Corrigé E3A PC 2022

Hélène Fontaine, François Ezanno

EXERCICE 1

1. *Formule des probabilités composées.*
Pour tous évènements $A_1, \dots, A_n$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3. Les valeurs prises par X sont les entiers naturels non nuls : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Remarque. La définition de X dans l'énoncé sous-entend que le nombre de sauts réussis est presque sûrement fini, ce qui à ce stade n'est pas évident, mais sera vérifié en question 8.

4. On a $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2}|S_1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5. L'évènement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si les deux premiers sauts ont été réussis, mais le troisième a été raté. Autrement dit : $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$.
Par conséquent d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\mathbb{P}(\overline{S_3}|S_1 \cap S_2)\\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6. De la même façon qu'en **5.**, on a $[X = n] = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}$.

7. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\dots\mathbb{P}(S_n|S_1 \cap \dots \cap S_{n-1})\mathbb{P}(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap \dots \cap S_n)\\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!}.\end{aligned}$$

8. On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{(car les deux séries convergent)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1.\end{aligned}$$

9. La variable aléatoire X est à valeurs positives, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)(n-1)!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1)(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

Or $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(n+1)(n-1)!}$ sont deux séries convergentes, donc $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n)$ est convergente, donc X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)!}.$$

Finalement d'après **2.** et **8.**, on a $\mathbb{E}(X) = e-1$.

EXERCICE 2

1.1. Fixons $n\in\mathbb{N}$. On a $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive), donc

$$|u_n| = \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

De plus pour $t\in[0;\pi/2]$, on a $\cos(t)\in[0;1]$ donc $\cos^{n+1}(t)\leq\cos^n(t)$.
Ainsi par croissance de l'intégrale, $|u_{n+1}|\leq|u_n|$.
Conclusion. $(|u_n|)$ est bien décroissante.

1.2. Pour $n\in\mathbb{N}$ on définit sur $]0;\pi/2]$ la fonction f_n par $f_n(t)=\cos^n(t)$.
On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- pour $t\in]0;\pi/2]$, $|\cos(t)|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)=0$.
  Ainsi (f_n) converge simplement sur $]0;\pi/2]$ vers la fonction $f : t\mapsto 0$;
- les fonctions f_n, pour $n\in\mathbb{N}$, et la fonction f, sont continues (par morceaux) sur $]0;\pi/2]$;
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in]0;\pi/2],\ |f_n(t)|\leq 1$, or $t\mapsto 1$ est intégrable sur $]0;\pi/2]$.

Conclusion. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n| = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0\ \mathrm{d}t = 0.$$

1.3. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^n|u_n|$, et d'après les deux questions précédentes, $(|u_n|)$ est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0.
Conclusion. D'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2.1. Pour $\theta\in\mathbb{R},\ \cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$, donc $\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$.
Appliquée à $\theta=t/2$, cette égalité donne : $\cos^2(t/2)=\frac{1+\cos(t)}{2}$.

2.2. En se rappelant qu'une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\cos^2(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est $x\mapsto\tan(x)$, on a :

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2\cos^2(t/2)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[2\tan(t/2)\right]_0^{\pi/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(0)=1.$$

2.3.1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par intégration par parties (sur des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$), on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+2}| &= \int_0^{\pi/2}\cos(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t\\ &= \Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le crochet est nul car $\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$, et avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$ on obtient donc

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos^n(t) - \cos^{n+2}(t))\mathrm{d}t \\ &= (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|) \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}, \end{aligned}$$

et finalement en isolant $|u_{n+2}|$ on obtient $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n|$.

2.3.2. Montrons par récurrence double, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : |u_n| \geq \tfrac{1}{n+1}.$$

- $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geq 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- $|u_1| = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = 1 \geq \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, alors

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n| \geq \frac{n+1}{n+2}.\frac{1}{n+1} \qquad \text{(par hyp. de réc.)}$$

  Donc $|u_{n+2}| \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}$.

D'où la conclusion voulue par récurrence.

2.3.3. Il s'agirait d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $]0;\pi/2]$, en espérant obtenir l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos^n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Malheureusement ce théorème ne s'applique pas. Posons $v_n : t \mapsto (-1)^n \cos^n(t)$. On a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |v_n| = |v_n| \geq \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente, donc par comparaison $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^{\pi/2} |v_n|$ diverge.

Conclusion. L'hypothèse ¡¡ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^{\pi/2} |v_n|$ converge¿¿ n'est pas vérifiée.

2.4. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- pour $t \in]0;\pi/2]$, $V_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\cos(t)}$ (série géométrique de raison $-\cos(t) \in]-1;1[$).
  Donc (V_n) converge simplement sur $]0;\pi/2]$ vers la fonction $V : t \mapsto \frac{1}{1+\cos(t)}$;
- les fonctions V_n et la fonction V sont continues (par morceaux) sur $[0;\pi/2]$;
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;\pi/2]$,

$$|V_n(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-\cos(t))^k\right| = \left|\frac{1-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\right| \underset{\text{I.T.}}{\leq} \frac{2}{1+\cos(t)}.$$

  Or $t \mapsto \frac{2}{1+\cos(t)}$ est continue sur le segment $]0;\pi/2]$, prolongeable par continuité en 0, donc intégrable.

Conclusion. D'après notre théorème et la question **2.2.**, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} V_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} V(t)\mathrm{d}t = 1.$$

EXERCICE 3

1. $F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

2. F et G sont des matrices symétriques réelles de E_n, donc F et G sont diagonalisables.
Donc f et g sont diagonalisables.

3.1. $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + \cdots + e_n, e_1)$. Donc la famille $(e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g)$.
De plus les deux vecteurs de cette famille ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.
Ainsi $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$.
Alors $\mathrm{rg}(g) = 2$.
Et $\forall i \in [\![3, n]\!]$, $e_2 - e_i \in \mathrm{Ker}(g)$. Donc la famille $(e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille échelonnée de vecteurs de $\mathrm{Ker}(g)$ donc une famille libre de $\mathrm{Ker}(g)$.
Et d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(g) = n - 2$. La famille $(e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n}$ est composée de $n - 2$ vecteurs.
Donc $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Comme la matrice g dans la base canonique qui est une base orthonormée est symétrique, donc g est un endomorphisme symétrique.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$ et $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe un vecteur z de E_n tel que $y = g(z)$. Notons $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique.
Alors $\langle x, y \rangle = \langle x, g(z) \rangle = \langle g(x), y \rangle$ car g est un endomorphisme symétrique.
Or $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Donc $\langle x, y \rangle = 0$.
Ainsi les espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont orthogonaux.
Or d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(g) + \dim \mathrm{Im}(g) = \dim E_n$.
Donc $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. 0 est une valeur propre de g et la dimension du sous-espace propre associé est $n-2$ c'est-à-dire la dimension de $\mathrm{Ker}(g)$.
Or g est diagonalisable. Donc g admet deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2.
Or $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(G) = 0$. Alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
Ainsi $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

3.4.1.(i) ◇ Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors $g(y) \in \mathrm{Im}(g)$. Donc $\mathrm{Im}(g)$ est stable par g.

◇ Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est stable par g.

3.4.1.(ii) Rappelons que $g(e_1) = \sum_{i=2}^{n} e_i$ et $g\left(\sum_{i=2}^{n} e_i\right) = (n-1)e_1$.

Donc $H = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4.1.(iii) Le polynôme caractéristique de h est $\chi_h(X) = X^2 - (n-1)$.
Donc $\mathbf{Sp}(h) = \{-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}\}$.
Et comme $-\sqrt{n-1} \neq \sqrt{n-1}$ $(n > 1)$, alors les sous-espaces propres de h sont de dimension 1.
Remarquons que $H - \sqrt{n-1} I_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & n-1 \\ 1 & -\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{Ker}(H - \sqrt{n-1} I_2)$.
De même $H + \sqrt{n-1} I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & n-1 \\ 1 & \sqrt{n-1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{Ker}(H +$

$\sqrt{n-1}I_2)$.
Ainsi $E_h(-\sqrt{n-1}) = \text{Vect}(\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i)$ et $E_h(\sqrt{n-1}) = \text{Vect}(-\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i)$

3.4.1.(iv) Les valeurs propres de h sont aussi des valeurs propres de g. Donc $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.4.2.(i) ◇ Soit λ une valeur propre de g et x un vecteur propre associé.
Alors $g(x) = \lambda x$.
Donc $g^2(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda^2 x$.
Or x est non nul, donc λ^2 est une valeur propre de g^2.
Donc $\{0, \lambda_1^2, \lambda_2\} \subset \mathbf{Sp}(g^2)$

◇ Et tout vecteur propre de λ pour g est aussi un vecteur propre de λ^2 pour g^2.
Donc $E_g(0) \subset E_{g^2}(0)$, $E_g(\lambda_1) \subset E_{g^2}(\lambda_1^2)$ et $E_g(\lambda_2) \subset E_{g^2}(\lambda_2^2)$.
Or g est diagonalisable. Donc $E_g(0) \oplus E_g(\lambda_1) \oplus E_g(\lambda_2) = E_n$.
Alors $E_{g^2}(0) + E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2) = E_n$. Donc $\mathbf{Sp}(g^2) \subset \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

Ainsi $\mathbf{Sp}\,(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

3.4.2.(ii) La matrice de g^2 dans la base $\mathscr{B}$ est $G^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.2.(iii) Comme $E_g(\lambda_1) \oplus E_g(\lambda_2) = E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2)$, donc $\dim\left(E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2)\right) = 2$.
En regardant la trace de g^2 indépendante de la base choisie : $2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

3.4.2.(iv) Rappelons que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. D'après la question précédente, $2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.
Donc $\lambda_1^2 + (-\lambda_1)^2 = 2(n-1)$ ou encore $\lambda_1^2 = n-1$. Ainsi $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.5. D'après la question ,

$$E_h\left(-\sqrt{n-1}\right) = \text{Vect}\left(\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i\right) \text{ et } E_h\left(\sqrt{n-1}\right) = \text{Vect}\left(-\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum_{i=2}^{n} e_i\right)$$

Or les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres $-\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n-1}$ sont de dimension 1 et contiennent ceux de h associés aux mêmes valeurs propres.
Donc $E_g\left(-\sqrt{n-1}\right) = \text{Vect}\left(\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i\right)$ et $E_g\left(\sqrt{n-1}\right) = \text{Vect}\left(-\sqrt{n-1}\ e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} e_i\right)$.
Rappelons qu'une base de $\ker(g)$ est $\mathscr{B}_1$.
Donc en posant $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$.

3.6. Id_{E_n} est diagonalisable dans toutes les bases de E_n. Donc la matrice de $f = g + \text{Id}_{E_n}$ est diagonale dans une base qui diagonalise g ou encore $F = G + I_n$.
Ainsi $P^{-1}FP$ est diagonale.

4. Posons $Y = P^{-1}X$. Alors par linéarité de $X \longmapsto P^{-1}X$, $Y' = P^{-1}X'$.
Donc l'équation différentielle, $\mathscr{S} : X'(t) = FX(t) + tU$ s'écrit $Y'(t) = P^{-1}FPY(t) + tP^{-1}U$
ou encore $Y'(t) = DY(t) + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, 1, \cdots, 1)$.

Alors en notant y_i les fonctions coordonnées de Y,

$$\mathscr{S} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \left(1+\sqrt{n-1}\right) y_1(t) + t \quad (\mathscr{S}_1) \\ y_2'(t) & = & \left(1-\sqrt{n-1}\right) y_2(t) \quad (\mathscr{S}_2) \\ \forall i \in [\![3,n]\!],\ y_i'(t) & = & y_i(t) \quad (\mathscr{S}_i) \end{array} \right.$$

Donc pour tout entier i de $[\![3,n]\!]$, y_i est une solution de $\mathscr{S}_i$ si et seulement s'il existe une constante c_i telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ y_i(t) = c_i e^t$.
Et y_2 est une solution de $\mathscr{S}_2$ si et seulement s'il existe une constante c_2 telle que $\forall t \in \mathbb{R}, y_2(t) = c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t}$.
Cherchons une solution particulière de $\mathscr{S}_1$ polynomiale de degré 1 de l'équation $y_1'(t) = (1+\sqrt{n-1})y_1(t) + t$, c'est-à-dire de la forme $at+b$.
Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ a = (1+\sqrt{n-1})(at+b) + t$. Donc $a = \frac{-1}{1+\sqrt{n-1}}$ et $b = \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}$.
Par ailleurs les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \longmapsto c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t}$.
Donc les solutions de $\mathscr{S}_1$ sont exactement les fonctions

$$t \longmapsto \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} \text{ où } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} \\ c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} \\ c_3 e^t \\ \vdots \\ c_n e^t \end{pmatrix}$.

Et les solutions de $\mathscr{S}$ sont les fonctions

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) - \sqrt{n-1}\ c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} - \sqrt{n-1}\ c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + \sum\limits_{i=3}^{n} c_i e^t \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_3 e^t \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_4 e^t \\ \vdots \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}((1+\sqrt{n-1})t+1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_n e^t \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

1.1. La fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Donc $\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = 1$.

Ainsi la fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$

1.2. La fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus $0 \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \leqslant \frac{1}{t^2}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. La fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Elle est prolongeable par continuité en 0, donc $\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ converge.

D'après la question précédente, $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4.
- Pour tout réel x positif, la fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout réel t strictement positif, la fonction $x \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Et $\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$.

  Or d'après la question précédente, $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.1.1. Soit t un réel positif.
La fonction $\varphi : u \longmapsto \sin(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, t]$ et $\forall u \in [0, t],\ |\varphi'(u)| \leqslant 1$.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant |t - 0|$.
Ainsi $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Soit t un réel strictement positif.
D'après la question précédente et la croissance de la fonction carrée, $\sin^2(t) \leqslant t^2$.
Donc $0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} \leqslant t$ car $(t > 0)$.
Par décroissance de la fonction $u \longmapsto e^{-u}$, comme $at \leqslant xt$, $e^{-xt} \leqslant e^{-at}$.
Ainsi par produit des inégalités positives, $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leqslant te^{-at}$.
Remarque : *On aurait pu aussi obtenir l'inégalité suivante* $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ *plus agréable à manipuler ensuite*

2.1.3. Soit t un réel strictement positif.
Rappelons que $\sin^2(t) \leqslant 1$ et que $e^{-xt} \leqslant e^{-at}$.
Ainsi par produit des inégalités positives, $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t) e^{-xt} \leqslant e^{-at}$.

2.2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (1.4.).
- Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto -\frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt}$ et $t \longmapsto \sin^2(t) e^{-xt}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.
- $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[,\ \left|-\frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt}\right| \leqslant te^{-at}$.

  Et $t \longmapsto te^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x. Comme $te^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \longmapsto te^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[,\ \left|\sin^2(t) e^{-xt}\right| \leqslant e^{-at}$.

  Et $t \longmapsto e^{-at}$ est continue intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de x.

Conclusion. Par théorème, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-xt} \mathrm{d}t$$

3.1. Soit θ un réel. Soit x et t des réels strictement positifs.
Remarquons que $\theta t \in \mathbb{R}$. Donc $|e^{i\theta t}| = 1$.
Or $|e^{(i\theta - x)t} = |e^{i\theta t} e^{-xt}| = |e^{i\theta t}|\ |e^{-xt}| = e^{-xt}$ car $e^{-xt} \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ |e^{(i\theta - x)t}| = e^{-xt}$.

3.2. Soit θ un réel. Soit x un réel strictement positif.
Comme $x > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-xt} = 0$.
Donc d'après la question précédente, $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} |e^{(i\theta - x)t}| = 0$.

3.3. Soit x un réel strictement positif.
Remarquons que $\forall t \in]0, +\infty[$, $\sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2it} + e^{-2it} - 2\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f''(x) &= -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(e^{(2i-x)t} + e^{(-2i-x)t} - 2e^{-xt}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{(2i-x)t}}{2i - x} + \frac{e^{(-2i-x)t}}{-2i - x} + 2\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2i - x} + \frac{-1}{-2i - x} + 2\frac{-1}{x}\right) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\frac{-2i - x + 2i - x}{(2i - x)(-2i - x)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

4.1. Soit x un réel strictement positif.
$\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.
Donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Ainsi par encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4.2. Soit x un réel strictement positif.
$\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.
Donc $0 \leqslant -f'(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Ainsi par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

4.3. G est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et $\forall t \in \mathbb{R},\ G'(t) = \ln(t^2 + 4) + \frac{2t^2}{t^2+4} - 2 + 2\frac{1}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \ln(t^2 + 4) + 2\frac{t^2+4}{t^2+4} - 2$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ G'(t) = \ln(t^2 + 4)$.

4.4. D'après la question 3.3., $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.
En intégrant, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2 + 4) + C$.
Or d'après la question 4.2., $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Et $f'(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) + C$. Donc $C = 0$.
En intégrant, il existe une constante c telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) - \frac{1}{4}G(x) + c$.
Donc $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) - 2x - x\ln(x^2 + 4) + 2x - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \\
=& \frac{1}{4}\left(x\ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 4}\right) - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \\
=& \frac{1}{4}\left(x\ln\left(1 - \frac{4}{x^2 + 4}\right) - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c
\end{aligned}$$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ car $x\ln\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{4x}{x^2+4}$.
Or d'après la question 4.1., $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc $c = \frac{\pi}{2}$.
Conclusion. $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) - x\ln(x^2+4) - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}$.

5. On a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.
Et par continuité de f en 0 (montrée en 1.4.),

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x\to0} f(x) \\ &= \lim_{x\to0} \frac{1}{4}\left(x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \qquad \text{(croissance comparée)}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.