de Mars), il vient

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,a} = (1-\alpha)\sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2}\pi R_m^2}$$

Q26 On applique la loi de Stefan-Boltzmann à Mars et on a

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,e} = 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4}$$

Q27 A l'équilibre radiatif de {Mars}, la puissance absorbée est égale à la puissance émise : $\mathcal{P}_{m,a} = \mathcal{P}_{m,e}$. On obtient alors, avec les expressions précédentes :

$$\boxed{T_m = T_s\left(\frac{(1-\alpha)R_s^2}{4r_m^2}\right)^{1/4} = 210K}$$

On trouve une valeur très proche de celle donnée dans l'énoncé.

Q28 On applique la loi de Wien au Soleil :

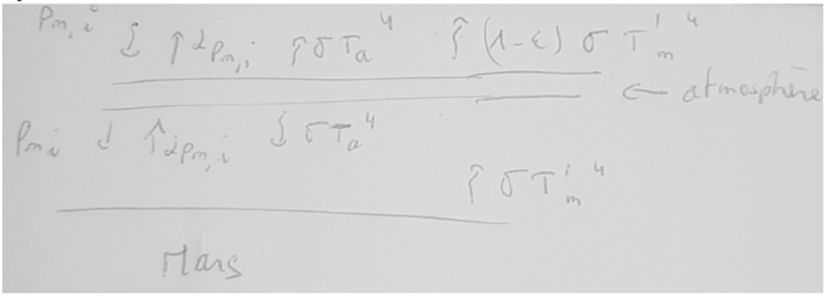
$$\boxed{\lambda_s = \frac{\beta}{T_s} = 502nm}$$

Cela correspond à un rayonnement visible jaune/vert.
On applique la loi de Wien à Mars :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{\beta}{T_m} = 13,8\mu m}$$

Cela correspond à un rayonnement infrarouge.

Q29



Q30 On applique la condition d'équilibre radiatif à {Mars}

$$(1-\alpha)p_{m,i}\pi R_m^2 = 4\pi R_m^2\sigma(T'^4_m - T_a^4)$$

On applique la condition d'équilibre radiatif à {atmosphère} :

$$2\sigma T_a^4 + (1-\epsilon)\sigma T'^4_m = \sigma T'^4_m$$

On a alors $\sigma T_a^4 = \frac{\epsilon}{2}\sigma T'^4_m$. On injecte dans la relation précédente avec $p_{m,i} = \frac{\mathcal{P}_{s,e}}{4\pi r_m^2}$ et il vient :

$$(1-\alpha)\mathcal{P}_{s,e}\frac{1}{4r_m^2} = 4\pi\sigma T'^4_m(1-\frac{\epsilon}{2})$$

$$\boxed{T'_m = \left(\frac{\mathcal{P}_{s,e}(1-\alpha)}{\sigma 8\pi r_m^2(2-\epsilon)}\right)^{1/4} = \frac{T_m}{(1-\epsilon/2)^{1/4}}}$$

Q31 On a alors

$$\boxed{\epsilon = 2\left(1-\left(\frac{T_m}{T'_m}\right)^4\right) = 1,5}$$

Or $\epsilon \in [0;1]$ donc il est impossible d'atteindre 298 K en jouant seulement sur la composition de l'atmosphère.

Q32 Il faut prendre $\alpha = 0$ et $\epsilon = 1$. On trouve alors

$$\boxed{T'_m = T_s\left(\frac{R_s^2}{2r_m^2}\right)^{1/4} = 274K}$$

Même dans ces conditions, il ferait trop froid (mais on s'approche des conditions idéales pour une vie humaine).

Ex. 2 (*Ecrit Mines-Ponts MPI 2023*) Refroidissement de la Lune après sa formation

La théorie de l'impact propose qu'une petite planète ait percuté la Terre, provoquant le mélange des deux astres et l'expulsion de débris qui se sont regroupés pour former la Lune. Cette théorie est celle qui fait actuellement consensus dans la communauté scientifique. On s'intéresse dans cet exercice au refroidissement de la Lune après sa formation.

On note :

- T_s et T_ℓ les températures moyennes à la surface du Soleil et de la Lune ;
- R_s et R_ℓ les rayons du Soleil et de la Lune ;
- $D_{s-\ell}$ la distance entre le Soleil et la Lune ;
- $\mathcal{A}$ l'albédo de la Lune, c'est-à-dire la fraction de l'énergie solaire reçue qui est réfléchie par la Lune.

1. En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, fournie en fin de sujet, déterminer l'expression de la puissance solaire absorbée par la Lune. En l'assimilant à un corps noir, déterminer ensuite l'expression de la puissance perdue par la Lune par rayonnement. Déterminer enfin l'expression de la puissance algébrique totale perdue par la Lune du fait de tous les échanges thermiques par rayonnement.

L'application numérique de cette grandeur donne une puissance de l'ordre de 10^{15} W.

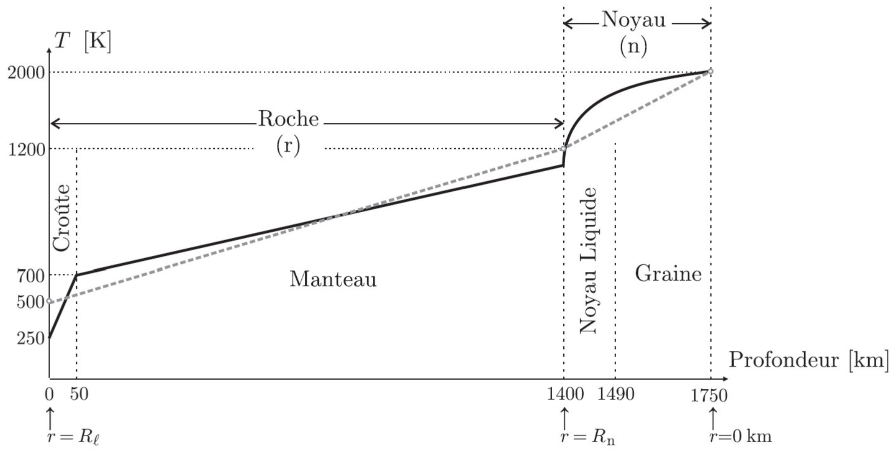


FIGURE 4 – Estimation de la température interne de la Lune en trait noir plein. Modèle simplifié (affine par morceau) en trait gris pointillé.

On se place en coordonnées sphériques de centre le centre de la Lune. On adopte un modèle simplifié dans lequel :

- la Lune n'est constituée que de deux couches : une couche rocheuse jusqu'à 1400 km de profondeur et un noyau de fer au centre ;
- la température de chacune des deux couches est modélisable par une fonction affine de la coordonnée radiale r : $T_n(r) = a_n - b_n r$ pour le noyau (n) et $T_r = a_r - b_r r$ pour la roche (r). Ce modèle simplifié est représenté en trait gris pointillé sur la figure 4 qui donne la température à l'intérieur de la Lune après l'impact ;
- les capacités thermiques volumiques du noyau et de la roche peuvent être considérées comme constantes en les prenant égales à leur moyenne sur le volume de la couche correspondante.

2. Déterminer les valeurs numériques des constantes a_n, b_n, a_r et b_r.
3. En utilisant la modélisation affine de la température, déterminer l'expression de l'énergie interne de la Lune en fonction notamment des capacités thermiques volumiques de la roche et du noyau ainsi que des rayons R_n du noyau et R_ℓ de la Lune.
   L'application numérique de cette grandeur donne 4.1×10^{28} J.
4. Déterminer l'expression de l'énergie interne de la Lune lorsqu'elle sera totalement refroidie et thermalisée à la température $T_f = 250\,\text{K}$.
   L'application numérique de cette grandeur donne 1.4×10^{28} J.
5. Donner une estimation du temps nécessaire pour que la Lune soit uniformément refroidie dans ce modèle. Commenter le résultat obtenu.

Question supplémentaire (issue du sujet originel)

6. On considère que les transferts thermiques ont lieu par conduction à l'intérieur de la roche. La conductivité thermique de la roche est notée λ_r. Ecrire l'équation traduisant la conservation du flux thermique à l'interface $r = R_\ell$.

Formulaire : La puissance surfacique $\mathcal{P}$ rayonnée par un corps noir dont la surface est à la température T est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann. Elle s'exprime sous la forme $\mathcal{P} = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Correction de l'exercice 2

Remarque : Quelques odg de cosmologie avant de démarrer :

- Big Bang : il y a 14 milliards d'années
- Formation du système solaire et de la Lune : il y a 4,5 milliards d'années

1. On assimile le Soleil à un corps noir. Donc, la puissance P émise par le Soleil est, d'après la loi de Stefan-Boltzmann : $P_S = \sigma T_s^4 4\pi R_s^2$. On en déduit que la puissance surfacique solaire reçue au niveau de l'orbite de la Lune est : $\mathcal{P}_\ell = \dfrac{P_S}{4\pi D_{s-\ell}^2} = \sigma T_s^4 \dfrac{R_s^2}{D_{s-\ell}^2}$. La Lune présente une surface approximativement droite de πR_ℓ^2 face au rayonnement solaire. La Lune reçoit donc une puissance solaire $P_\ell = \mathcal{P}_\ell \pi R_\ell^2 = \sigma T_s^4 \dfrac{\pi R_s^2 R_\ell^2}{D_{s-\ell}^2}$. Enfin, du fait

de l'albédo, la puissance solaire absorbée par la Lune est :

$$P_{abs} = (1 - \mathcal{A})\sigma T_s^4 \frac{\pi R_s^2 R_\ell^2}{D_{s-\ell}^2}$$

En assimilant la Lune à un corps noir, elle rayonne, d'après la loi de Stefan-Boltzmann, une puissance $P_{ray} = \sigma T_\ell^4 4\pi R_\ell^2$.
Ainsi, la puissance algébrique totale perdue par la Lune du fait des transferts thermiques par rayonnement est :

$$P_{tot} = P_{ray} - P_{abs} = \sigma\pi R_\ell^2 \left(4T_\ell^4 - (1-\mathcal{A})\frac{T_s^4 R_s^2}{D_{s-\ell}^2}\right)$$

2. On détermine graphiquement :

$$a_n = 2.0 \times 10^3\,\mathrm{K}\ ;\ b_n = 2.3\,\mathrm{K\,km^{-1}}\ ;\ a_r = 1.4 \times 10^3\,\mathrm{K}\ ;\ b_r = 0.50\,\mathrm{K\,km^{-1}}$$

3. L'énergie interne peut se calculer en intégrant l'énergie interne volumique sur tout le système :

$$U_i = \iiint_{(V)} u_{vol}(r)\mathrm{d}\tau + \mathrm{cste} = 4\pi \int u_{vol}(r) r^2 \mathrm{d}r + \mathrm{cste}$$

car l'énergie interne volumique ne dépend que de r. L'énergie interne (qui est la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle microscopiques) est définie à une constante près. Dans la suite, on prend la constante nulle.
On a $u_{vol}(r) = c_{vol}T(r)$. Donc, en distinguant les capacités volumiques du noyau c_n et des roches c_r :

$$U_i = 4\pi\left(\int_{r=0}^{R_n} c_n T_n(r) r^2 \mathrm{d}r + \int_{r=R_n}^{R_\ell} c_r T_r(r) r^2 \mathrm{d}r\right) = 4\pi\left(c_n\left(a_n\frac{R_n^3}{3} - b_n\frac{R_n^4}{4}\right) + c_r\left(a_r\frac{R_\ell^3 - R_n^3}{3} - b_r\frac{R_\ell^4 - R_n^4}{4}\right)\right)$$

4. La température est désormais uniforme, le calcul des intégrales est donc grandement simplifié :

$$U_f = \frac{4\pi T_f}{3}\left(c_n R_n^3 + c_r(R_\ell^3 - R_n^3)\right)$$

5. On applique le premier principe de la thermodynamique à la Lune dans son intégralité entre l'instant après l'impact et l'instant final où la Lune est thermalisée :

$$\Delta U = U_f - U_i = Q = -P_{tot}\Delta t$$

en supposant que P_{tot} reste constant malgré le refroidissement... On en déduit : $\Delta t = \dfrac{U_i - U_f}{P_{tot}}$. A.N. : $\Delta t = 1$ million d'années.
Cet ordre de grandeur est largement sous-estimé vu que la Lune a été formée il y a 4,5 milliards d'années et n'est qu'à peine thermalisée aujourd'hui. Le modèle serait à corriger.
Remarque : Pistes d'améliorations du modèle : à l'intérieur de la Lune, les transferts thermiques ont lieu par diffusion et il faudrait prendre en compte les aspects cinétiques de la diffusion thermique résolution numérique ?), la radioactivité naturelle de la Lune induit une production in situ d'énergie thermique...

6. A l'interface $r = R_\ell$, le flux thermique se conserve. Pour $r = R_\ell^+$, le flux thermique dirigé vers l'extérieur est $P_{tot} = P_{ray} - P_{abs}$. Pour $r = R_\ell^-$, la loi de Fourier (diffusion) donne (orientation de Φ vers l'extérieur) : $\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot \vec{\mathrm{d}S} = -\lambda_r \dfrac{\partial T_r}{\partial r} 4\pi R_\ell^2$ vu que la température est uniforme sur la sphère de rayon R_ℓ. Donc, par conservation du flux à l'interface :

$$P_{tot} = -\lambda_r \frac{\partial T_r}{\partial r} 4\pi R_\ell^2$$