Espaces vectoriels normés.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|.|$ la valeur absolue ou le module.

1 Normes

1.1 Définition d'une norme

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

a) $\forall u \in E$, $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ où 0_E est le vecteur nul de E (séparation),
b) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$ (homogénéité),
c) $\forall (u, v) \in E^2$, $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire ou de Minkowski).

Un *espace vectoriel normé* (evn en abrégé) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme, c'est-à-dire un couple (E, N) où N est une norme sur E. Remarquons que si F est un sous-espace vectoriel de E et N une norme sur E, la restriction N_F de l'application N à F est une norme sur F et (F, N_F) est donc un evn.

On connait toutes les normes sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1) et sur $\mathbb{C}$ (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 1) :

Proposition 1. *N est une norme sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $N(x) = C|x|$ (resp. $\forall z \in \mathbb{C}$, $N(z) = C|z|$).*

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x = x \cdot 1$ et N est homogène, $N(x) = |x|N(1)$ (en considérant x comme scalaire et 1 comme vecteur). Donc $N(x) = C|x|$ en notant C la constante $N(1)$. Réciproquement, les propriétés de la valeur absolue permettent de justifier qu'une telle application est bien une norme sur $\mathbb{R}$. Le cas complexe est analogue. $\square$

Remarque 1. *$\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est implicitement muni de la norme valeur absolue (resp. module).*

Remarque 2. *Soit (E, N) un evn. L'homogénéité de N implique : $N(0_E) = 0$ (considérer $\lambda = 0$ dans Définition 1b)) et pour tout $u \in E$, $N(-u) = N(u)$ (considérer $\lambda = -1$).*

On note en général $\|\cdot\|$ une norme sur E.

1.2 Propriétés élémentaires

Proposition 2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On a : 1) $\forall (u, v) \in E^2$, $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$,*
2) $\forall (u, v) \in E^2$, $\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leq \|u - v\|$.

Démonstration. La preuve utilise l'inégalité triangulaire et le fait qu'un vecteur et son opposé ont la même norme.
1) $\|u - v\| = \|u + (-v)\| \leq \|u\| + \|-v\|$ d'où $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$ car $\|-v\| = \|v\|$.
2) On a $\|u\| = \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|$ d'où $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$. De même, $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\| = \|u - v\|$. Donc $\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| = \max(\|u\| - \|v\|, \|v\| - \|u\|) \leq \|u - v\|$. $\square$

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Prouver que $\|u\| + \|v\| \leq \|u + v\| + \|u - v\|$. *Indication : introduire $s = u + v$ et $d = u - v$.*

1.3 Distance

Définition 2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\forall (u, v) \in E^2,\ d(u, v) = \|u - v\|.$$

Proposition 3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. La distance d associée à $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :*
a) $\forall (u, v) \in E^2$, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (séparation),
b) $\forall (u, v) \in E^2$, $d(u, v) = d(v, u)$ (symétrie),
c) $\forall (u, v, w) \in E^3$, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. c) $d(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$. $\square$

1.4 Norme associée à un produit scalaire

Commençons par rappeler la définition d'un produit scalaire (p.s) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$-ev) E .

1.4.1 Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev

Définition 3. *Une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si :*

a) $\forall (u,v) \in E^2$, $\phi(u,v) = \phi(v,u)$ (on dit que ϕ est "symétrique"),
b) $\forall (u,u',v) \in E^3$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\phi(au+u',v) = a\phi(u,v) + \phi(u',v)$ (on dit que ϕ est "linéaire par rapport à la première variable"),
c) $\forall u \in E$, $\phi(u,u) \geq 0$ et $\phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (on dit ϕ est "définie-positive").

Il résulte de a) et b) que pour tout $(u,v,v') \in E^3$ et $a \in \mathbb{R}$, on a aussi :

$$b)' \ \phi(u, av+v') = \phi(av+v', u) = a\phi(v,u) + \phi(v',u) = a\phi(u,v) + \phi(u,v').$$

On dit que ϕ est "linéaire par rapport à la deuxième variable" et finalement que ϕ est "bilinéaire". En utilisant ici le mot "forme " à la place d'application, un p.s est donc en résumé une *forme bilinéaire symétrique définie-positive* (fbsdp). On note en général $\langle \ , \ \rangle$, $(\, | \,)$ ou plus simplement $\cdot$ un produit scalaire. Un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien réel* et plus simplement *espace euclidien* si E est de dimension finie.

1.4.2 Deux exemples classiques d'espace euclidien et un exemple d'espace préhilbertien.

1. On vérifie facilement que l'on définit un p.s sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Ce produit scalaire est nommé produit scalaire usuel (ou canonique) de $\mathbb{R}^n$. Quand il est question de "l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$", sans plus de précision sur le p.s, on sous-entend en fait que le p.s considéré sur $\mathbb{R}^n$ est ce p.s usuel.
2. On vérifie de même que l'on définit un p.s sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nommé aussi produit scalaire usuel (ou canonique), par :

$$\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \forall B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

"L'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$" est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de ce p.s usuel. Il peut être utile d'observer que l'on a

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \ \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^tA \cdot B).$$

Cet exemple est en fait du même type que le précédent si l'on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$.
3. Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On définit un p.s, nommé également produit scalaire usuel (ou canonique) sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})^2, \ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment permettent d'obtenir sans difficultés que $\langle \ , \ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et positive (car l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est positive). Il nous reste à montrer que $\langle \ , \ \rangle$ est "définie" : soit $f \in E$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$, c'est-à-dire telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 \, dx = 0$. Comme $x \mapsto f^2(x)$ est une fonction *continue et positive* sur $[a,b]$, on déduit du lemme 1 ci-dessous que $\forall x \in [a,b]$, $f(x)^2 = 0$ et donc que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$, autrement dit f est la fonction nulle sur $[a,b]$ (qui est bien le "vecteur nul" de E).
Le résultat suivant d'intégration que nous venons d'utiliser ci-dessus (avec $g = f^2$) est à connaître car d'usage fréquent :

Lemme 1. *Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ telle que $\displaystyle\int_a^b g(x) \, dx = 0$. Alors $\forall x \in [a,b], g(x) = 0$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si la fonction positive g n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) > 0$. Comme g est continue en x_0, il existe plus précisement un segment $[u,v]$ contenant x_0 tel que $\forall x \in [u,v]$, $g(x) \geq \frac{1}{2} g(x_0)$. Alors $\displaystyle\int_u^v g(x) \, dx \geq \frac{1}{2} g(x_0)(v-u) > 0$ et on obtient une contradiction car

$$\int_a^b g(x) \, dx = \underbrace{\int_a^u g(x) \, dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_u^v g(x) \, dx}_{> 0} + \underbrace{\int_v^b g(x) \, dx}_{\geq 0} > 0.$$

En d'autres termes, l'intégrale d'une fonction g, continue, positive sur $[a,b]$ et qui n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, est strictement positive. □

Exercice 2. Proposer une autre démonstration du lemme 1 en considérant $x \mapsto G(x) = \int_a^x g(t) dt$.

Exercice 3. Déterminer une CNS sur $(f,g,h) \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})^3$ pour que $N : (x,y,z) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x f(t) + y g(t) + z h(t)| \, dt$ soit une norme sur $\mathbb{R}^3$.

1.4.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 4. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :*

$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}. \tag{1}$$

Démonstration. Fixons $(u,v) \in E^2$ et posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \langle xu+v, xu+v\rangle$.
Comme $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme positive, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) \geq 0$ et par bilinéarité et symétrie du p.s,

$$p(x) = \langle u,u\rangle x^2 + 2\langle u,v\rangle x + \langle v,v\rangle.$$

Distinguons maintenant deux cas :
i) si $u = 0_E$, l'inégalité (1) est une égalité car $\langle 0_E, v\rangle = 0 = \langle 0_E, 0_E\rangle$.
ii) si $u \neq 0_E$, $\langle u,u\rangle > 0$ car $\langle\ ,\ \rangle$ est "définie" et $x \mapsto p(x)$ est donc une fonction polynôme du second degré, positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, son discriminant $\Delta = 4\big((\langle u,v\rangle)^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle\big)$ est négatif ou nul (car si Δ était strictement positif, $p(x)$ serait strictement négatif entre les deux racines de p ce qui n'est pas le cas...) D'où (1). □

Application. Les deux inégalités (de Cauchy-Schwarz) suivantes sont très souvent utilisées et donc à connaître :
1. En considérant le p.s usuel de $\mathbb{R}^n$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz "historique" :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \boxed{|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}$$

L'exercice suivant en propose une preuve plus "élémentaire" ne faisant pas appel à la notion de produit scalaire.
Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$ des réels.
a. Développer et simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2\Big)$.
b. En déduire que $|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.
c. *Une application de l'inégalité de Schwarz.* Soit $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs.
Prouver que $(x_1 + \cdots + x_n)(\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}) \geq n^2$.

2. En considérant $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ muni du p.s $\langle\,,\,\rangle$ défini par : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, on obtient :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2,\ \boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}}$$

1.4.4 Norme associée à un produit scalaire

Proposition 5. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application* $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto & \sqrt{\langle u,u\rangle} \end{array}$ *est une* **norme** *sur E, appelée norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ ou dérivant du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.*

Démonstration. Vérifions les propriétés a), b) et c) caractérisant une norme (cf. définition 1) :
a) Soit $u \in E$. On a : $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \langle u,u\rangle \Leftrightarrow u = 0_E$ car $\langle\,,\,\rangle$ est une forme "définie".
b) Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité de $\langle\,,\,\rangle$, on a : $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle u,u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\lambda|\|u\|$.
c) Soit $(u,v) \in E^2$. Par bilinéarité et symétrie de $\langle\,,\,\rangle$:

$$\begin{array}{rcll} \|u+v\|^2 & = & \langle u+v, u+v\rangle & \\ & = & \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle & \\ & \leq & \underbrace{\langle u,u\rangle + 2\sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} + \langle v,v\rangle}_{=(\|u\|+\|v\|)^2} & \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1)} \end{array}$$

d'où $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Remarquons que c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous a permis de montrer l'inégalité triangulaire de la norme associée au produit scalaire. □

Une norme associée à un produit scalaire est aussi appelée *norme euclidienne.*

1.4.5 Exemples de normes associées à un produit scalaire

Reprenons successivement les trois exemples du paragraphe 1.4.2 :
1. L'application $\|\cdot\|_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \end{array}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ car c'est la norme associée au p.s usuel de $\mathbb{R}^n$.
Cette norme est la "norme euclidienne usuelle" de $\mathbb{R}^n$.

2. L'application $\|\cdot\|_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A=(a_{ij}) & \mapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tA \cdot A)} \end{array}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme associée au p.s usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette norme est la "norme euclidienne usuelle" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. L'application $\|\cdot\|_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} \end{array}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))$, associée au p.s $\langle\,,\,\rangle$ de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}))$ défini par : $\forall (f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Remarque 3. *Il existe des normes qui ne sont pas associées à un produit scalaire ! (voir l'exercice suivant).*

Exercice 5. 1. Soit $(E,\langle\,,\,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(u,v)\in E^2$. Simplifier $\langle u+v,u+v\rangle + \langle u-v,u-v\rangle$.
2. Prouver que $\|\cdot\|_1 : (x,y)\mapsto |x|+|y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et, en raisonnant par l'absurde, qu'elle n'est pas associée à un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$.

2 Exemples classiques d'espaces vectoriels normés

2.1 Des normes sur $\mathbb{K}^n$

Posons, pour tout $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \big(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^2\big)^{\frac12}$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|,\cdots,|x_n|)$.

Proposition 6. *$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes sur $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Vérification immédiate en exercice pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a montré au § 1.4.5 que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On admettra provisoirement que $\|\cdot\|_2$ est aussi une norme si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. □

2.2 Des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Posons, pour tout $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_2 = \big(\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\big)^{\frac12}$ et $\|A\|_\infty = \displaystyle\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|$.

Proposition 7. *$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Vérification immédiate en exercice pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a montré au § 1.4.5 que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admettra provisoirement que $\|\cdot\|_2$ est aussi une norme si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. □

2.3 Des normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$

Posons, pour tout $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$, $\|f\|_2 = \big(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\,dx\big)^{\frac12}$ et $\|f\|_\infty = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Proposition 8. *$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.*

Démonstration. Vérification immédiate en exercice pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a montré au § 1.4.5 que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On admettra provisoirement que $\|\cdot\|_2$ est aussi une norme si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. □

2.4 Norme infinie sur l'espace $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On rappelle que $f\in\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ si et seulement si $|f|$ est majorée sur I, donc si et seulement si

$$\exists C_f\in\mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x\in I, |f(x)|\le C_f.$$

L' ensemble $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est non vide car il contient la fonction nulle sur I (notée θ). En outre, pour tous $(f,g)\in\mathcal{B}(I,\mathbb{K})^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda f+g\in\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ car $\forall x\in I$, $|\lambda f(x)+g(x)|\le|\lambda||f(x)|+|g(x)|\le|\lambda|C_f+C_g$, donc $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ des applications de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition 9. *L'application $\|\cdot\|_{\infty,I} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \sup_{x\in I}|f(x)| \end{array}$ est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.*

Démonstration. Commençons par un bref rappel sur la notion de borne supérieure :

Rappel. 1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. La borne supérieure de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A.
2. `Axiome de la borne supérieure.` On admet que :

toute partie A, non vide et majorée de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure, notée $\sup(A)$.

3. La borne supérieure n'est pas nécessairement un élément de A : par exemple, si $A = [0, 1[$, $\sup(A) = 1 \notin A$.
Si en revanche, A admet un plus grand élément, ce plus grand élément, appelé aussi maximum de A, est alors la borne supérieure de A : par exemple, si $A = [0, 1]$, $\sup(A) = 1 = \max(A)$.

Notons plus simplement $\mathcal{B}$ l'espace $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$. Soit $f \in B$. Comme $A = \{|f(x)|,\ x \in I\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, A admet, par l'axiome de la borne supérieure, une borne supérieure, notée $\sup\{|f(x)|/x \in I\}$ ou plus simplement $\sup_{x\in I} |f(x)|$. La suite de la preuve sera détaillée en cours. Le point le plus technique à vérifier est l'homogénéité. □

3 Normes équivalentes

3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E.

Définition 4. *On dit que N' est équivalente à N si et seulement si il existe un couple de* **constantes** $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ *tel que*

$$\forall u \in E,\ a\, N(u) \leq N'(u) \leq b\, N(u).$$

Remarque 4. *Si N' est équivalente à N, on a alors, avec les notations précédentes,*

$$\forall u \in E,\ \frac{1}{b}\, N'(u) \leq N(u) \leq \frac{1}{a}\, N'(u)$$

et N est donc équivalente à N'. On dit alors plus simplement que N et N' sont équivalentes. On vérifie aussi facilement que si N est équivalente à N' et N' est équivalente à N'', alors N est équivalente à N''.

3.2 Exemple et contre-exemple

1. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes : on vérifie facilement que

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

2. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Comparons les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On obtient facilement que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty,\ \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \text{ et } \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \text{ (par Cauchy-Schwarz).}$$

Mais $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. Sinon il existerait $c > 0$ tel que

$$\forall f \in E,\ c\|f\|_\infty \leq \|f\|_1. \tag{2}$$

Considérons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$. On a : $f_n \in E$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} x^n = 1$.
(2) impliquerait alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui est absurde car il existe des entiers strictement plus grand que $\frac{1}{c} - 1$!

Exercice 6. Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) \leq C\|x\|_1$.

Le théorème suivant (dont la démonstration est hors programme) contextualise le résultat de l'exercice précédent :

3.3 Un théorème d'équivalence en dimension finie

Théorème 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **de dimension finie**. *Deux normes quelconques sur E sont équivalentes.*

Remarque 5. *Comme $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, le théorème 1 assure l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 7. Démontrer de deux façons différentes que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.
Exercice 8. Montrer que l'on définit trois normes sur $\mathbb{R}[X]$ en posant pour tout $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$,

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,\ N_2(P) = \big(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\big)^{\frac{1}{2}} \text{ et } N_\infty(P) = \max_{k\in\{0,\ldots,n\}} |a_k|$$

Ces trois normes sont-elles équivalentes ? *Indication : considérer $P_j = 1 + X + \cdots + X^j$.*

4 Suites d'un espace vectoriel normé.

Une suite d'un evn $(E, \|\cdot\|)$ est une application u de $\mathbb{N}$ dans E (ou de $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0\}$ dans E avec $n_0 \in \mathbb{N}$). L'ensemble, noté $E^{\mathbb{N}}$, des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est muni d'une addition interne et d'une multiplication externe : si $(u, v) \in (E^{\mathbb{N}})^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, la suite $u + v$ (resp. αu) est, par définition, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$). $(E^{\mathbb{N}}, +, .)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.1 Convergence, divergence

4.1.1 Définition

Définition 5. *Soient (u_n) une suite de E et $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ (tend vers ℓ, a pour limite ℓ) si la suite de réels positifs $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0, donc si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

La suite u est convergente si elle admet une limite $\ell \in E$. On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.
La suite u est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 6. *Dans la définition ci-dessus, l'entier N dépend en général de ε et les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes.*

Remarque 7. *Si $E = \mathbb{R}$ (resp. $E = \mathbb{C}$), la norme considérée sur E est (implicitement) la valeur absolue (resp. le module). La définition ci-dessus nous redonne dans ce cas particulier la définition de la convergence d'une suite réelle ou complexe.*

Proposition 10. `[Unicité de la limite]` *La limite d'une suite (u_n), si elle existe, est unique.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$ (non fixé pour le moment). Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $\|u_n - \ell'\| \leq \varepsilon$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors

$$\|\ell - \ell'\| = \|(\ell - u_N) + (u_N - \ell')\| \leq \|\ell - u_N\| + \|u_N - \ell'\| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est faux si $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}\|\ell - \ell'\|[$. $\square$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E, de limite $\ell \in E$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

Proposition 11. `[Théorème de Cesàro]` *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E, de limite $\ell \in E$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \ell$.*

Démonstration. Posons $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\|v_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_1$, $\|u_n - \ell\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\|v_n - \ell\| &= \|\frac{1}{n}((u_1 + \cdots + u_n) - n\ell)\| = \frac{1}{n}\|(u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} \|u_k - \ell\| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} \underbrace{\|u_k - \ell\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \\
&\leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

en notant C la constante $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} \|u_k - \ell\|$ et en observant que $\displaystyle\sum_{k=n_1+1}^{n} \|u_k - \ell\| \leq (n - n_1)\frac{\varepsilon}{2} \leq n\frac{\varepsilon}{2}$.
De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{n} = 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_2$, $\dfrac{C}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Finalement en considérant $N = \max(n_1 + 1, n_2)$, on a bien : $\forall n \geq N$, $\|v_n - \ell\| \leq \dfrac{C}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Exercice 10. *[Une application du théorème de Cesàro]* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell \in E$.
Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} u_n = \ell$.

Exercice 11. *[Une généralisation du théorème de Cesàro].* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E, de limite $\ell \in E$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = \ell$.
Application. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$.

4.1.2 Suites bornées

Définition 6. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée si la suite $(\|u_n\|_{n\in\mathbb{N}})$ est majorée, c'est-à-dire si :*

$$\exists C>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \|u_n\|\leq C.$$

Proposition 12. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, de limite ℓ. Il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\geq N$, $\|u_n-\ell\|\leq 1$. D'où

$$\forall n\geq N,\ \|u_n\|=\|(u_n-\ell)+\ell\|\leq\|u_n-\ell\|+\|\ell\|\leq 1+\|\ell\|.$$

Finalement, u est bornée car $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|u_n\|\leq C$ en notant C la constante : $\max(\|u_0\|,\cdots,\|u_{N-1}\|,1+\|\ell\|)$. □

Remarque 8. *La proposition 12 n'admet pas de réciproque : la suite réelle $((-1)^n)$ est bornée mais divergente.*

4.1.3 Suites extraites

Définition 7. *Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite u s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{\varphi(n)}$.*

Exemple. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. La suite $v=(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite u et la suite $w=(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite v (et aussi de la suite u).

Remarque 9. *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$.*
Cette inégalité se démontre par récurrence : $\varphi(0)\in\mathbb{N}$ donc $\varphi(0)\geq 0$ et si pour un entier $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$, alors, par stricte croissance de φ, $\varphi(n+1)>\varphi(n)\geq n$ d'où $\varphi(n+1)\geq n+1$ car $\varphi(n+1)\in\mathbb{N}$.

Proposition 13. *Si $u\in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in E$ alors toute suite extraite de u converge aussi vers ℓ.*

Démonstration. Soit v une suite extraite de la suite u. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{\varphi(n)}$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N$, $\|u_n-\ell\|\leq\varepsilon$. La remarque 9 implique immédiatement que $\forall n\geq N$, $\|v_n-\ell\|=\|u_{\varphi(n)}-\ell\|\leq\varepsilon$ car pour tout $n\geq N$, $\varphi(n)\geq n\geq N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$. □

Proposition 14. *Soient (u_n) une suite de E et $\ell\in E$. Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\ell$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\ell$) , il existe $N_1\in\mathbb{N}$ (resp. $N_2\in\mathbb{N}$) tel que

$$\forall p\geq N_1,\ \|u_{2p}-\ell\|\leq\varepsilon\ (\text{resp. } \forall p\geq N_2,\ \|u_{2p+1}-\ell\|\leq\varepsilon)\ (*).$$

Notons $N=\max(2N_1,2N_2+1)$ et vérifions que $\forall n\geq N$, $\|u_n-\ell\|\leq\varepsilon$ (ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$). Distinguons pour cela deux cas : si $n=2p$ est pair, alors $n\geq N$ implique $2p\geq 2N_1$, i.e. $p\geq N_1$ d'où $\|u_n-\ell\|=\|u_{2p}-\ell\|\leq\varepsilon$ par $(*)$, de même si $n=2p+1$ est impair, $n\geq N$ implique $p\geq N_2$ d'où $\|u_n-\ell\|=\|u_{2p+1}-\ell\|\leq\varepsilon$. □

Exercice 12. Soient (u_n) une suite de E et $\ell\in E$. Si les trois suites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

4.1.4 Opérations algébriques sur les suites convergentes

Proposition 15. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $(E,\|\cdot\|)$ convergeant respectivement vers U et V et $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. Alors la suite (au_n+bv_n) converge vers $aU+bV$.*

Démonstration. Vérifions que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|(au_n+bv_n)-(aU+bV)\|=0$ en utilisant l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$. En effet, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\|(au_n+bv_n)-(aU+bV)\|=\|a(u_n-U)+b(v_n-V)\|\leq|a|\,\|u_n-U\|+|b|\,\|v_n-V\|$ et le théorème de limite par encadrement permet de conclure car $\lim\limits_{n\to+\infty}|a|\,\|u_n-U\|+|b|\,\|v_n-V\|=a\cdot 0+b\cdot 0=0$ par propriété de la convergence des suites de réels. □

4.2 Norme et convergence. Cas d'un evn de dimension finie

4.2.1 Une remarque importante

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La notion de convergence d'une suite de E dépend *a priori* de la norme considérée sur E quand l'espace E n'est pas de dimension finie. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant : Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Rappelons tout d'abord la définition des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \ \text{ et } \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Posons, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. La suite (f_n) est une suite de E. Soit θ la fonction nulle sur $[0,1]$. On constate que $\|f_n - \theta\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n - \theta\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} x^n = 1$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge vers θ dans l'evn $(E, \|\cdot\|_1)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - \theta\|_1 = 0$ mais cette même suite ne converge pas vers θ dans l'evn $(E,\|\cdot\|_\infty)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - \theta\|_1 = 1 \neq 0$.

4.2.2 Cas de la dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

a. Soient N et N' deux normes sur E. Soit (u_n) une suite de E supposée convergente vers ℓ *pour la norme* N, i.e telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0.$$

Par théorème, N et N' sont deux normes équivalentes. Il existe donc une constante $b > 0$ telle que $\forall u \in E$, $N'(u) \leq bN(u)$. En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $N'(u_n - \ell) \leq bN(u_n - \ell)$. Cette comparaison entraîne que l'on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} N'(u_n - \ell) = 0$. Donc la suite (u_n) converge vers ℓ *pour la norme* N'. En d'autres termes, la convergence d'une suite de E est indépendante de la norme considérée sur E.

b. Considérons maintenant une base (quelconque) $(e_1, \cdots, e_d)$ de E. Posons pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d \in E$, $N(x) = |x_1| + \cdots + |x_d|$. On vérifie sans difficultés que N est une norme sur E. Soit (u_n) une suite de E supposée convergente vers ℓ. Posons $u_n = u_{n,1}e_1 + \cdots + u_{n,d}e_d$ et $\ell = \ell_1e_1 + \cdots + \ell_de_d$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$. Or, par définition de N, on a, pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$, $0 \leq |u_{n,k} - \ell_k| \leq N(u_n - \ell)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n,k} - \ell_k| = 0$, i.e $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k} = \ell_k$. On vient donc d'établir la proposition suivante :

Proposition 16. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Une suite de vecteurs de E converge ssi les d suites de coordonnées (dans une base quelconque de E) convergent.*

Exercice 13. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1 + \dfrac{2}{n})^n, n^2(1 - \cos(\dfrac{3}{n}), n^2(\dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n})\right)$.

Exercice 14. Montrer que la définition de suite bornée d'un espace vectoriel E de dimension finie ne dépend pas de la norme considérée sur E et caractériser simplement le fait qu'une suite d'un espace vectoriel E de dimension finie soit bornée.

4.2.3 Exemple : suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n^2, la proposition précédente permet d'affirmer qu'une suite (C_p) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge (quand $p \to +\infty$) si et seulement si elle converge pour une norme quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore si et seulement si les n^2 suites $(c_{i,j}^{(p)})$ converge dans $\mathbb{R}$ (en notant $c_{i,j}^{(p)}$ le terme d'indices i et j de la matrice C_p).

Exercice 15. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{n}} & \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n}} \\ n^2e^{-\sqrt{n}} & n\ln(1 + \sin(\frac{1}{n})) \end{pmatrix}$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 17. *1. Soit (A_p) une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers A. Alors la suite $({}^tA_p)$ converge vers ${}^tA$.*
2. Soient (A_p) et (B_p) deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B. Alors la suite (A_pB_p) converge vers AB.

5 Topologie d'un espace vectoriel normé.

5.1 Boules, sphères, parties bornées, parties convexes

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 8. *Soient $a \in E$ et $r > 0$.*

- *La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a,r) = \{u \in E \,/\, d(u,a) < r\}$.*
- *La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $B_f(a,r) = \{u \in E \,/\, d(u,a) \leq r\}$.*
- *La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $S(a,r) = \{u \in E \,/\, d(u,a) = r\}$.*

Exercice 16. 1. On considère ici l'evn $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Déterminer $B(a,r)$, $B_f(a,r)$ et $S(a,r)$.
2. $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Déterminer $B(a,r)$, $B_f(a,r)$ et $S(a,r)$.
Même question avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 9. *Une partie A de E est bornée (pour la norme $\|\cdot\|$) s'il existe $M > 0$ tel que $\forall u \in A$, $\|u\| \leq M$ ou de manière équivalente si A est incluse dans une boule de centre 0_E.*

Remarque 10. *Soient N et N' deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E, c'est-à-dire qu'il existe un couple de constantes $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\forall u \in E$, $\alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$.*
1) Une partie bornée pour la norme N est aussi bornée pour la norme N'.
2) Soit $a \in E$. Notons $B_N(a,r)$ (resp. $B_{N'}(a,r)$) la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme N (resp. N'). Alors
$$B_{N'}(a, \alpha r) \subset B_N(a,r) \subset B_{N'}(a, \beta r).$$

Définition 10. `[Partie convexe]` *Une partie A d'un espace vectoriel E est convexe si, pour tout couple (u,v) de vecteurs de A, le segment $[u,v]$ est inclus dans A, c'est-à-dire si :*
$$\forall (u,v) \in A^2,\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)u + tv \in A$$

Proposition 18. *Une boule ouverte ou fermée d'un evn $(E, \|\cdot\|)$ est une partie convexe de E.*

Exercice 17. 1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes d'un espace vectoriel E est une partie convexe de E.
2. La réunion de deux parties convexes d'un espace vectoriel E est-elle une partie convexe de E ?

5.2 Point intérieur, point adhérent à une partie d'un evn

Remarque 11. *Les définitions suivantes sont énoncées dans le cadre général d'un evn de dimension finie ou non. On vérifie facilement qu'elles sont invariantes par changement de normes équivalentes. En particulier, si E est un espace vectoriel de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie sur E par équivalence des normes sur E (voir la remarque précédente 10 2)).*

5.2.1 Point intérieur, intérieur d'une partie

Définition 11. *Soit A une partie non vide de E.*
1) On dit que $a \in A$ est un point intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.
2) L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Exercice 18. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, x \geq 0\}$. Déterminer $\mathring{A}$.

5.2.2 Point adhérent, adhérence d'une partie

Définition 12. *Soit A une partie non vide de E.*
1) On dit que $u \in E$ est un point adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0$, $B(u, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
2) L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 12. *On a : $A \subset \overline{A}$. En effet, si $a \in A$, pour tout $\varepsilon > 0$, $a \in B(a,\varepsilon) \cap A$ donc $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Exercice 19. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, y > 0\}$. Déterminer $\overline{A}$.

Proposition 19. `[Caractérisation séquentielle d'un point adhérent]` *Soit A une partie de E et $u \in E$. Alors u est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers u.*

Démonstration. $\triangleright$ Supposons u adhérent à A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $B(u, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, il existe $x_n \in B(u, \frac{1}{n}) \cap A$, c'est à-dire un vecteur x_n de A tel que $d(u, x_n) = \|u - x_n\| < \frac{1}{n}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de A convergeant vers u car $\lim\limits_{n \to +\infty} d(u, x_n) = 0$.

$\triangleleft$ Soit (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers u. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(a_n, u) < \varepsilon$. En particulier, $a_N \in B(u, \varepsilon) \cap A$. Donc u est adhérent à A car $B(u,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. $\square$

5.3 Ouvert, fermé

5.3.1 Ouvert

Définition 13. *On dit qu'une partie A de E est un ouvert de E ou une partie ouverte de E si :*
$$\forall a \in A,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a,r) \subset A,$$
autrement dit si $\mathring{A} = A$.

Proposition 20. 1) $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts de* E.
2) *L'union d'une famille quelconque d'ouverts de* E *est un ouvert de* E.
3) *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts de* E *est un ouvert de* E.

Démonstration. 3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \cdots, A_n$ une famille de n ouverts de E. Alors $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ est un ouvert de E. En effet, soit $a \in A$. On cherche $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset A_i$ car A_i est un ouvert de E. Posons alors $r = \min(r_1, \cdots, r_n)$. Par définition de r, on a $r > 0$, et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset A_i$. Par conséquent, $B(a, r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n = A$ ce qui prouve que A est bien un ouvert de E. □

Attention ! Une intersection *quelconque* de parties ouvertes peut ne pas être une partie ouverte comme le montre l'exemple suivant :

Exercice 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$. Vérifier que A_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et justifier que A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5.3.2 Fermé

Définition 14. *On dit qu'une partie* A *de* E *est un fermé de* E *ou une partie fermée de* E *si son complémentaire dans* E *est un ouvert de* E*, c'est-à-dire si* $E \setminus A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$ *est une partie ouverte de* E.

Remarque 13. *Toute partie finie de* E *est une partie fermée de* E.

Exercice 21. Vérifier que $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $[0, 1[$ n'est ni une partie ouverte, ni une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Proposition 21. *Une boule ouverte (resp. fermée) est une partie ouverte (resp. fermée). Une sphère est un fermé.*

Proposition 22. *Une partie* A *de* E *est fermée si et seulement si* $\overline{A} = A$.

Démonstration. ▷ Supposons A fermée. Soit $u \notin A$. Comme $E \setminus A$ est ouverte, il existe $r > 0$ tel que $B(u, r) \subset E \setminus A$, et on a alors $B(u, r) \cap A = \emptyset$. Donc u n'est pas adhérent à A, c'est-à-dire $u \notin \overline{A}$. Par contraposée, $\overline{A} \subset A$ et comme $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = A$.

◁ Supposons que tout point adhérent à A soit un point de A. Montrons que A est fermée, c'est-à-dire que $E \setminus A$ est ouverte. Soit $u \in E \setminus A$. Comme $u \notin A$, u n'est pas un point adhérent à A et il existe donc $r > 0$ tel que $B(u, r) \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire tel que $B(u, r) \subset E \setminus A$. Donc $E \setminus A$ est ouverte. □

En passant au complémentaire, la proposition 20 conduit à :

Proposition 23. 1) $\emptyset$ *et* E *sont des fermés de* E.
2) *L'intersection d'un nombre quelconque de fermés de* E *est un fermé de* E.
3) *L'union d'une famille finie de fermés de* E *est un fermé de* E.

Attention ! Une union *quelconque* de parties fermées peut ne pas être une partie fermée comme le montre l'exemple suivant :

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \geq \frac{1}{n}\}$. Vérifier que A_n est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et justifier que A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24. `[Caractérisation séquentielle des fermés]` *Soit* A *une partie de* E.
A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A.

Démonstration. ▷ Supposons A fermée. Soit u la limite d'une suite convergente de A. Par la proposition 19, u est un point adhérent à A et par la proposition 22, $u \in A$.

◁ Supposons que toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A. Supposons A non fermée. Par la proposition 22, $\overline{A} \not\subset A$. Donc il existe un point u adhérent à A avec $u \notin A$. Ce qui est impossible car d'après la proposition 19, ce point u est la limite d'une suite d'éléments de A et est donc dans A par hypothèse ! □

Exercice 23. Montrer que $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \, y > x^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 15. `[Densité]` *Une partie* A *de* E *est dense dans* E *si tout vecteur de* E *est adhérent à* A*, autrement dit si*

$$\forall u \in E, \forall r > 0, \exists a \in A \text{ tel que } d(u, a) < r$$

ou si tout vecteur u *de* E *est la limite d'une suite de vecteurs de* A *(par caractérisation séquentielle d'un point adhérent).*

Proposition 25. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Utilisons la caractérisation séquentielle. Soit x un réel quelconque. On vérifie avec le théorème de limite par encadrement que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{E(nx)}{n}}_{\in \mathbb{Q}}$ où E est la fonction partie entière. □