Exercice 1. Déterminer une CNS sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que $N : (x,y) \mapsto \max(|ax+by|, |cx+dy|)$ soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Indications : Rappelons la définition de la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$: pour tout $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$.
En posant $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc : $N(x,y) = \|f(x,y)\|_\infty$.
Commençons par quelques rappels d'algèbre linéaire. On vérifie sans difficultés que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: plus précisement, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, on a : f injective ssi f bijective ssi A inversible ssi $\det(A) = ad-bc \neq 0$. Et comme f injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, on a donc : $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\} \Leftrightarrow ad-bc \neq 0$.

Autrement dit le système linéaire homogène $\left\{ \begin{array}{lcl} ax+by & = & 0 \\ cx+dy & = & 0 \end{array} \right.$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, admet pour seule solution $(0,0)$ ssi $ad-bc \neq 0$.
Montrer alors que la CNS cherchée est $ad-bc \neq 0$.

Exercice 2. `[Normes sur` $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$`]`**.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note, pour tout $M=(m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{ij}| \ \text{ et } \ \|M\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

• On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $C = AB = (c_{ij})$.
1. Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$. Exprimer le coefficient c_{ij} de C en fonction des coefficients de A et B.

Vérifier que $|c_{ij}| \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$ et que $c_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n b_{kj}^2$.
2. En déduire que $\|AB\|_\infty \leq n\,\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ et que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.
3. Soit $\|\ \|$ une norme (quelconque) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver l'existence d'une constante $C>0$ telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leq C\|A\|\,\|B\|.$$

Solution : **1.** Par définition du produit matriciel, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Donc

$$|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|a_{ik}|}_{\leq \|A\|_\infty} \underbrace{|b_{kj}|}_{\leq \|B\|_\infty} \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty\|B\|_\infty \ (= n\|A\|_\infty\|B\|_\infty).$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n,\ |\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^n x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^n y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant cette inégalité (au carré) avec $x_k = a_{ik}$ et $y_k = b_{kj}$, on obtient directement que

$$c_{ij}^2 = \Big(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n b_{kj}^2.$$

2. Soit $(p,q) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $|c_{pq}| = \|C\|_\infty$. D'après **1.**,

$$\|AB\|_\infty = \|C\|_\infty = |c_{pq}| \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$$

et

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2}_{=\|A\|_2^2} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n b_{kj}^2}_{=\|B\|_2^2}.$$

D'où $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.
3. *Indication :* Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_2$ sont équivalentes $\cdots$

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ N(AB) = N(BA)\,(*).$$

Solution : Rappel. Si $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice de ligne i et d'indice de colonne j, égal à 1. On rappelle que si $(i,j,k,l) \in \{1,\ldots,n\}^4$, $E_{ij}E_{kl} = O_n$ si $j \neq k$ et $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$ si $j=k$.
Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence d'une telle norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$ tel que $i \neq j$.
D'après $(*)$:

$$N(E_{ij}) = N(E_{ij}E_{jj}) = N(E_{jj}E_{ij}) = N(O_n) = 0$$

ce qui est impossible car $N(E_{ij}) > 0$ puisque E_{ij} n'est pas la matrice nulle.
Rappel : le vecteur nul d'un evn est le seul vecteur dont la norme est égale à 0.

Exercice 4. `[Exercice 10-TD2]`**.** Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $L = 0$.

Indications : Rappelons tout d'abord que $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, ${}^t\,UV = {}^tV\,{}^tU$. D'où $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ${}^tM^k = ({}^tM)^k$.
Sachant que $\lim\limits_{p\to+\infty} {}^t\,A^p = {}^tL$, on obtient $L = -L$ en considérant les suites $({}^t\,A^{2p})$ et $({}^t\,A^{2p+1})$. D'où $2L = 0$ et finalement $L = 0$.

Exercice 5. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, A_p est inversible, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p^{-1} = B$.
La matrice A est-elle inversible et si oui, a-t-on $A^{-1} = B$?

Indications : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_pA_p^{-1} = A_p^{-1}A_p = I_n$. Faire tendre p vers $+\infty$.

Exercice 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^2$ convergentes vers U et V respectivement, et telles que pour tout entier n, la famille (u_n, v_n) est liée. Prouver que la famille (U,V) est liée.

Indications : Posons $u_n = (a_n, b_n)$, $v_n = (c_n, d_n)$, $U = (a,b)$, $V = (c,d)$. Considérer $a_nd_n - b_nc_n$ (i.e. le déterminant de (u_n, v_n) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

Exercice 7. `[Exercice 17-TD2]`**.** Soient E un espace vectoriel et A une partie convexe de E.
Soit $(u_1,u_2,u_3) \in A^3$. Soit $(t_1,t_2,t_3) \in (\mathbb{R}^+)^3$ tel que $t_1+t_2+t_3 = 1$. Prouver que $t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3 \in A$.

Solution : Remarquons tout d'abord que t_1, t_2 et t_3 sont dans $[0,1]$. Commençons par deux cas particuliers :
Si $t_3 = 0$, $t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3 = t_1u_1+t_2u_2 = (1-t_2)u_1+t_2u_2 \in A$, par définition de la convexité de A.
Si $t_3 = 1$, $t_1 = t_2 = 0$ et évidemment $t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3 = u_3 \in A$.
Supposons maintenant $t_3 \in]0,1[$. On a donc $t_2+t_3 > 0$. Considérons $u_4 = \frac{t_2}{t_2+t_3}u_2 + \frac{t_3}{t_2+t_3}u_3$. Comme A est convexe, $u_4 \in A$ (si $t = \frac{t_3}{t_2+t_3} \in]0,1[$, $1-t = \frac{t_2}{t_2+t_3}$). Et finalement, $t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3 = t_1u_1+(t_2+t_3)u_4 = t_1u_1+(1-t_1)u_4 \in A$ car A est convexe.
Exemple. Si A est convexe, pour tout $(u_1,u_2,u_3) \in A^3$, $\frac{1}{8}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{5}{8}u_3 \in A$.

Exercice 8. `[Exercice 18-TD2]`**.** Soient E un espace vectoriel normé et A une partie convexe de E. Montrer que $\overline{A}$ est une partie convexe de E.

Solution : *Rappels.* 1) L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est, par définition, l'ensemble des points adhérents à A.
2) `[Caractérisation séquentielle d'un point adhérent]`
Soit $u \in E$. u est adhérent à A *si et seulement si* u est la limite d'une suite d'éléments de A.
Prouver que $\overline{A}$ est une partie convexe de E, c'est prouver que $\forall (u,v) \in \overline{A}^2$, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)u+tv \in \overline{A}$.
Considérons donc $(u,v) \in \overline{A}^2$ et $t \in [0,1]$. Comme $u \in \overline{A}$, par la caractérisation séquentielle d'un point adhérent, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = u$. De même, il existe une suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a'_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a'_n = v$. Posons $a''_n = (1-t)a_n + ta'_n$, $n \in \mathbb{N}$. Comme A est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a''_n \in A$. On déduit de la caractérisation séquentielle d'un point adhérent que $(1-t)u+tv \in \overline{A}$ car $(1-t)u+tv$ est la limite de la suite (a''_n). En effet :

$$(1-t)u+tv = (1-t)\lim_{n\to+\infty} a_n + t\lim_{n\to+\infty} a'_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{(1-t)a_n + ta'_n}_{=a''_n}.$$

Donc $\overline{A}$ est bien une partie convexe de E.