Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 1.

Exercice 1. 1. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Comparer les réels $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{1}{2}(x+y)$.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $w_n = \dfrac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}$.
Prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{k}{n^2})$.

Exercice 3. Calculer la limite des suites de terme général : $a_n = n(\sqrt[n]{3}-1)$, $b_n = (\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+7^{\frac{1}{n}}}{2})^n$, $c_n = \dfrac{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{n}$, $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$, $e_n = n^2(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}})$, $f_n = \frac{n^2+2^n}{e^n+\ln n}$.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de : $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$, $b_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, $c_n = n^{\frac{1}{n}}-1$, $d_n = \sqrt{n}\,(\cos(\frac{2}{\sqrt{n}})-1)(\ln(1+\frac{2}{n})-\frac{2}{n})$, $e_n = (\ln(1+e^{-n^2}))^{\frac{1}{n}}$, $f_n = \arctan(1+\frac{3}{n})-\frac{\pi}{4}$, $g_n = e^{n\cos(\frac{1}{n})}$, $h_n = \ln(\frac{n^3+\ln n}{3n-\sqrt{n}})$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} x^a\,dx \leq k^a \leq \int_{k}^{k+1} x^a\,dx$. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{a+1}}{a+1}$.

Exercice 6. `[Le nombre e]` On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n.n!}$.
1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $0 < q!(\ell - u_q) < \dfrac{1}{q}$. En déduire que ℓ est irrationnel.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral que : $e = u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,e^t\,dt$. En déduire $\ell = e$.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$ et $s_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$.
1. Prouver que s_n est un entier naturel pair.
2. En déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 8. `[Constante d'Euler]` **1.** Justifier que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$.
Prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Remarque : la limite de la suite u, notée γ, est la «*constante d'Euler*». En posant $\varepsilon_n = u_n - \gamma$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0.$$

3. *Applications.* **3. a.** Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

3. b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$. Retrouver cette valeur en utilisant le cours sur les sommes de Riemann.

3. c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{3n}\dfrac{1}{k}$.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $(u_0,v_0) \in]0,+\infty[^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}\ ,\ v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on déterminera.

Exercice 10. Soient $a > 0$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{ak+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
1. Prouver que la suite (S_n) converge. *Considérer les deux suites* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}).
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. *On transformera* S_n *en remarquant que* $\dfrac{1}{ak+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{ak}dx.$

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{5n}) convergent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.
1. En considérant la suite (u_{10n}), montrer que $\ell_1 = \ell_3$.
2. Prouver que $\ell_2 = \ell_3$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E_n) : $x^n + 9x^2 - 4 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.
1. Justifier que (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée x_n, et que $x_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.