

Physique du laser

Sommaire

I	Description simple de l'interaction lumière-matière	2
I.1	3 types d'interactions lumière-matière	2
I.2	Coefficients d'Einstein (1916)	2
I.3	Durée de vie du niveau excité	5
I.4	Lien entre les différents coefficients d'Einstein	6
I.5	Sections efficaces d'absorption et d'émission stimulée	6
II	Amplification d'ondes lumineuses	8
II.1	Nécessité d'une inversion de population	8
II.2	Cas d'un système à 2 niveaux	8
II.3	Cas d'un système à 3 niveaux	9
III	Description du faisceau laser de profil gaussien	10
III.1	Pourquoi le modèle de l'onde plane n'est-il pas adapté pour décrire un faisceau lumineux réel ?	10
III.2	Description du faisceau gaussien (mode fondamental)	11
III.3	Action d'une lentille mince convergente sur un faisceau gaussien	14
	Annexe : nécessité d'une inversion de population (démonstration quantitative) (HP)	17
	Exercices	18

Questions de cours

- Présenter les trois processus d'interaction lumière-matière en distinguant les propriétés des photons émis de manière spontanée et stimulée. Coefficients d'Einstein.
- Durée de vie d'un niveau excité et conséquence sur la largeur en énergie d'un niveau excité.
- Expliquer qualitativement la nécessité d'une inversion de population pour amplifier une onde lumineuse.
- Faisceau lumineux de profil gaussien : construire l'allure de l'enveloppe à partir d'un faisceau cylindrique et d'un faisceau conique. Notion de waist, de longueur de Rayleigh et d'ouverture angulaire. Lien entre waist et ouverture angulaire.
- Déterminer la dimension et la position de la section minimale du faisceau émergeant d'une lentille convergente éclairée par un faisceau cylindrique.

- ★ *Prise de notes* : Constitution d'un laser : milieu amplificateur, cavité fermée via miroirs (dont l'un laisse partiellement passer la lumière), condition de phase $\delta = 2L = p \frac{c}{\nu}$ pour avoir des interf constructives.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

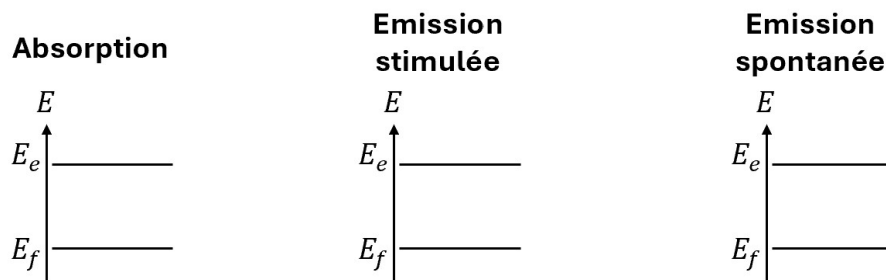
1. Utiliser des taux de transitions pour déterminer des équations de populations dans des systèmes à plusieurs niveaux.
2. Déterminer la dimension et la position de la section minimale d'un faisceau de profil gaussien à l'issue d'un passage par une lentille convergente.

I Description simple de l'interaction lumière-matière

I.1 3 types d'interactions lumière-matière

Considérons un atome modélisé par un ensemble discret de niveaux d'énergies et pouvant interagir avec la lumière. On s'intéresse uniquement, dans tout ce I, à une transition électronique entre deux niveaux d'énergies, appelés niveau fondamental et niveau excité, d'énergies E_f et E_e .

Il existe trois processus modélisant l'interaction lumière-matière : l'absorption, l'émission stimulée et l'émission spontanée.



- ★ Légende : 1 couleur pour l'état initial et 1 couleur pour l'état final.
- L'absorption est le processus dans lequel un atome dans l'état fondamental est propulsé dans l'état excité, sous l'effet d'un photon incident.
 - L'émission stimulée est le processus dans lequel un atome dans l'état excité émet un photon et retombe dans l'état fondamental, sous l'effet d'un photon incident.
 - L'émission spontanée est le processus dans lequel un atome dans l'état excité émet un photon et retombe dans l'état fondamental, sans interaction avec un rayonnement incident.

- ★ Le système {atome + lumière} étant supposé isolé, par conservation de l'énergie, l'énergie du photon absorbé ou émis est $E_e - E_f$. D'après la relation de Planck-Einstein, la pulsation du photon émis ou absorbé est donc la **pulsation de Bohr** du système atomique : $\omega_0 = \frac{E_e - E_f}{\hbar} = 2\pi\nu_0$.

Distinguer le photon émis par émission stimulée et par émission spontanée :

- ★ **Emission stimulée** : Les photons émis sont exactement de même énergie (et donc de même fréquence), de même quantité de mouvement (et donc de même direction de propagation) et de même polarisation que les photons incidents. L'onde émise par émission stimulée est en phase avec l'onde incidente : les ondes sont donc cohérentes entre elles. (Idée de copier/coller du photon incident.)
- **Emission spontanée** : Ce processus ne dépend pas d'un rayonnement incident. Ainsi, les photons émis sont de fréquence aléatoire (centrée sur ν_0), de direction et de polarisation aléatoires.

I.2 Coefficients d'Einstein (1916)

a Rappel : densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique

Le rayonnement électromagnétique possède une densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$$

Définition : Densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique

On définit la densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique u_ω , appelée aussi plus simplement *densité spectrale d'énergie électromagnétique*, par le rapport entre la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} comprise dans l'intervalle de pulsations $[\omega; \omega + d\omega]$ et ce $d\omega$:

$$u_\omega = \frac{du_{em}}{d\omega}$$

Remarque : On peut aussi définir une densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique en terme de longueurs d'onde $u_\lambda = \frac{du_{em}}{d\lambda}$ ou en fréquence $u_\nu = \frac{du_{em}}{d\nu}$.

- ★ Plus $u_\omega(\omega_0)$ est élevé, plus il y aura de photons de pulsations centrées sur ω_0 par unité de volume.

b Probabilités de transitions par unité de temps

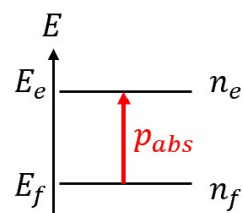
Einstein développe en 1916 un modèle pour décrire les probabilités de transitions par unité de temps entre l'état fondamental et l'état excité. Il introduit pour ceci trois coefficients A , B et B' , appelés depuis **coefficients d'Einstein**.

Remarque : Ce modèle a depuis trouvé une justification dans le cadre de la mécanique quantique.

- ★ Ce modèle s'appuie sur la notion de **population** d'un niveau d'énergie. La population n_f du niveau fondamental est le nombre d'atomes dans l'état f par unité de volume (= densité particulaire dans l'état f). Même principe pour la population n_e dans l'état e .

i) Absorption

On introduit p_{abs} la probabilité que l'atome absorbe un photon par unité de temps (unité : s^{-1}). On écrit par convention cette probabilité par unité de temps directement sur le spectre en énergie.



Variation de n_e durant dt sous l'effet de l'absorption :

$$dn_e)_{abs} = \text{Proba de passer dans } e \text{ durant } dt \times \text{densité particulaire dans } f = p_{abs} dt n_f$$

Donc le taux de variation de la population par absorption est

$$\left. \frac{dn_e}{dt} \right)_{abs} = +p_{abs} n_f$$

★ De même : variation de n_f durant dt :

$$\left. \frac{dn_f}{dt} \right)_{abs} = -p_{abs} n_f$$

Expression de p_{abs} :

D'après le processus d'absorption, la probabilité d'absorption par unité de temps est proportionnelle au nombre de photons à la pulsation ω_0 :

$$p_{abs} \propto n_{ph,\omega}(\omega_0) \propto u_\omega(\omega_0)$$

Einstein pose alors le coefficient B tel que :

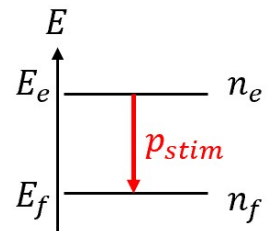
$$p_{abs} = B u_\omega(\omega_0)$$

Ce coefficient B est une caractéristique des niveaux d'énergies étudiés.

ii) Emission stimulée

L'émission stimulée a été introduite par Einstein comme étant le processus symétrique à l'absorption : le formalisme est donc exactement le même.

On introduit p_{stim} la probabilité que l'atome émette, de manière stimulée, un photon par unité de temps (unité : s^{-1}). On écrit par convention cette probabilité par unité de temps directement sur le spectre en énergie.



Taux de variation des populations par émission stimulée :

$$\star \quad \left. \frac{dn_e}{dt} \right)_{stim} = -p_{stim} n_e \quad \text{et} \quad \left. \frac{dn_f}{dt} \right)_{stim} = +p_{stim} n_e$$

Expression de p_{stim} :

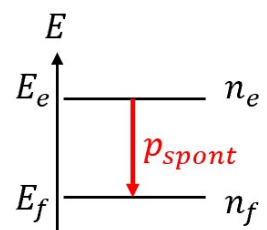
De même, Einstein pose le coefficient B' tel que :

$$p_{stim} = B' u_\omega(\omega_0)$$

Ce coefficient B' est une caractéristique des niveaux d'énergies étudiés.

iii) Emission spontanée

On introduit p_{spont} la probabilité que l'atome émette, de manière spontanée, un photon par unité de temps (unité : s^{-1}). On écrit par convention cette probabilité par unité de temps directement sur le spectre en énergie.



Taux de variation des populations par émission spontanée :

$$\star \quad \left. \frac{dn_e}{dt} \right)_{stim} = -p_{spont} n_e \quad \text{et} \quad \left. \frac{dn_f}{dt} \right)_{spont} = +p_{spont} n_e$$

Expression de p_{spont} :

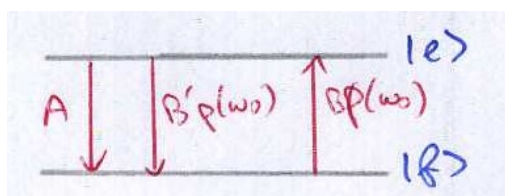
Cette fois, cette probabilité d'émission spontanée par unité de temps est indépendante du rayonnement incident. Einstein pose un coefficient A tel que :

$$p_{spont} = A$$

Ce coefficient A est une caractéristique des niveaux d'énergies étudiés.

Bilan :

Dans la pratique, les trois processus sont présents en même temps. Donc, dans le cas où seuls deux niveaux d'énergies interviennent :



★

$$\frac{dn_e}{dt} = Bu_\omega(\omega_0)n_f - An_e - B'u_\omega(\omega_0)n_e \quad \text{et} \quad \frac{dn_f}{dt} = -Bu_\omega(\omega_0)n_f + An_e + B'u_\omega(\omega_0)n_e$$

Comme tous les atomes sont soit dans l'état f , soit dans l'état e (on dit que le système à 2 niveaux est fermé), on retrouve bien : $n_f + n_e = \text{cste} = n$ avec n la densité particulaire totale d'atomes.

I.3 Durée de vie du niveau excité

Considérons un atome unique se trouvant dans l'état excité e . Cet atome est supposé isolé du reste de l'univers, si bien qu'aucun photon incident n'arrive sur cet atome. Quelle est la durée caractéristique que mettra cet atome à retourner dans son état fondamental ?

En l'absence de photon incident, le seul processus permettant à l'atome de se désexciter est l'émission spontanée. Donc :

$$\star \quad \frac{dn_e}{dt} = -An_e \Rightarrow n_e(t) = n_e(t=0) e^{-At}$$

soit un temps caractéristique de désexcitation $\tau = \frac{1}{A}$.

Ainsi, le niveau excité a une durée de vie limitée : un atome dans l'état excité ne le reste pas indéfiniment, même s'il est isolé du reste de l'univers. On vient d'expliquer une des causes de cette durée de vie limitée : l'interaction lumière-matière via l'émission spontanée.

Remarque : En pratique, l'atome n'étant pas isolé du reste de l'univers, d'autres processus non radiatifs (i.e. sans émission de photon) peuvent mener à un retour dans l'état fondamental. De manière très générale, plus on considère de processus d'interaction entre le système et le reste de l'univers, plus le système retournera rapidement dans son état fondamental. Cela explique pourquoi on remplace parfois le coefficient A d'Einstein par un taux de désexcitation $\gamma > A$, modélisant à la fois l'émission spontanée et tous les autres processus non radiatifs de retour dans l'état fondamental.

Ordres de grandeur : Suivant les systèmes considérés, le taux de désexcitation γ varie sur de nombreux ordres de grandeur :

- $1/\gamma \sim 1$ à 10 ns pour des transitions dans le domaine optiques ou des transitions non radiatives rapides.
- $1/\gamma \sim$ qq ms pour des transitions depuis un état métastable.

Durée de vie du niveau excité

Les processus de désexcitation du niveau excité vers le niveau fondamental limitent la durée de vie du niveau excité. Le temps caractéristique de vie du niveau excité est $\tau = \frac{1}{\gamma}$ avec γ le taux de désexcitation (en s^{-1}). L'émission spontanée est l'un des processus participant à ce taux de désexcitation.

Lien avec la largeur du niveau excité :

Considérons un ensemble d'atomes dans l'état excité, susceptibles de retourner dans l'état fondamental par le processus d'émission spontanée. L'émission spontanée résulte en l'émission d'un photon de pulsation centrée sur ω_0 . Mais, comme cette émission a lieu durant un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\gamma}$ fini, d'après la théorie de Fourier, le spectre de l'onde électromagnétique émise a une certaine largeur $\Delta\omega$, appelée largeur spectrale et vérifiant :

$$\Delta\omega \times \tau \sim 1$$

Ainsi, les photons ne sont pas tous émis à la pulsation ω_0 , mais sont émis dans un intervalle $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$! On dit alors souvent que le niveau excité n'a pas une énergie bien définie, mais possède une certaine largeur δE en énergie.

Dans toute la suite de l'étude des interactions lumière-matière (parties I et II), nous ne nous intéresserons pas aux aspects fréquentiels du rayonnement émis. Nous supposons donc les rayonnements accordés sur la pulsation de Bohr ω_0 du système (tous les photons sont à ω_0).

I.4 Lien entre les différents coefficients d'Einstein

Les coefficients A , B et B' d'Einstein sont caractéristiques des niveaux d'énergies considérés : ils ne dépendent pas de la nature du rayonnement en interaction avec les atomes. On peut alors déterminer un lien entre ces trois coefficients sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Les niveaux d'énergie sont non dégénérés.

Un niveau d'énergie E est dit non dégénéré s'il n'y a qu'un seul état stationnaire du système possédant l'énergie E .

On admet qu'on peut montrer (expressions à ne pas connaître) :

$$B = B' \quad \text{et} \quad \frac{A}{B'} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}$$

Interprétations :

- La connaissance de l'un des trois coefficients d'Einstein donne accès à tous les autres.
- On retrouve la symétrie entre absorption et émission stimulée ($B = B'$), ce qui est conforme à la symétrie des processus introduits par Einstein.

I.5 Sections efficaces d'absorption et d'émission stimulée

Nous avons désormais des outils pour écrire les équations d'évolution des populations dans un système atomique en interaction avec la lumière. Néanmoins, la densité spectrale d'énergie électromagnétique volumique u_ω n'est pas la grandeur la plus aisée à manipuler pour caractériser l'intensité lumineuse du rayonnement.

i) Absorption

Considérons dans un premier temps le processus d'absorption.

On s'intéresse à un faisceau lumineux cylindrique d'intensité lumineuse I , de section S à la pulsation ω_0 .

Exercice : Exprimer le nombre de photons δN_{ph} traversant la surface S durant dt en fonction (entre autres) de la puissance P du faisceau lumineux, puis en fonction (entre autres) de l'intensité I .

★

$$P dt = \delta N_{ph} \hbar \omega_0 \Rightarrow \delta N_{ph} = \frac{P dt}{\hbar \omega_0} \text{ et}$$

$$\delta N_{ph} = \frac{I S dt}{\hbar \omega_0}$$

Appelons j_{ph} le nombre de photons passant par unité de temps et par unité de surface dans le faisceau : $j_{ph} = \frac{I}{\hbar \omega_0}$ (unité :).

On introduit alors la section efficace d'absorption σ de sorte que la probabilité d'absorption par unité de temps soit

$$p_{abs} = j_{ph} \sigma = \frac{I \sigma}{\hbar \omega_0}$$

Pour faire le lien avec le coefficient d'Einstein caractérisant l'absorption, $\sigma \propto B$.

Interprétation (dans la vision corpusculaire) :

★ Considérons un faisceau lumineux d'enveloppe cylindrique de section S . Ce faisceau traverse un ensemble d'atomes dans le niveau fondamental. Représenter un faisceau lumineux cylindrique de section S et plusieurs disque de section σ . Si un photon passe dans un disque de section σ centré sur un atome dans l'état fondamental, alors l'atome absorbe le photon. Sinon, le photon n'est pas absorbé. On nomme alors σ la section efficace d'absorption d'un atome.

Ordre de grandeur : Dans le visible, on a $\sigma \sim 10^{-13} \text{ m}^2 \gg S_{\text{atome}} \sim \pi R_{\text{atome}}^2 \sim 10^{-20} \text{ m}^2$. Ainsi, les atomes « captent » très bien les photons du visible pour les absorber : on dit que les atomes sont de très bonnes antennes pour la réception du rayonnement visible.

ii) Emission stimulée

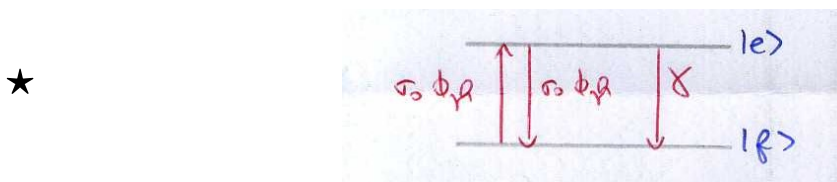
De manière totalement symétrique à l'absorption, on introduit une section efficace d'émission stimulée de sorte que

$$p_{stim} = j_{ph} \sigma = \frac{I \sigma}{\hbar \omega_0}$$

Pour faire le lien avec le coefficient d'Einstein caractérisant l'absorption, $\sigma \propto B'$. Par symétrie des processus d'absorption et d'émission stimulée, les deux sections efficaces d'absorption et d'émission stimulée sont égales, d'où la notation σ .

Remarque : Comme l'émission spontanée est un processus dont la probabilité de transition par unité de temps est indépendante du rayonnement électromagnétique, il n'y a pas de sens à introduire une section efficace d'émission spontanée.

iii) Bilan



II Amplification d'ondes lumineuses

II.1 Nécessité d'une inversion de population

Considérons un ensemble d'atomes caractérisés par deux niveaux (fondamental et excité) non dégénérés. Un faisceau lumineux se propageant suivant $+\vec{e}_z$ traverse cet ensemble d'atomes sur une distance L . L'objectif est de réussir à créer un milieu amplificateur de lumière, i.e. à ce que l'intensité lumineuse en sortie soit plus importante que l'intensité lumineuse en entrée : $I(z = L) > I(z = 0)$.

i) Quel type d'émission (spontanée ou stimulée) va permettre d'amplifier l'intensité lumineuse ?

Schéma.

L'émission spontanée résulte en l'émission d'un photon dans une direction aléatoire : il est donc très peu probable que cette émission se fasse dans la direction du faisceau $+\vec{e}_z$. Et même si cette émission se faisait dans la bonne direction, comme l'onde créée par émission spontanée n'est pas émise en phase avec l'onde incidente, on ne profiterait pas d'interférences constructives (voire on aurait des interférences destructives !).



Au contraire, l'émission stimulée permet de créer des photons de même direction que ceux incidents, et l'onde générée est en phase avec l'onde incidente : il y a interférences constructives.

Ainsi, du point de vue du flux de photons, on négligera l'effet de l'émission spontanée devant l'émission stimulée.



On néglige l'effet de l'émission spontanée sur le flux de photons (lumière) mais pas sur les populations atomiques (matière).

ii) Quelle contrainte doit-il y avoir sur les populations atomiques pour permettre l'amplification de la lumière ?



Les probabilités par unité de temps qu'un atome absorbe un photon ou en émette un de manière stimulée sont identiques. Par conséquent, pour amplifier une onde lumineuse, il faut que la population dans l'état excité soit plus grande que dans l'état fondamental.

Inversion de population

Pour amplifier une onde lumineuse, il faut que la population n_e dans le niveau excité soit supérieure à la population n_f dans le niveau fondamental : $n_e \geq n_f$.

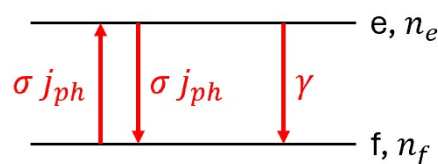
Ceci est contraire à l'état d'équilibre thermodynamique dans un milieu atomique : on dit alors que l'on doit réaliser une **inversion de population** pour amplifier une onde lumineuse.

Remarque : On peut bien sûr obtenir un régime stationnaire sans être à l'équilibre thermodynamique.

Remarque : On peut retrouver ce résultat d'inversion de population de manière quantitative, via un bilan du nombre de photons dans le faisceau. C'est hors programme, mais je vous ai mis le bilan en annexe.

II.2 Cas d'un système à 2 niveaux

On considère (comme toujours depuis le début de ce chapitre) un système atomique possédant deux niveaux d'énergies. On suppose ce système fermé : $n_f + n_e = n = \text{cste}$.



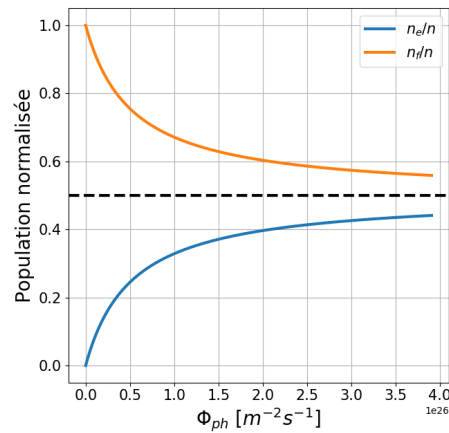
Exercice : Déterminer l'expression de la population n_e en régime stationnaire, en fonction de n , σ , j_{ph} et γ . En déduire l'expression de n_f . Représenter ces populations n_e et n_f en fonction de j_{ph} . Commenter.

$$\frac{dn_e}{dt} = 0 \Rightarrow n_e = \frac{\sigma j_{ph}}{\gamma + 2\sigma j_{ph}} n$$

On en déduit :

$$n_f = n - n_e = \frac{\gamma + \sigma j_{ph}}{\gamma + 2\sigma j_{ph}} n$$

★



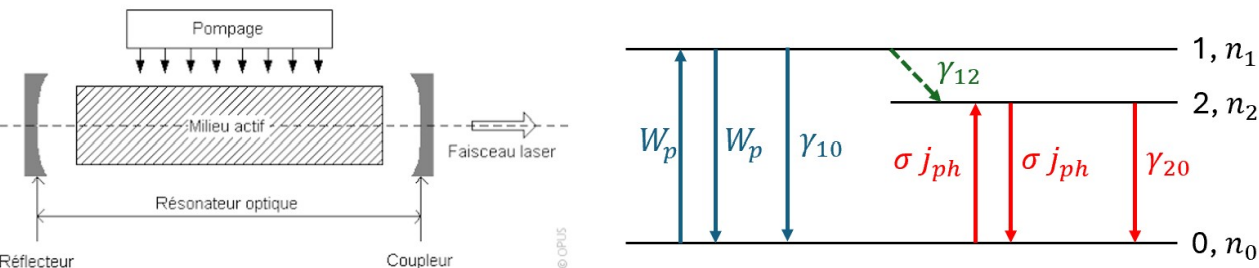
- En l'absence de faisceau lumineux, $n_e = 0$ et $n_f = 1$: tous les atomes sont dans l'état de plus basse énergie.
- Lorsque l'intensité lumineuse augmente, n_e augmente et n_f diminue, ce qui est cohérent avec l'augmentation de la probabilité d'absorption par unité de temps.
- On a toujours $n_e < n_f$: on ne peut pas réaliser d'inversion de population avec un système à 2 niveaux.

II.3 Cas d'un système à 3 niveaux

Pour réussir à réaliser une inversion de population dans un système atomique, et donc réussir à créer un milieu amplificateur, il faut au moins un système atomique à 3 niveaux.



A partir du moment où on étudie un système à strictement plus de 2 niveaux, il peut exister des photons à des fréquences de Bohr différentes. On souhaite alors amplifier l'une des fréquences des ondes lumineuses : il est indispensable de repérer quelle est cette fréquence dans l'énoncé.



Description du système :

- La transition $0 \rightarrow 1$ est réalisée via un système de pompage optique. Le pompage désigne l'ensemble des processus d'excitation vers des niveaux de hautes énergies. Cette transition n'est pas celle pour laquelle on souhaite amplifier l'onde lumineuse.
- La transition $1 \rightarrow 2$ est une transition **rapide non radiative**. Cela implique que :

- aucun photon n'est émis au cours de cette transition. De ce fait, on ne considère qu'un taux de désexcitation non radiative.
- le processus étant rapide, on suppose que γ_{12} est bien plus grand que tous les autres taux impliquant le niveau 1.
- Finalement, la transition $2 \rightarrow 0$ est la transition pour laquelle on souhaite amplifier l'onde lumineuse.
 - ★ C'est donc pour cette transition que l'inversion de population doit être réalisée : $n_2 \geq n_0$.

Equations sur les populations :

$$\frac{dn_1}{dt} = W_p n_0 - (W_p + \gamma_{10} + \gamma_{12}) n_1 \simeq W_p n_0 - \gamma_{12} n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \gamma_{12} n_1 + \sigma j_{ph} n_0 - \sigma j_{ph} n_2 - \gamma_{20} n_2$$

- ★ En régime stationnaire :

$$\gamma_{12} n_1 = W_p n_0 \Rightarrow n_2 = \frac{W_p + \sigma j_{ph}}{\gamma_{20} + \sigma j_{ph}} n_0 \Rightarrow n_2 - n_0 = \frac{W_p - \gamma_{20}}{\gamma_{20} + \sigma j_{ph}} n_0$$

On souhaite que $n_2 - n_0 \geq 0$: il suffit donc que $W_p \geq \gamma_{20}$.

Avec un pompage efficace, on réussira à réaliser l'inversion de population dans un système à 3 niveaux : ce système peut donc être un amplificateur d'ondes lumineuses.

Remarque : On peut aussi réaliser des milieux amplificateurs avec des systèmes à 4 niveaux, voire plus.

III Description du faisceau laser de profil gaussien

Après s'être intéressé au constituant interne principal du laser (le milieu amplificateur), intéressons nous au faisceau lumineux obtenu en sortie d'un laser.

De même qu'en optique ondulatoire, on se place dans le cadre du modèle scalaire de l'optique : l'onde est décrite par la vibration lumineuse $s(M,t)$. On suppose l'onde harmonique, de pulsation ω_0 , la pulsation de Bohr de la transition atomique utile pour l'effet amplificateur. En notation complexe, on a donc :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_0(M) e^{i\omega_0 t}$$

et $s(M,t) = \text{Re}(\underline{s}(M,t))$.

L'objectif de ce qui suit est de décrire la fonction $\underline{s}_0(M)$.

III.1 Pourquoi le modèle de l'onde plane n'est-il pas adapté pour décrire un faisceau lumineux réel ?

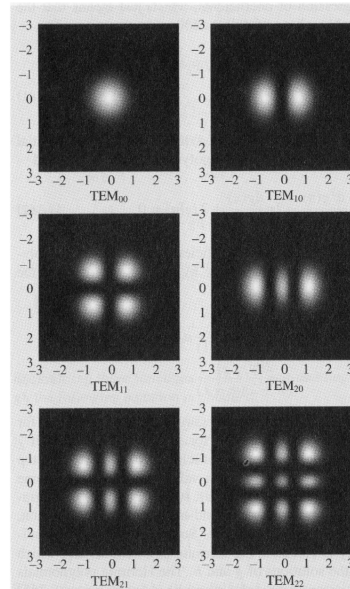
L'onde émise par un laser est progressive. On a, dans les cours d'optique et de physique des ondes, étudié principalement une famille de solutions progressives et harmoniques de l'équation de d'Alembert sur \underline{s} : les ondes planes progressives et harmoniques (OPPH). Dans ce cas, $\underline{s}(M,t) = \underline{A}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, soit donc $\underline{s}_0(M) = \underline{A}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$.

- ★ Néanmoins, ces solutions ne peuvent pas décrire une onde réelle car elles sont d'extension spatiale (et temporelle) illimitée, ce qui revient à dire qu'elles transportent une énergie infinie.

Remarque : Mais les OPPH restent (très) intéressantes en physique des ondes, car elles constituent une base (infinie) de toutes les solutions de l'équation de d'Alembert.

Dans cette dernière partie, on se propose alors de décrire un autre type d'onde : l'onde gaussienne progressive harmonique, que l'on appellera plus couramment **faisceau gaussien**. Ce type d'onde ne présente pas une extension spatiale illimitée et peut donc caractériser réellement l'onde émise par un laser.

Notez qu'il existe différents modes de faisceaux gaussiens possibles (cf. figure ci-contre représentant l'intensité lumineuse en fonction de 2 dimensions de l'espace) : on se contentera d'étudier le **mode gaussien fondamental** (TEM₀₀).



III.2 Description du faisceau gaussien (mode fondamental)

a Expression fournie de la vibration lumineuse

On considère que l'onde gaussienne se propage au voisinage d'un axe (Oz). Le mode fondamental présente une symétrie de révolution autour de cet axe (Oz). On utilise donc les coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Voici l'expression de l'amplitude complexe $\underline{s}_0(M)$ de la vibration lumineuse pour le mode fondamental gaussien (expression qui n'est pas à connaître, ouf !) :

$$\underline{s}_0(M) = \frac{A_0 w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} - i\Phi(z)}$$

avec

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} ; \quad R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} ; \quad \Phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad \text{et} \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0}$$

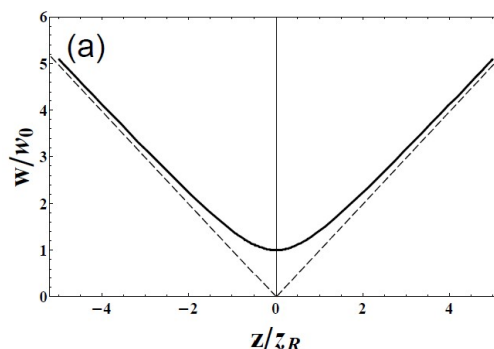
Le faisceau gaussien est entièrement défini par :

- ★ la longueur d'onde λ_0 .
- ★ le **waist** w_0 , ou de manière équivalente, la **longueur de Rayleigh** z_R .

Remarque : Dans l'expression fournie ci-dessus, on a fait le choix de définir l'origine $z = 0$ au niveau de la section minimale du faisceau (cf. la suite). En pratique, cette origine pourra être translatée.

Pour la suite, il sera intéressant de retenir l'allure du graphe de $w(z)$:

★



b Profil radial d'intensité lumineuse

A partir de la vibration lumineuse, on peut calculer l'intensité lumineuse :

$$\star \quad I = K |\underline{s}(M,t)|^2 \text{ avec } K \text{ une constante}$$

Donc :

$$I(M) = I_0(z) e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} \quad \text{avec} \quad I_0(z) = \underbrace{K |A_0|^2}_{=\text{cste}} \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2$$

Graphes de $I(M)$

Pour $z = \text{cste}$ fixé :

Schéma avec définition d'un axe (Ox) et (Oy) . Graphes de $I(x, z = \text{cste})$. Préciser que pour $x = \pm w(z)$, $I = 0.14I_0(z)$.

★ Mathématiquement, on appelle gaussienne la fonction $x \mapsto \text{cste} \times e^{-\frac{x^2}{\text{cste}}}$. L'intensité lumineuse est donc une fonction gaussienne de la distance à l'axe (Oz) (d'où le nom de faisceau gaussien !).

Pour différentes valeurs de z :

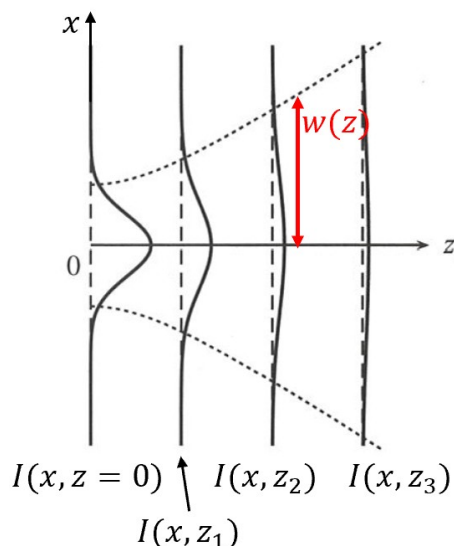


Figure 1: Répartition radiale de l'intensité lumineuse pour différentes valeurs de z . La zone entre les pointillés représente les lieux où l'intensité lumineuse est supérieure à 14% de $I_0(z)$ (donc la zone où l'intensité lumineuse est importante).

On constate que :

- pour z fixé, la quasi-totalité de la puissance du faisceau est contenue dans un disque de rayon $w(z)$. On considérera donc que ce disque délimite la taille du faisceau laser : $w(z)$ est interprété comme étant le rayon du faisceau laser.
- le faisceau laser s'étale au cours de sa propagation.
- à z fixé, on peut calculer la puissance totale portée par le faisceau :
 - en odg : $P(z) \sim I_0(z) \times \pi w^2(z)^2$
 - sans aucune simplification :

★

$$P(z) = \iint_{(S)} I_0(z) e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} r dr d\theta = 2\pi I_0(z) \left[-\frac{w^2(z)}{4} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} I_0(z) w^2(z) = \text{cste}$$

La puissance lumineuse portée par le faisceau laser se conserve au cours de la propagation (cohérent avec l'équation de d'Alembert).

c Dimension caractéristique du faisceau

Dans la suite, on se contente de représenter l'enveloppe du faisceau, de rayon $w(z)$, au cours de sa propagation.

- ★ Graphe de l'enveloppe en fct de z (c'est exactement le même graphe que $w(z)$, auquel on ajoute son symétrique !!). Préciser : $w(z)$, w_0 , $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$, $w(z) \sim w_0 \frac{z}{z_R}$ pour $z \gg z_R$ et θ .

On retiendra l'équation de l'asymptote en $z \rightarrow +\infty$:

$$w(z) \sim w_0 \frac{z}{z_R}$$

On distingue alors deux régimes différents :

- champ proche : si $z \ll z_R$, alors $w(z) \simeq w_0$ le waist du faisceau. L'enveloppe du faisceau est cylindrique.
- ★ • champ lointain : si $z \gg z_R$, alors l'enveloppe du faisceau est conique. On appelle alors **ouverture angulaire** le demi-angle θ au sommet du cône. Cet angle $\theta \ll 1$. On en déduit :

$$\tan(\theta) \simeq \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda_0}{\pi w_0}$$

Cette formule de l'ouverture angulaire rappelle une formule de diffraction ! Le fait que le faisceau laser soit d'extension spatiale limitée impose qu'un phénomène de diffraction a lieu à partir de la section minimale du faisceau. Ce résultat est en fait un résultat général de la théorie de la diffraction en optique ondulatoire :

Ouverture angulaire d'un faisceau gaussien et diffraction

Tout faisceau dont l'extension transversale est limitée (par un obstacle ou pas) subit de la diffraction.

Dans le cas d'un faisceau gaussien, on retiendra que l'ouverture angulaire $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0}$.

Remarque : Dans le cas d'un objectif de microscope, on parle plutôt d'ouverture numérique ON. Par définition $ON = \sin(\theta) \simeq \theta$. Plus l'ON est grande, plus le waist w_0 est petit : on augmente l'intensité lumineuse sur l'échantillon et on améliore la résolution spatiale.

Remarque : Vous devez aussi savoir retrouver $\theta = \frac{w_0}{z_R}$, mais c'est faisable quand on se rappelle de l'équation de l'asymptote de l'enveloppe du faisceau à grande distance.

d Surfaces d'ondes

On admet que la fonction $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$ représente le rayon de courbure des surfaces d'onde.

- En champ proche ($z \ll z_R$), on a $R(z) \sim \frac{z_R^2}{z} \gg z_R$. Le rayon de courbure est alors très grand et on peut assimiler, en champ proche, l'onde à une onde plane, mais qui est limitée à l'intérieur de l'enveloppe cylindrique de rayon w_0 .
- En champ lointain ($z \gg z_R$), on a $R(z) \sim z$. Les surfaces d'onde sont alors des portions de sphères centrées sur $z = 0$. On peut assimiler, en champ lointain, l'onde à une onde sphérique de foyer $z = 0$, mais qui est limitée à l'intérieur de l'enveloppe conique de demi-angle au sommet θ .

- ★ Représentation des surfaces d'onde à l'intérieur de l'enveloppe

e Synthèse

On a mis en évidence deux comportements asymptotiques d'un faisceau gaussien :

Comportements asymptotiques d'un faisceau gaussien

- En champ proche, i.e. pour $z \ll z_R$ (en pratique, $z < 0.8z_R$ suffit), le faisceau peut être assimilé à un faisceau cylindrique, de rayon le waist w_0 . Les surfaces d'onde sont planes.
- En champ lointain, i.e. pour $z \gg z_R$, le faisceau peut être assimilé à un faisceau conique, de demi-angle au sommet l'ouverture angulaire $\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0}$. Les surfaces d'onde sont des portions de sphères centrées sur la position de la section minimale du faisceau.

Ordres de grandeur : Pour un laser rouge de TP He-Ne, on a typiquement : $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ et $w_0 \sim 1 \text{ mm}$. On en déduit : $z_R \sim 5 \text{ m}$ et $\theta \sim 0.2 \text{ mrad}$.

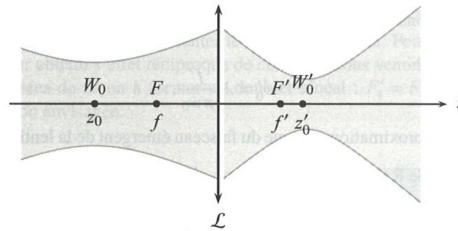
- ★ Pour les applications de TP, on a donc toujours $z < 0.8z_R$: on peut en TP assimiler le faisceau laser comme cylindrique et les ondes comme étant planes.

La puissance typique des lasers de TP est $P \sim 1 \text{ mW}$. On peut donc en déduire la puissance surfacique :

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi w_0^2} \sim 300 \text{ W m}^{-2}$$

III.3 Action d'une lentille mince convergente sur un faisceau gaussien

a Focalisation d'un faisceau gaussien



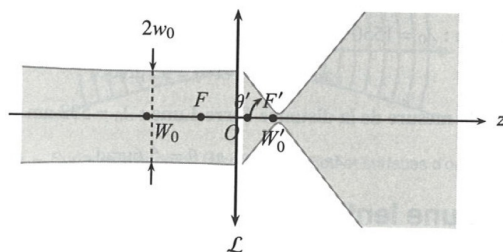
Une lentille mince convergente est située en $z = 0$. Un faisceau gaussien incident a un waist w_0 situé en $z = z_0$ et a pour longueur d'onde λ_0 . On admet que le faisceau émergent est également gaussien. Par linéarité des équations de propagation, λ_0 est conservé. Le faisceau émergent a un waist w'_0 situé en $z = z'_0$.

Cas particulier : faisceau incident cylindrique

On suppose que le faisceau incident est cylindrique, ce qui sera valable si le faisceau incident est étudié en champ proche. Ceci sera une approximation raisonnable si $f' \ll z_R$.

Fiche-méthode : Déterminer le waist w'_0 du faisceau émergent et sa position à partir d'un faisceau cylindrique incident.

1. Réaliser le tracé des rayons lumineux dans le cadre de l'optique géométrique : on suppose donc le faisceau émergent conique. Corriger le schéma pour que le rayon du faisceau émergent ne soit jamais nul (au plus faible, il vaut w'_0). On en déduit la position du waist du faisceau émergent.
2. Déterminer géométriquement l'ouverture angulaire θ' du faisceau émergent.
3. Utiliser $\theta' = \frac{\lambda_0}{\pi w'_0}$ pour en déduire w'_0 .
4. (Facultatif suivant la formulation de l'énoncé.) Vérifier a posteriori l'hypothèse de faisceau émergent conique.



- ★
1. On suppose le faisceau émergent conique. D'après le tracé des rayons lumineux, le waist w'_0 se trouve au foyer image de la lentille.
 2. Géométriquement : $\tan(\theta') \simeq \theta' = \frac{w_0}{f'}$.
 3. Or, $\theta' = \frac{\lambda_0}{\pi w'_0}$. Donc, $w'_0 = \frac{\lambda_0 f'}{\pi w_0}$.
 4. Vérifions a posteriori que le faisceau émergent est conique. Cela revient à vérifier si ce faisceau est étudié en champ lointain, i.e. si $f' \gg z'_R$.
On a $z'_R = \frac{\pi w_0'^2}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 f'^2}{\pi w_0^2} = \frac{f'^2}{z_R}$. Or, $f' \ll z_R$. Donc, $z'_R \ll f'$: l'hypothèse de faisceau émergent conique est vérifiée.

Ordre de grandeur : Reprenons le cas du laser He-Ne de TP : $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ et $w_0 \sim 1 \text{ mm}$. En focalisant ce faisceau laser avec un objectif de microscope tel que $f' = 4 \text{ mm}$, on obtient :

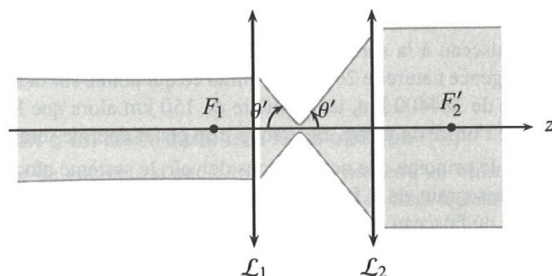
- $w'_0 \sim 0.8 \mu\text{m}$
- on vérifie que $z_R = 5 \text{ m} > f'$ et que $z'_R = 3 \mu\text{m} \ll f'$, ce qui valide les hypothèses de faisceau incident cylindrique et de faisceau émergent conique.

Comme le laser possède une puissance typique $P \sim 1 \text{ mW}$ qui se conserve, la puissance surfacique après focalisation du laser devient $I = P/(\pi w_0'^2) \sim 5 \times 10^8 \text{ W m}^{-2} \gg 300 \text{ W m}^{-2}$ (puissance avant focalisation).

Remarque : Par principe de retour inverse de la lumière, on déduit qu'un faisceau conique incident ayant son waist au foyer objet d'une lentille convergente est transformé en faisceau cylindrique émergent, et on est capable de donner à nouveau la relation entre les waists des faisceaux incident et émergent.

b Elargisseur de faisceau

Nous souhaitons transformer un faisceau cylindrique incident en un faisceau cylindrique émergent de waist plus grand. On réalise pour cela le système afocal suivant, appelé **élargisseur de faisceau** :



- ★ Le système étant afocal, on sait que : $F_1' = F_2$.
1. D'après la sous-partie précédente, on sait que le faisceau émergent de (\mathcal{L}_1) est conique et que le faisceau émergent de (\mathcal{L}_2) est cylindrique. (Le waist du faisceau conique est en $F_1' = F_2$.)

2. Géométriquement, on a : $\tan(\theta') = \frac{w_0}{f'_1} = \frac{w''_0}{f'_2}$. On en déduit directement que

★
$$\frac{w''_0}{w_0} = \frac{f'_2}{f'_1}$$

On obtient un élargisseur de faisceau si $f'_2 > f'_1$, ce qui était déjà visible avec le schéma d'optique géométrique.

3. On peut caractériser les ouvertures angulaires des faisceaux incident et émergent :

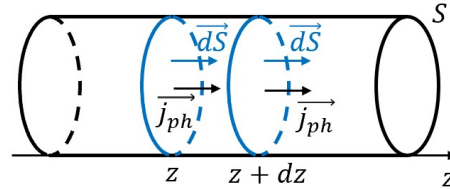
$$\theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0} \quad \text{et} \quad \theta'' = \frac{\lambda_0}{\pi w''_0} \Rightarrow \frac{\theta''}{\theta} = \frac{w_0}{w''_0} = \frac{f'_1}{f'_2} < 1$$

Un élargisseur de faisceau a ainsi aussi pour effet de réduire l'ouverture angulaire du faisceau émergent par rapport au faisceau incident : on dit que le faisceau émergent est collimaté.

Annexe : nécessité d'une inversion de population (démonstration quantitative) (HP)

Considérons un ensemble d'atomes caractérisés par deux niveaux (fondamental et excité) non dégénérés. Un faisceau lumineux cylindrique de section S se propageant suivant $+\vec{e}_z$ traverse cet ensemble d'atomes. L'objectif est de réussir à créer un milieu amplificateur de lumière, c'est-à-dire que l'on souhaite que le nombre de photons traversant une section S durant dt augmente avec z , i.e. on souhaite $\frac{dj_{ph}}{dz} \geq 0$.

Réalisons un bilan du nombre de photons sur la couche du milieu entre z et $z + dz$, entre t et $t + dt$.



Pour simplifier, on se place en régime stationnaire. Le bilan donne : $d^2 N_{ph} = \delta^2 N_{ph,ech} + \delta^2 N_{emis} - \delta^2 N_{absorbes}$

Variation temporelle : $d^2 N_{ph} = 0$

Échanges spatiaux :

$$\begin{aligned} \delta^2 N_{ph,ech} &= \delta N_{ph,entrant}(z) - \delta N_{ph,sortant}(z + dz) \\ &= j_{ph}(z)Sdt - j_{ph}(z + dz)Sdt \\ &= -\frac{dj_{ph}}{dz} Sdzdt \end{aligned}$$

Termes d'émission et d'absorption :

On ne considère que l'émission stimulée et l'absorption :

$$\begin{aligned} \delta^2 N_{ph,emis} &= \sigma j_{ph}(z)dt \times n_e Sdz \\ \delta^2 N_{ph,absorbes} &= \sigma j_{ph}(z)dt \times n_f Sdz \end{aligned}$$

Bilan :

$$0 = -\frac{dj_{ph}}{dz} Sdzdt + \sigma(n_e - n_f)j_{ph}(z)Sdzdt \Rightarrow \frac{dj_{ph}}{dz} = \sigma(n_e - n_f)j_{ph}(z)$$

On souhaite amplifier l'intensité lumineuse au fil de la propagation : on souhaite donc que $\frac{dj_{ph}}{dz} \geq 0$. Cela impose que $n_e - n_f \geq 0$: il faut une inversion de population pour amplifier l'onde lumineuse.

Exercices

Ex. 1 (Ecrit CCINP PC 2022) Résolution spatiale d'une expérience de vélocimétrie laser à franges

On s'intéresse à une méthode non invasive de mesure de la vitesse d'un fluide : la vélocimétrie laser à franges. Le principe consiste à croiser deux faisceaux issus d'une même source laser dans une zone de l'écoulement afin de créer des franges d'interférences lumineuses (figure 8). On introduit dans le fluide des particules d'ensemencement (gouttelettes d'huile, microbilles d'aluminium ou de polystyrène...) qui suivent l'écoulement du fluide. Lorsqu'une de ces particules traverse une frange brillante, elle diffuse la lumière du laser. En mesurant l'intensité de la lumière diffusée par la particule au cours du temps, on obtient un signal périodique dont la fréquence est reliée à la vitesse à laquelle celle-ci traverse les franges, ce qui permet de déduire la vitesse du fluide.

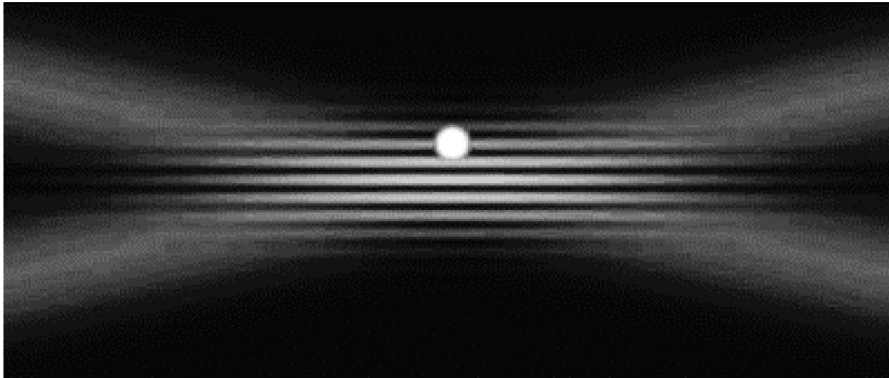


Figure 8 - Franges d'interférences créées par les faisceaux laser. Une particule suivant le mouvement du fluide passe à travers les franges (source : ONERA)

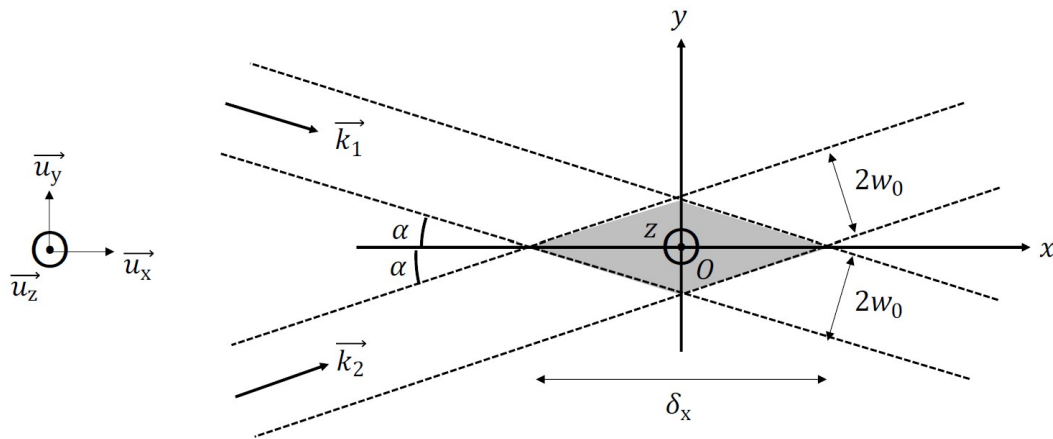


Figure 9 - Croisement des faisceaux laser : la zone d'interférences est représentée en gris

La configuration d'étude de la vélocimétrie laser à franges est représentée à la figure 9. Les deux faisceaux laser issus d'une même source se croisent dans un écoulement d'air dont on veut mesurer la vitesse. Le centre O de la figure d'interférences est l'origine d'un repère $(Oxyz)$, tel que les directions des deux faisceaux sont inclinées d'un angle $\alpha = 6^\circ$ par rapport à l'axe (Ox) . La longueur d'onde du laser dans l'air est assimilable à celle dans le vide $\lambda_0 = 514.5 \text{ nm}$.

On admet qu'une étude d'optique ondulatoire permet de déterminer l'interfrange $\Delta y = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\alpha)}$.

1. On suppose qu'une particule en mouvement avec le fluide passe à travers la zone d'interférences avec une vitesse v_y selon \vec{u}_y . On mesure l'intensité lumineuse diffusée par la particule au cours du temps et on obtient un signal de fréquence $f_d = 2.45 \text{ MHz}$. Déterminer la valeur numérique de v_y .

Les faisceaux laser ont une extension spatiale latérale limitée dont la taille typique au niveau de la zone d'interférences est $2w_0$ (supposée constante à l'échelle de la zone d'interférences). Chaque faisceau est obtenu à partir d'un faisceau gaussien quasi-cylindrique, d'extension typique $2W_0$, que l'on fait converger à l'aide d'une lentille convergente de distance focale image f' (figure 10). La zone d'interférences se trouve au niveau des foyers principaux image de chaque lentille, ces deux foyers étant confondus.

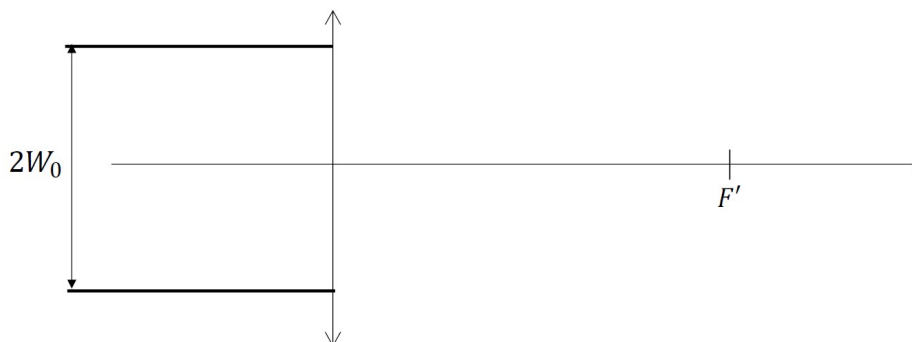


Figure 10 - Focalisation d'un faisceau laser cylindrique par une lentille convergente

- Reproduire le schéma de la figure 10 sur votre copie et le compléter en représentant l'allure de l'enveloppe du faisceau laser après traversée de la lentille. On prendra soin de tracer ce faisceau avant et après le foyer principal image F' et de faire figurer la distance w_0 .
- Donner une expression approchée de w_0 à partir de W_0 , λ_0 et f' .

On cherche à mesurer la vitesse $v_y(x)$ en fonction de l'abscisse x . La taille des faisceaux laser limite la résolution spatiale δ_x de la mesure de vitesse.

- Expliquer pourquoi la résolution spatiale δ_x correspond à la longueur selon (Ox) du champ d'interférences (figure 9). En fonction de w_0 et α , exprimer la résolution spatiale δ_x . En déduire une estimation numérique de δ_x en prenant $W_0 = 1 \text{ mm}$ et $f' = 16 \text{ cm}$. Proposer un moyen d'améliorer cette résolution spatiale.
- La concentration en particules d'ensemencement dans le fluide doit être précisément définie. Quels problèmes poseraient une concentration trop faible ou une concentration trop élevée ?

Le dispositif présenté ici ne permet en fait de connaître que la composante de la vitesse du fluide selon l'axe (Oy) . Pour déterminer les deux autres composantes de la vitesse, on réalise simultanément le même type de franges d'interférences dans les deux autres directions de l'espace, en utilisant des paires de faisceaux laser ayant chacun une longueur d'onde distincte des autres paires de faisceaux. La lumière diffusée par une particule est donc composée des trois longueurs d'onde utilisées pour chaque laser.

- Citer un dispositif optique permettant de sélectionner une des longueurs d'onde dans la lumière diffusée par la particule, afin d'effectuer la mesure d'une des composantes de vitesse.

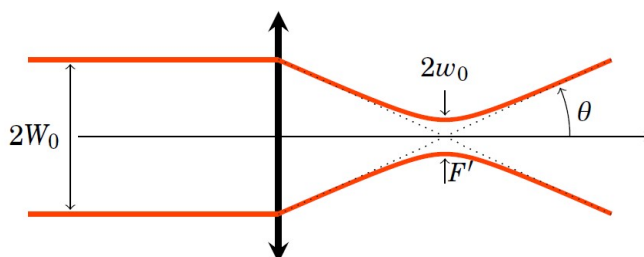
Correction de l'exercice 1

- La période $T_d = \frac{1}{f_d}$ du signal diffusé correspond à la durée mise par une particule pour passer d'une frange brillante à la frange brillante successive :

$$T_d = \frac{\Delta y}{v_y} \Rightarrow v_y = \Delta y f_d = \frac{\lambda_0 f_d}{2 \sin(\alpha)}$$

A.N. : $v_y = 6.0 \text{ m s}^{-1}$.

- .



3. Géométriquement, pour un angle θ petit (cas usuel pour les lasers) : $\tan(\theta) \simeq \theta = \frac{W_0}{f'}$. Or, du fait de la limitation spatiale du faisceau laser, on a diffraction du faisceau :

$$\sin(\theta) \simeq \theta = \frac{\lambda_0}{\pi w_0} \Rightarrow w_0 = \frac{\lambda_0 f'}{\pi W_0}$$

4. On ne pourra pas distinguer la vitesse v_y de deux particules distantes de moins de δ_x , car elles vont toutes deux donner un signal diffusé périodique en même temps en traversant le champ d'interférences. Géométriquement :

$$\sin(\alpha) = \frac{2w_0}{\delta_x} \Rightarrow \delta_x = \frac{2w_0}{\sin(\alpha)}$$

A.N. : $w_0 = 26 \mu\text{m}$ et $\delta_x = 0.50 \text{ mm}$

On améliore la résolution spatiale en diminuant δ_x , i.e. en diminuant w_0 , i.e. en diminuant f' ou en augmentant W_0 par exemple. On peut aussi augmenter l'angle α , mais ceci aura un effet sur la fréquence du signal diffusé mesuré.

5. Une concentration trop faible en particules ferait qu'on n'obtiendrait pas un signal diffusé périodique : certaines particules passeraient à travers les franges d'interférences, puis plus aucune particule ne passerait, puis de nouvelles particules passeraient.

Une concentration trop élevée en particules induirait un signal diffusé continu car il y aurait toujours une particule dans le fluide qui passerait à travers une frange brillante.

6. On peut citer le réseau de diffraction ou le prisme.

Ex. 2 (Ecrit Centrale PC 2021) Emission de la lumière de fluorescence par un fluorophore

Une molécule fluorescente peut être utilisée comme une sonde locale, à l'échelle nanométrique, de son environnement. Il est ainsi possible d'accéder à une information non moyennée spatialement. L'évolution temporelle du signal permet alors de suivre la dynamique de la molécule étudiée, aussi bien la dynamique interne que les interactions de la molécule avec son environnement. Dans la suite, on appelle fluorophore une molécule fluorescente individuelle.

Afin d'estimer de façon simple le rendement de fluorescence, on adopte une modélisation simplifiée en considérant que la molécule peut accéder à trois niveaux d'énergie schématiquement représentés sur la figure 5.

On note k_e le taux d'excitation du niveau 1 (niveau fondamental) au niveau 2 (niveau excité), k_r et k_{nr} les taux de désexcitation radiative et non radiative du niveau 2 vers le niveau 1 et k_T le taux de désexcitation du niveau 3 (appelé niveau triplet) vers le niveau 1. Il existe, à partir du niveau 2, une possibilité pour la molécule de passer dans le niveau 3 avec un taux k_{isc} (« inter-system crossing »).

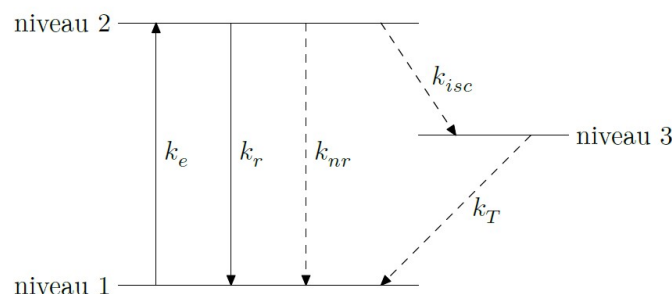


Figure 5 Description des niveaux d'énergie du fluorophore par un système à 3 niveaux

On note P_1 , P_2 et P_3 , les probabilités d'occupation de chaque niveau. Les probabilités P_1 et P_3 obéissent aux équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -k_e P_1 + (k_r + k_{nr}) P_2 + k_T P_3, \\ \frac{dP_3}{dt} &= k_{isc} P_2 - k_T P_3. \end{aligned}$$

En pratique, pour observer la fluorescence, on illumine les fluorophores avec un laser externe. Ainsi, k_e dépend de l'intensité de ce laser externe. Au contraire, k_r ne dépend pas de l'intensité de ce laser externe.

Remarque : La modélisation simplifiée de ce sujet fait abstraction du fait que les fréquences du laser externe et de la fluorescence ne sont pas identiques.

Q 12. Déterminer l'équation vérifiée par $\frac{dP_2}{dt}$ en fonction des taux définis précédemment et des probabilités d'occupation des niveaux d'énergie. Les équations du système sont-elles linéairement indépendantes ?

On suppose que le système est fermé, c'est-à-dire que les seuls niveaux accessibles sont les niveaux 1, 2, et 3. Cela permet d'écrire une relation supplémentaire entre les probabilités P_1 , P_2 et P_3 .

Q 13. Écrire cette relation entre les probabilités P_1 , P_2 et P_3 .

En réalité la molécule n'est pas toujours photostable. La fluorescence peut s'arrêter brutalement et définitivement après que la molécule ait été excitée un trop grand nombre de fois. Le système réel n'est donc pas fermé.

Q 15. Déterminer la solution stationnaire P_{2s} pour la probabilité d'occupation du niveau 2 en fonction de k_e , k_r , k_{nr} , k_{isc} et $K = 1 + \frac{k_{isc}}{k_T}$ dans le cas d'un système fermé.

Le taux de fluorescence en régime stationnaire s'écrit $R_f = k_r P_{2s}$.

Q 16. En déduire qu'il existe un taux limite de fluorescence, noté R_f^∞ quand le taux d'excitation k_e devient très grand devant les taux de désexcitation k_r , k_{nr} et k_{isc} . Justifier qualitativement l'existence d'un taux limite.

Q 17. Expliquer pourquoi alors il n'est pas souhaitable d'exciter trop fortement l'échantillon.

Q 18. Calculer la valeur numérique de R_f^∞ dans le cas d'un « bon » chromophore où $K = 10$ avec une durée de vie radiative $\tau_r = 1/k_r = 5$ ns.

On définit le taux d'excitation à saturation k_e^s par $R_f(k_e^s) = \frac{1}{2}R_f^\infty$ et I_s l'intensité à saturation du faisceau laser, correspondant à ce taux d'excitation.

Q 19. Montrer que le taux d'excitation à saturation k_e^s s'écrit $k_e^s = \frac{1}{\phi_f} \frac{k_r}{K}$. Expliciter ϕ_f appelé *rendement quantique de fluorescence* en fonction k_r , k_{nr} et k_{isc} . Réexprimer alors R_f^∞ en fonction ϕ_f et k_e^s .

L'intensité laser à saturation I_s et le taux d'excitation à saturation k_e^s sont reliées par $k_e^s = \frac{I_s \varepsilon_{\max}}{h\nu N_A}$ où ν est la fréquence de l'onde laser, h la constante de Planck, N_A la constante d'Avogadro et ε_{\max} le coefficient d'extinction molaire.

Q 20. Quelle est la dimension de $\sigma = \varepsilon_{\max}/N_A$? Quel sens concret peut-on donner à la grandeur σ ? Pour les molécules considérées, on a $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$. Commenter l'ordre de grandeur de σ .

Q 21. Déterminer numériquement, en $\text{kW} \cdot \text{cm}^{-2}$ l'intensité à saturation I_s pour $\lambda = 532 \text{ nm}$ la longueur d'onde du laser utilisé, $\phi_f \approx 1$, $K = 10$, $\tau_r = 1/k_r = 5$ ns et $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$. Commenter sachant qu'un laser de type He-Ne tel que ceux utilisés en travaux pratiques émet, en ordre de grandeur, une puissance de 1 mW.

Données :

- Constante de Planck $h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante d'Avogadro $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Correction de l'exercice 2

Le corrigé est une compilation de réponses rédigées moi-même et du corrigé de Christelle LUINO, UPS, Centrale 2 PC 2021.

Q12. P_2 augmente lors de l'excitation et diminue par 532 Δ de l'excitation. $\rightarrow \Delta$ (nm) de l'excitation.

de l'excitation:
$$\frac{dP_2}{dt} = k_e P_1 - (k_n + k_{nr} + k_{isc}) P_2.$$

Les 3 équations différentielles ne sont pas indépendantes. Elles sont liées entre elles. En effet,

$$\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} + \frac{dP_3}{dt} = 0.$$

Q13. Le système est fermé: la probabilité de trouver une molécule sur les niveaux 1, 2 et 3 vaut 1:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Q15. En régime stationnaire, les probabilités d'occupation sont constantes donc

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = \frac{dP_3}{dt} = 0.$$

On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 0 = -k_e P_1 + (k_n + k_{nr}) P_2 + k_r P_3 & (1) \text{ On élimine } (P_1) \text{ à l'aide des équations 1 et 3.} \\ 0 = k_{isc} P_2 - k_r P_3 & (2) \quad k_e (1 - P_2 - P_3) = (k_n + k_{nr}) P_2 + k_r P_3 \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3 & (3) \text{ On élimine } P_3 \text{ à l'aide de (2).} \end{cases}$$

$$k_e \left(1 - \left(1 + \frac{k_{isc}}{k_r} \right) P_2 \right) = (k_n + k_{nr}) P_2 + k_{isc} P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{k_e}{k_e K + k_n + k_{nr} + k_{isc}}$$

Q16. Le taux de fluorescence s'écrit $R_f = k_n P_2$

$$R_f = \frac{k_n k_e}{k_e K + k_n + k_{nr} + k_{isc}}$$

Dans le cas où $k_e \gg k_n, k_{nr}$ et k_{isc} , $R_f^\infty = \frac{k_n}{K}$. Le niveau 2 se remplit très vite et se vide très lentement. Comme le nombre de molécules fluorescentes est constant, le niveau 2 atteint une population constante et maximale. P_2 atteint sa valeur limite P_{2s} . Le taux de désintégration fluorescente, proportionnel à P_{2s} , est limite aussi.

Q17. Exciter trop fortement l'échantillon augmente le bruit sans pour autant augmenter le signal: le rapport signal/bruit diminue.

Exciter trop fortement l'échantillon accroît l'instabilité des molécules fluorescentes: la photo stabilité diminue.

Q18. A.N. $K = 10$ et $k_x = \frac{1}{\tau_x}$ donc $R_f^\infty = 2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$

Q19. $R_f(k_e^s) = \frac{1}{2} R_f^\infty \Leftrightarrow \frac{k_r k_e}{k_e K + k_x + k_{nr} + k_{isc}} = \frac{k_r}{2K} \Leftrightarrow k_e^s = \frac{k_x + k_{nr} + k_{isc}}{K}$

En posant $\frac{k_r}{\Phi_f} = k_x + k_{nr} + k_{isc}$, $k_e^s = \frac{k_r}{\Phi_f \cdot K}$. On obtient $\Phi_f = \frac{k_r}{k_x + k_{nr} + k_{isc}}$

Ainsi R_f^∞ égal à $\frac{k_r}{K}$ devient $R_f^\infty = \Phi_f \cdot k_e^s$

Remarque : Le rendement quantique de fluorescence Φ_f désigne donc le rapport du taux de fluorescence sur le taux d'absorption à saturation (associé au coût énergétique d'illuminer l'échantillon par le laser incident).

20. D'après la définition de σ , on a $I_s \sigma = h\nu k_e^s$. Donc, comme $[k_e^s] = T^{-1}$:

$$[I_s] \times [\sigma] = [\text{puissance}] \quad \text{or} \quad [I_s] = [\text{puissance surfacique}]$$

Donc, σ est homogène à une surface.

Sens physique : k_e^s est le taux d'absorption. Donc, $h\nu k_e^s$ est la puissance lumineuse absorbée par le fluorophore. Ainsi, σ représente la section efficace d'absorption des photons incidents par le fluorophore.

A.N. : On passe en unités SI : $\varepsilon_{max} = 1 \times 10^4 \text{ mol}^{-1} \text{ m}$. Donc, $\sigma = 1.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2$. La taille typique d'une molécule est de 10^{-10} m . L'ordre de grandeur de σ est donc l'ordre de grandeur de la section droite présentée par la molécule fluorophore face au rayonnement laser incident : la molécule absorbe les photons qui lui "arrivent" dessus.

On peut donc poser $\sigma = \frac{\text{volume d'un fluorophore}}{1L}$

Q21. A.N. $I_s = k_e^s \frac{h\nu}{\sigma} = \frac{1}{\Phi_f} \times \frac{k_r}{K} \times \frac{h\nu}{\lambda} \times \frac{N_A}{\varepsilon_{max}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} \times 10} \times \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{532 \cdot 10^{-9}} \times \frac{6 \cdot 10^{23}}{1 \cdot 10^5}$

$I_s \approx 45 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2} = 4500 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$.

La section ouverte d'un laser vaut $S = \pi R^2$ avec $R \approx 1 \text{ mm}$

$I_{\text{laser}} = \frac{10^{-3}}{\pi (10^{-3})^2} = 320 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \ll I_s$.

Ainsi, il n'est pas possible de s'approcher de l'intensité de saturation avec un laser non collimaté : il faut traverser une lentille convergente pour augmenter l'intensité lumineuse.

Ex. 3 (Ecrit Centrale PC 2021) Excitation laser pour stimuler la fluorescence de molécules individuelles

Une molécule fluorescente peut être utilisée comme une sonde locale, à l'échelle nanométrique, de son environnement. Il est ainsi possible d'accéder à une information non moyennée spatialement. L'évolution temporelle du signal permet alors de suivre la dynamique de la molécule étudiée, aussi bien la dynamique interne que les interactions de la molécule avec son environnement. Dans la suite, on appelle fluorophore une molécule fluorescente individuelle.

La figure 3 présente des images de fluorescence obtenues après avoir illuminé des fluorophores via un laser passant à travers l'objectif d'un microscope. On détecte alors l'intensité lumineuse de fluorescence codée en niveaux de gris.

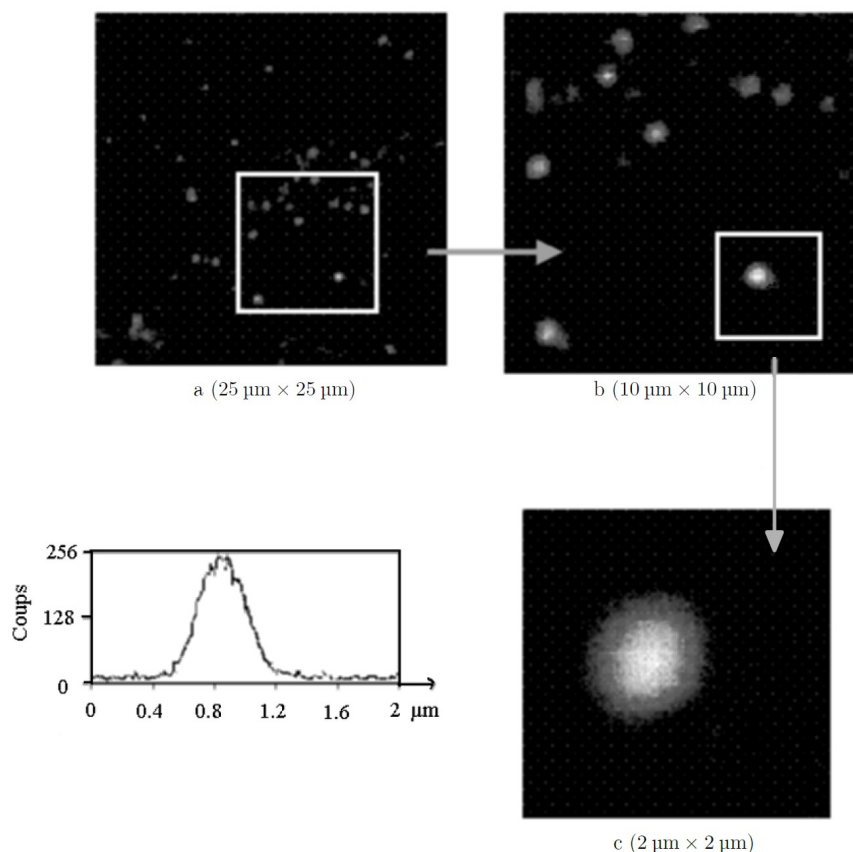


Figure 3 Images de fluorescence de molécules individuelles (256×256 pixels), zooms successifs sur une même zone de l'échantillon (images a, b et c) et profil du nombre de coups détectés sur une ligne de l'image c passant par le centre de la tache image

On donne la valeur de l'intensité à saturation du laser dans le cadre de l'expérience de fluorescence réalisée ici : $I_s = 45 \times 10^6 \text{ W m}^{-2}$.

Phénoménologiquement, pour des objectifs de grande ouverture numérique, dont le diaphragme d'entrée est légèrement sur-illuminé, une bonne description du faisceau laser d'axe Oz (origine O au point de focalisation) est donnée par une fonction gaussienne-gaussienne en fonction des coordonnées cylindriques r et z

$$I(r, z) = I_0 \exp\left(-2\frac{z^2}{\omega_z^2}\right) \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega_r^2}\right)$$

où $\omega_r = 0,5 \frac{\lambda}{\sin \theta}$ et $\omega_z = 0,8 \frac{\lambda}{1 - \cos \theta}$ sont des grandeurs dépendant de la longueur d'onde et de l'ouverture numérique $\text{ON} = \sin \theta$.

Q 22. En considérant la molécule fluorescente comme un émetteur ponctuel, évaluer l'ouverture numérique de l'objectif utilisé pour réaliser les images de la figure 3 avec la longueur d'onde laser $\lambda = 532 \text{ nm}$. Pourquoi est-il important d'utiliser un objectif d'ouverture numérique élevée ?

Q 23. Déterminer un ordre de grandeur de la puissance du faisceau laser incident pour obtenir un taux d'excitation à saturation.

Q 24. Déterminer un ordre de grandeur du volume excité en fonction de ω_r et ω_z . Calculer numériquement cet ordre de grandeur.

Correction de l'exercice 3

Q22 - la figure 3 permet de déterminer w_x . En effet, w_x est la demi-largeur du faisceau en $z=0$. Sur le graphique, on lit $w_x = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. On en déduit $ON = 0,5 \times \frac{\lambda}{w_x} = 0,66$. On retrouve la valeur de l'énoncé. Un ON élevé permet de recueillir plus de photons.

Q23. $P = I_s \times S$ où S est la surface du faisceau en $z=0$: $S = \pi w_x^2$.

A.N. $P = 45 \cdot 10^6 \times \pi (0,4 \cdot 10^{-6})^2 = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ W}$.

Q24 Le faisceau laser est limité selon x , limitation caractérisée par w_x , et selon z , limitation caractérisée par w_z . Au delà de ces distances, la puissance du faisceau est quasi-nulle. On en déduit que le volume excité vaut $\pi w_x^2 \times w_z$.

A.N. $w_x = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ et $w_z = 0,8 \frac{\lambda}{1 - \cos \theta} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

volume excité = $8,5 \cdot 10^{-19} \text{ m}^3$.

Plus ce volume est petit, plus on arrivera à sonder localement, en une région précise de l'espace, les fluorophores. Cette technique permet d'obtenir une image 3D des fluorophores !

Remarque : Néanmoins, plus le volume sondé est petit, moins on excite de fluorophores, et donc moins on capte de photons sur le détecteur... Il faut trouver un compromis expérimental.