Exercice 1. Calculer la limite des suites de terme général : $u_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ et $v_n = (2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n)^n$.

Indications. Soit $r \in]\frac{1}{2}, 1[$. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq u_n \leq r^n$ et conclure.
De même, soit $r \in]\frac{3}{4}, 1[$. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $|v_n| \leq r^n$ et conclure.
Autre méthode. Commencer par écrire u_n et v_n sous forme exponentielle.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$ avec $\ell \in [0, 1[$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Indication. Comparer u_n à une suite géométrique (pour n assez grand).

Exercice 3. `[Constante d'Euler]` **1.** Justifier que $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Remarque : la limite de la suite u, notée γ, est la «*constante d'Euler*». En posant $\varepsilon_n = u_n - \gamma$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

3. *Applications.* **3. a.** Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Retrouver cette valeur en utilisant le cours sur les sommes de Riemann.

3. c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$.

Solution. **1.** Soit $x > 0$. On a : $\ln(x+1) - \ln(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$. Or pour tout $t \in [x, x+1]$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ donc par propriété de l'intégrale :

$$\int_x^{x+1} \frac{1}{x+1}\,dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{x}\,dt,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
Autre méthode : étudier les variations sur $]0, +\infty[$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x} - (\ln(x+1) - \ln(x))$ et $x \mapsto (\ln(x+1) - \ln(x)) - \frac{1}{x+1}$ pour montrer qu'elles sont positives mais c'est plus long !

2. On peut déjà remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n < u_n$. Vérifions que ces deux suites sont adjacentes :
i) La suite u est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$ d'après 1. avec $x = n$.
ii) La suite v est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$ d'après 1. avec $x = n+1$.
iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(1) = 0$.
Donc par propriété des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers une même limite réelle notée ici γ.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. a. En utilisant l'égalité de la remarque, on a, pour tout $n \geq 2$, $\frac{H_n}{\ln n} = 1 + \frac{\gamma}{\ln n} + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\ln n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\gamma}{\ln n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\ln n} = 0$. En d'autres termes, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
3. b. Réutilisons l'égalité de la remarque :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n = (\gamma + \ln(2n) + \varepsilon_{2n}) - (\gamma + \ln(n) + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{2n} = 0$.
Autre méthode utilisant la limite d'une « somme de Riemann». Rappelons que si f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

On utilise ce résultat avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ (continue sur $[0, 1]$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

3. c. On procède comme en **3. b.** : $\sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} = H_{3n} - H_n = (\gamma + \ln(3n) + \varepsilon_{3n}) - (\gamma + \ln(n) + \varepsilon_n) = \ln 3 + \varepsilon_{3n} - \varepsilon_n$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} = \ln 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_{3n} = 0$.

Exercice 4. Soient $a > 0$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que la suite (S_n) converge. *Considérer les deux suites* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}).

2. En utilisant l'égalité $\frac{1}{ak+1} = \int_0^1 x^{ak}\, dx$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx$.

3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$.

Solution. **1.** Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = S_{2n}$ et $y_n = S_{2n+1}$.

Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < x_n$ car $x_n - y_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)a+1} = \frac{1}{(2n+1)a+1} > 0$ et :

a) La suite $(S_{2n}) = (x_n)$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)a+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)a+1} = \frac{1}{(2n+2)a+1} - \frac{1}{(2n+1)a+1} = -\frac{a}{((2n+2)a+1)((2n+1)a+1)} < 0$$

b) De même, la suite $(S_{2n+1}) = (y_n)$ est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$y_{n+1} - y_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)a+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)a+1} = \frac{1}{(2n+2)a+1} - \frac{1}{(2n+3)a+1} = \frac{a}{((2n+2)a+1)((2n+3)a+1)} > 0$$

c) $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)a+1} = 0$.

Donc les les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers un même réel S, et par un résultat classique du cours, la suite (S_n) converge vers S.

2. Rappelons que pour tout $t \neq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ $(*)$.

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{ak}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x^a)^k\, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^a)^k\, dx.$$

En utilisant $(*)$ avec $t = -x^a \neq 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{1-(-x^a)^{n+1}}{1-(-x^a)}\, dx = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{an+a}}{1+x^a}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx.$$

3. Remarquons que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{x^{an+a}}{1+x^a} \leq x^{an+a}$. D'après le cours sur l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx \leq \int_0^1 x^{an+a}\, dx = \frac{1}{an+a+1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{an+a+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx = 0$.

Comme $|(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx| = \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\, dx = 0$.
En passant à la limite dans l'égalité établie en **2.**, on obtient que, pour tout $a > 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ak+1} := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}.$$

En particulier, pour $a = 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$$

et, pour $a = 2$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire.

Solution. Comme $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}$.

Donc pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} = u_n$ car $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$ et 0 est le seul entier naturel dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$!
La suite (u_n) est donc stationnaire car $\forall n \geq N$, $u_n = u_N$ (et sa limite ℓ est en fait égale à u_N).

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution. Commençons par deux rappels :

(R_1) *: toute suite extraite d'une suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ converge vers ℓ.*

(R_2) *: Soient (x_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ.*

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_{2n}$, $b_n = u_{2n+1}$, $c_n = u_{n^2}$ et ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les limites respectives de ces trois suites.
Considérons les deux suites $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{(2n)^2}$ et $w_n = u_{(2n+1)^2}$.

La suite v est extraite de la suite a car $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{4n^2} = a_{2n^2}$ et l'application $n \mapsto 2n^2$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite v est aussi extraite de la suite c car $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = c_{2n}$ et l'application $n \mapsto 2n$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Donc, par (R_1) et unicité de la limite d'une suite convergente, $\ell_1 = \ell_3$.

La suite w est extraite de la suite b car $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{4n^2+4n+1} = b_{2n^2+2n}$ et l'application $n \mapsto 2n^2 + 2n$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite w est aussi extraite de la suite c car $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = c_{2n+1}$, l'application $n \mapsto 2n+1$ étant une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante. Donc, par (R_1) et unicité de la limite d'une suite convergente, $\ell_2 = \ell_3$.
Notons alors $\ell = \ell_1 = \ell_2 = \ell_3$. Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, (R_2) permet de conclure que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 7. *Une généralisation du théorème de Cesàro. Applications.*

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty.$$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

1. *Etude de la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

1. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vérifier que $\forall n > N$, $|v_n - \ell| \leq \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

1. b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

1. c. *Application.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et déduire de 1. que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \frac{\ell}{2}$.

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ et $B_n = b_1 + \cdots + b_n$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$. Déduire de 1. que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

3. *Deux applications de la question précédente.*

3. a. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\ln(n+1) - \ln(n)$, et déduire de 2. que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. b. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, et déduire de 2. un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$.

Solution.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $v_n - \ell = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} - \ell = \dfrac{\alpha_1(u_1 - \ell) + \cdots + \alpha_n(u_n - \ell)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.
En utilisant l'inégalité triangulaire et la stricte positivité de la suite (α_n), on obtient que pour tout $n > N$:

$$\begin{array}{rcl} |v_n - \ell| & \leq & \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell| + \alpha_{N+1}|u_{N+1} - \ell| + \cdots + \alpha_n|u_n - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \\ & \leq & \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} \text{ car } |u_{N+1} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \cdots, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq & \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2} \ (*) \end{array}$$

car, par stricte positivité de la suite (α_n), $0 < \alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_N < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ donc $0 < \dfrac{\alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} < 1$.

1. b. Notons C la *constante* $\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{C}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = 0$.
Donc il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N'$, $\dfrac{C}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
L'inégalité $(*)$ obtenue en 1. a. implique alors que, pour tout $n > N'' = \max(N, N')$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N'' \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > N''$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. On reconnait la définition formalisée de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Remarque : Ce résultat s'applique avec $\alpha_n = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *car* $\alpha_n > 0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}_{=n} = +\infty$.

Ce cas particulier nous redonne le théorème de Cesàro usuel : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \ell$.

1. c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{1 + \cdots + n}$ et $w_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$.
On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut utiliser le résultat obtenu précédemment avec $\alpha_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, car $\alpha_n > 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty,$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.
Comme $w_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} v_n$, on a finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{1}{2}\ell$.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $\alpha_n = b_n > 0$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty.$$

Comme $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = a_1 + \cdots + a_n = A_n$, on a donc directement, d'après 1. b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$, c'est-à-dire

$$A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} B_n.$$

3. a. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et $b_n = \frac{1}{n}$. Ces deux suites satisfont aux hypothèses de la question 2. En effet : $a_n > 0$ (car ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$), $b_n > 0$, $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$ car $a_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\ln(1 + x) = x + o_0(x)$, et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ (série de Riemann divergente). Comme, par telescopage,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1),$$

d'après 2. : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n+1)$. Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire que $\ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
On retrouve ainsi l'équivalent classique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. b. Même démarche qu'en 3. a. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$. Ces deux suites satisfont aux hypothèses de la question 2. En effet : $a_n > 0$ (car $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), $b_n > 0$, $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$ car

$$a_n = \sqrt[3]{n}((1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$$

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $(1 + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + o_0(x)$, et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ (série de Riemann divergente vers $+\infty$ car d'exposant $\frac{2}{3} \leq 1$). Comme, par telescopage, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = \sqrt[3]{n+1} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'après 2. : $B_n = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 3\sqrt[3]{n}$.