Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 2.

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour tout $f \in E$, $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
Prouver que N est une norme sur E.

Exercice 2. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $N(P) = (\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)^2)^{\frac{1}{2}}$. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. 1. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On note, pour $f \in E$, $N(f) = \max_{x\in[0,1]} |f''(x) + 2f'(x) + f(x)|$. Prouver que N est une norme sur E.

Exercice 4. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 5. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour tout $f \in E$, on note $N_g(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)g(x)|$.
Prouver que N_g est une norme sur E si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle ouvert de $[0,1]$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note : $N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\, dt$ et on rappelle que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.
1. Vérifier que N est une norme sur E et que, pour toute $f \in E$, $N(f) \leq \|f\|_1$.
2. Montrer que N et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.
Indication : Considérer la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(t) = n(1-nt)$ si $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 0$ sinon.

Exercice 7. Si $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$. On rappelle que $\| \, \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose : $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \|f''\|_\infty$.
1. Vérifier que N' et N'' sont des normes sur E.
2. Montrer que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N'(f) \leq N''(f)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n \in E$ définie par : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \sin(\pi n x)$.
3. a. Calculer $\|f_n\|_\infty$, $N'(f_n)$ et $N''(f_n)$.
3. b. En déduire que les normes $\| \, \|_\infty$, N' et N'' sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose : $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_2(P) = \max_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
1. Justifier que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Montrer que si une suite (Q_n) converge vers Q dans l'espace vectoriel normé (E, N_1), alors elle converge vers Q dans l'espace vectoriel normé (E, N_2).
3. Soit $P_n(X) = (X-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $N_1(P_n)$ et $N_2(P_n)$. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E ?
4. Déterminer une suite de E qui converge vers le polynôme nul pour la norme N_2 mais pas pour la norme N_1.

Exercice 9. Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{p\to+\infty} A^p = L$ si et seulement si $L^2 = L$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $L = 0$.

Exercice 11. Soient E un evn et N_1 et N_2 deux normes sur E. Soient $a \in E$ et $r > 0$ telles que les deux boules fermées de centre a et de rayon r pour N_1 et pour N_2 soient égales. Prouver que $N_1 = N_2$.
Indication : soit $x \in E$, $x \neq a$. Considérer $a + r\dfrac{x-a}{N_1(x-a)}$.

Exercice 12. Montrer de deux façons différentes que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 > x - 3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) > 1\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie.
1. Montrer que $A = \{f \in E / f(0) = 1\}$ est une partie fermée de E.
2. Montrer que $B = \{f \in E / f \text{ est injective}\}$ n'est pas une partie fermée de E.
Indication : considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n}x$.

Exercice 15. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E / f(0) > 0\}$.
1. Montrer que A est un ouvert de l'evn $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - e^{-nx}$; et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Calculer $\|g_n - g\|_1$.
En déduire que A n'est pas un ouvert de l'evn $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 16. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il une partie fermée ? une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Même question pour $GL_n(\mathbb{R})$ et pour l'ensemble $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T M = I_n\}$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17. Soient E un espace vectoriel et A une partie convexe de E.
1. Soit $(u_1, u_2, u_3) \in A^3$. Soit $(t_1, t_2, t_3) \in (\mathbb{R}^+)^3$ tel que $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Prouver que $t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 \in A$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in A^n$. Soit $(t_1, \cdots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Prouver que $t_1 u_1 + \cdots + t_n u_n \in A$.

Exercice 18. Soient E un evn et A une partie convexe de E. Montrer que $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont des parties convexes de E.