Séries numériques.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\ .\ |$ la valeur absolue ou le module.

1 Généralités.

1.1 Série associée à une suite. Convergence. Somme. Divergence.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n ou encore série associée à la suite u la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. U_n est appelée somme partielle d'indice n (ou $n^{\text{ème}}$ somme partielle) de la série associée à u.

Notation. La série de terme général u_n, $n \geq 0$, est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$.

L'étude de la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc l'étude de la convergence (éventuelle) de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{K}$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Dans ce cas, la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou encore $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \cdots$

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Remarque. On peut avoir à considérer une suite (u_n) dont le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un certain indice $n_0 \geq 1$. Dans ce cas, la suite des sommes partielles associée à cette suite u est définie par : $\forall n \geq n_0$, $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et la série, notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$, associée à u est, par définition, la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\geq n_0}$.

Proposition 1. *On ne change pas la nature d'une série si on en modifie un nombre fini de termes.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. Considérons $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \cdots, n_p$ p entiers distincts. Soient $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{K}$. Considérons la suite v définie par :

$$\forall n \notin \{n_1, \cdots, n_p\}, v_n = u_n \,\text{et}\, \forall i \in \{1, \cdots, p\}, v_{n_i} = a_i.$$

On a, pour tout $n \geq \max(n_1, \cdots, n_p)$, $v_n = u_n$ et donc $V_n - U_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k - u_k) = \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$. Par conséquent, si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, de somme U, $\lim_{n\to+\infty} V_n = U + \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$ et donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. De même si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, de somme V, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, de somme $V - \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$. □

1.2 Premiers Exemples.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.
2. La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge. En effet, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} = 1$ et $U_{2n+1} = 0$. Donc (U_n) diverge car les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}), extraites de (U_n), convergent vers deux limites distinctes (1 et 0 respectivement).
3. *Série harmonique.* La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que (U_n) converge vers un réel U. La suite extraite (U_{2n}) converge alors vers U et la suite de terme général $U_{2n} - U_n$ vers 0. Or ceci est impossible car la suite $(U_{2n} - U_n)$ est minorée par $\frac{1}{2}$: en effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} (= \frac{1}{2})$. Donc (U_n) diverge. Plus précisément, $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ car la suite (U_n) est une suite strictement croissante (puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$) qui, d'après ce qui précède, est divergente.

1.3 Restes d'une série convergente.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente, de somme U. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le reste d'indice n (ou d'ordre n) de cette série, noté R_n, est par définition égal à $U - U_n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, car, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} U_n = U$.
Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$ et posons : $\forall p \geq n+1$, $v_p = u_p$. La série associée à la suite $(v_p)_{p\geq n+1}$ est la suite de terme général $V_p = \sum_{k=n+1}^{p} v_k = U_p - U_n$, $p \geq n+1$, de limite $U - U_n = R_n$ quand p tend vers $+\infty$.

Ainsi R_n est la somme de la série $\sum_{p\geq n+1} u_p$. Ce qui nous permet d'écrire : $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

1.4 Séries à termes complexes.

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{C}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k) + i \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$, la suite complexe (U_n) converge si et seulement si les deux suites de réels $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k)$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$ convergent et, dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k) + i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k).$$

Reformulons maintenant le résultat précédent en utilisant le mot *série* :
La série de complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si les deux séries de réels $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}\,(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n).$$

1.5 Condition nécessaire de convergence d'une série.

Proposition 2. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Notons $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = U_n - U_{n-1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = U - U = 0$. $\square$

Lorsque $u_n \not\to 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. On parle dans ce cas de *divergence grossière.*
Exemple. La série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Remarque 1. *La réciproque de la proposition précédente est fausse car il se peut qu'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge, bien que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. *C'est le cas pour la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *(cf. §1.2 Exemple 3).*

1.6 Lien suite-série.

Proposition 3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$. *La suite* (u_n) *converge si et seulement si la série* $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ *converge.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On a : $V_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$. Par définition, la série $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (V_n) converge. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_{n+1}) converge ou encore si et seulement si la suite (u_n) converge. $\square$

1.7 Espace vectoriel des séries convergentes.

Proposition 4. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries convergentes. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

1. La série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

2. La série $\sum_{n\geq 0}\lambda u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Démonstration. 1. Notons pour simplifier $U=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ et $V=\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$. Posons pout tout $n\in\mathbb{N}$: $w_n=u_n+v_n$.
Soient U_n, V_n et W_n les sommes partielles d'indice n des séries $\sum_{n\geq 0}u_n$, $\sum_{n\geq 0}v_n$ et $\sum_{n\geq 0}w_n$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n=U_n+V_n$, $\lim_{n\to+\infty}W_n=\lim_{n\to+\infty}U_n+\lim_{n\to+\infty}V_n=U+V$ d'où 1.
Vocabulaire. La série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ est appelée la série somme ou la somme des deux séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$.
2. Démonstration analogue à la précédente en remarquant que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=0}^{n}u_k$. □

Remarque 2. *Soit* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *une série divergente. Soit* $\alpha\in\mathbb{K}^*$. *Alors la série* $\sum_{n\geq 0}\alpha u_n$ *diverge.*

Il est clair que l'on a $u_n=\frac{1}{\alpha}\alpha u_n$. La proposition 4. 2 (appliquée avec $\lambda=\frac{1}{\alpha}$ et αu_n à la place de u_n) nous dit que si la série $\sum_{n\geq 0}\alpha u_n$ était convergente, la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ serait convergente ce qui contredit notre hypothèse.

Remarque 3. *Soit* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *le* $\mathbb{K}$*ev des suites u, indexées par* $\mathbb{N}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Notons* Σ *le sous-ensemble de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *formé des suites u telles que la série* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *converge. La proposition précédente signifie donc que* Σ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 5. *Soient* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *une série convergente et* $\sum_{n\geq 0}v_n$ *une série divergente. Alors la série* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *diverge.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge. D'après la proposition précédente, $\sum_{n\geq 0}(-u_n)$ converge. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=(u_n+v_n)+(-u_n)$, on déduit à nouveau de la proposition précédente que la série $\sum_{n\geq 0}v_n$ converge comme série somme de deux séries convergentes. Contradiction. □

Remarque 4. *Il n'y a pas d'énoncé précisant de façon générale la nature de* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *quand les deux séries* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0}v_n$ *divergent. Pour vous en convaincre, étudier les deux exemples suivants :*
a. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$ *et* $v_n=-1$. *b.* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$ *et* $v_n=1$.

2 Séries géométriques et séries de Riemann.

Les deux exemples suivants sont fondamentaux.

2.1 Série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$, $z\in\mathbb{C}$.

Proposition 6. *Soit* $z\in\mathbb{C}$. *La série géométrique* $\sum_{n\geq 0}z^n$ *converge si et seulement si* $|z|<1$ *et si* $|z|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$.

Démonstration. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$. Distinguons plusieurs cas suivant les valeurs de z :

a. Si $z = 1$, la série étudiée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 1^n$ diverge grossièrement. La divergence de cette dernière série peut aussi se justifier en remarquant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(1) = +\infty$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(1) = n + 1$.

b. Considérons maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Cette égalité *à connaître absolument* s'obtient tout simplement en développant et simplifiant $(1 - z)U_n(z)$.
On distingue alors trois (sous) cas :

(i) Si $|z| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(z) = \frac{1}{1 - z}$.

Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$ converge et sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est égale à $\dfrac{1}{1 - z}$.

(ii) Si $|z| > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |z|^n = +\infty$. Donc $z^n \not\to 0$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement.

(iii) Si $|z| = 1$, la suite (constante) $(|z|^n)$ tend évidemment vers 1 donc $z^n \not\to 0$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge aussi grossièrement. □

2.2 Série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 7. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Si $\alpha < 0$ (resp. $\alpha = 0$), $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ (resp. le terme général de la série est égal à 1 et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$).

Si $\alpha \in]0, 1]$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge : en effet, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ car $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et (cf. §1.2 Exemple 3), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Supposons enfin $\alpha > 1$. Comme l'application : $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est (strictement) décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $\forall k \geq 2$, $\forall x \in [k - 1, k]$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$ et en intégrant cette inégalité entre $k - 1$ et k, on obtient

$$\forall k \geq 2, \ \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a alors :

$$\forall n \geq 2, \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha} \ \left(= \frac{1}{\alpha - 1}(1 - n^{1-\alpha}) \right) \leq \frac{1}{\alpha - 1}$$

car $x \mapsto \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^{-\alpha}$ sur $]0, +\infty[$. Posons alors $U_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $n \geq 1$.

Comme, pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1}(\alpha) - U_n(\alpha) = \dfrac{1}{(n + 1)^\alpha} > 0$, la suite $(U_n(\alpha))$ est strictement croissante.

De plus, la majoration précédente prouve que cette suite est majorée car, pour tout $n \geq 1$, $U_n(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge car la suite de ses sommes partielles $(U_n(\alpha))_{n\geq 1}$ converge. □

3 Séries à termes positifs.

Dans cette section, on considère des séries dont le terme général est positif ou positif à partir d'un certain indice. Rappelons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$, est, par définition, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Propriété fondamentale.

Commençons par énoncer un premier résultat simple mais fondamental pour notre étude.

Lemme 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
a. La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *est croissante.*
b. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*
c. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. a. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = u_{n+1}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ par hypothèse.
b. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante d'après a., elle converge donc si et seulement si elle est majorée.
c. La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ signifie que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge. Et comme la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante d'après a., elle est majorée par sa limite, qui n'est autre que la somme (de série) $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. □

Remarque 5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge. Alors* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

En effet, la suite (U_n) est croissante et, par hypothèse, divergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

3.2 Principe de comparaison.

Proposition 8. *Soit* $N \in \mathbb{N}$. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n$.
a. Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
b. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Démonstration. On peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$, quitte à remplacer si $N \in \mathbb{N}^*$, les termes d'indices $0, \cdots, N$ des suites u et v par 0 car, d'après la proposition 1, ces éventuelles modifications ne changent pas la nature des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$. Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.
a. Notons $V = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. Par le lemme 1. c. on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq V$ et donc $U_n \leq V_n \leq V$. La suite (U_n) est donc majorée par V et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge par le lemme 1. b.
b. Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, le résultat a. précédent nous donne la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ ce qui est absurde.
□

Exemples d'application.
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle positive telle que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge. Alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ *converge.*
Rappelons que toute suite réelle convergente est majorée.
La suite (u_n) est donc majorée car, d'après la proposition 2, la suite (u_n) converge vers 0.
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^2 \leq Mu_n$ car $u_n \geq 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} Mu_n$ converge et, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8.a), la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.
2. Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$. Rappelons que $\forall x > 0$, $\ln x \leq x$. Donc, pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$.
Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8.b), la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge. Cette série est en fait un exemple de série de Bertrand (voir plus loin).
3. Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2^n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 2^n \geq 2^n > 0$ et donc $0 \leq \frac{1}{n+2^n} \leq (\frac{1}{2})^n$. Or la série géométrique $\sum_{n\geq 0} (\frac{1}{2})^n$ converge, car sa raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a) , la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2^n}$ converge.
Remarquons que l'on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n + 2^n \geq n > 0$ et donc $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{n}$. Mais cette dernière inégalité ne permet pas d'utiliser la Proposition 8. a. car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

3.3 Comparaison à une série de Riemann : règle $n^\alpha u_n$.

Proposition 9. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs.*
a. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
b. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration. a. La suite $(n^\alpha u_n)$ est majorée car elle converge (vers 0). Considérons $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha u_n \leq M$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{M}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ainsi que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{M}{n^\alpha}$. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a), la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

b. Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $n^\alpha u_n \geq 1$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. b), la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

□

Exemple. La série à termes strictement positifs $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge d'après la Proposition 9.a utilisée avec $\alpha = 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$.

Application à l'étude des séries de Bertrand.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Considérons la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. L'étude de la convergence de cette série repose en grande partie sur le résultat de puissance comparée bien connu suivant :

$$\forall d \in \mathbb{R},\ \forall e > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^d}{x^e} = 0.$$

Posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$. Distinguons deux cas :

1[er] cas : Supposons $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ (quelconque). Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$ car $\alpha - \gamma > 0$. La série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge d'après la Proposition 3.3. a. précédente (le réel γ jouant ici le rôle du réel α de la proposition.)

2[e] cas : Supposons $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ (quelconque). Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\gamma-\alpha}}} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^{\gamma-\alpha}} = 0$ puisque $\gamma - \alpha > 0$. La série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge d'après la Proposition 3.3. b. précédente (le réel γ jouant encore le rôle du réel α de la proposition.)

En résumé, soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha < 1.$$

Le troisième cas $\alpha = 1$ est étudié par une autre méthode ("comparaison série- intégrale") dans la sous-section 3.6.

Nota Bene : Ces résultats sur les séries de Bertrand sont à connaître bien qu'ils ne figurent pas explicitement au programme. Par conséquent, vous devrez être capable de les redémontrer !

3.4 Règle de l'équivalent.

Proposition 10. `[Règle de l'équivalent positif.]` *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*
Autrement dit, si l'une des deux séries converge (resp. diverge), l'autre converge aussi (resp. diverge aussi).

Démonstration. Commençons par traduire l'équivalence des suites u et v : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(w_n)_{n\geq n_0}$, qui converge vers 1, telle que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n w_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$, il existe $N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{1}{2} \leq w_n \leq \dfrac{3}{2}$. Par conséquent, comme la suite v est positive, on obtient que

$$\forall n \geq N,\ \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n.$$

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3}{2} v_n$ converge et, par comparaison de termes positifs (Proposition 8. a.), la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
En revanche, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2} v_n$ diverge (cf. Remarque 2) et par comparaison de termes positifs (Proposition

8. b.), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

$\square$

Remarque 6. *Dans l'énoncé de la proposition 10, il suffit en fait de supposer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) est positive. En effet, si par exemple (v_n) est positive, la suite (u_n) est nécessairement positive à partir d'un certain indice : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n$.*

La Proposition 10 se généralise aux suites négatives (à partir d'un certain rang) :

Proposition 11. `[Règle de l'équivalent de signe constant.]` *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle négative telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*

Démonstration. On a $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$. La remarque 6 et la proposition 10 impliquent que la suite $-u$ est positive à partir d'un certain indice et que $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature. Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc aussi de même nature sachant que la série $\sum -u_n$ (resp. $\sum -v_n$) est de même nature que la série $\sum u_n$ (resp. $\sum v_n$). $\square$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-n}$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Posons $v_n = -e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$. La série $\sum v_n$ est une série géométrique convergente, de raison $e^{-1} \in]0,1[$. Donc, d'après la Proposition 11, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On aurait aussi pu raisonner avec la série $\sum -u_n$.

Exemples d'application.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ est divergente. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{-(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge par la règle de l'équivalent positif (Proposition 10 utilisée ici avec $v_n = \frac{1}{n}$).

2. Etude de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos(\frac{1}{n^a})\right)$, $a \in \mathbb{R}^+$. Posons $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n^a}) \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $a = 0$, la suite u est constante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \cos 1 \neq 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - \cos 1 \neq 0$, la série de terme général u_n diverge donc grossièrement.

Supposons maintenant $a > 0$. Rappelons que $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2a}}$. Donc, par la règle de l'équivalent positif, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2a}}$ converge, c'est-à-dire converge si $a > \frac{1}{2}$ et diverge si $a \in]0, \frac{1}{2}]$.

3. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln(n) \ln(1 + \frac{1}{n})$. Posons $u_n = \frac{1}{n} \ln(n) \ln(1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite u est à termes positifs et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$ car $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or la série de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$ et $\beta = -1$), donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par la règle de l'équivalent positif (Proposition 10 utilisée ici avec $v_n = \frac{\ln n}{n^2}$).

3.5 Critère (règle) de D'Alembert (comparaison à une série géométrique).

Proposition 12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :*
a. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
b. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in]1,+\infty]$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration. a. Soit $q \in]\ell, 1[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.
En particulier, on a $u_{N+1} \leq qu_N$, $u_{N+2} \leq qu_{N+1} \leq q^2 u_N$, $u_{N+3} \leq qu_{N+2} \leq q^3 u_N$ et plus généralement

$$\forall n \geq N,\ 0 < u_n \leq q^{n-N} u_N.$$

Or la série de terme général $q^{n-N} u_N = (q^{-N} u_N).\, q^n$ est une série géométrique de raison $q \in]-1,1[$ donc une série convergente. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

b. Examinons uniquement le cas $\ell \in]1, +\infty[$, le cas $\ell = +\infty$ se traitant de la même manière. Soit $q \in]1, \ell[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$. Alors

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq q^{n-N} u_N.$$

Comme $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^{n-N} u_N = +\infty$. L'inégalité précédente implique que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge donc grossièrement. □

Remarque 7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ peut converger ... ou diverger !*
Pour s'en convaincre, considérer $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Exemple. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{2.4\ldots 2n}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et on obtient, après simplification, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$.
Or $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e$ car $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} \in [0,1[$ et d'après le critère de D'Alembert (Proposition 12. a.), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

3.6 Comparaison série-intégrale (1$^{\text{ère}}$ étude).

Proposition 13. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.*
La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Commençons par établir deux résultats élémentaires.
a. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n_0$. Comme f est décroissante sur $[k, k+1]$, on a $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. Par conséquent, $\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt$, c'est-à-dire

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k). \tag{1}$$

b. Posons $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$, $x \geq n_0$. La fonction F est croissante sur $[n_0, +\infty[$: en effet, soit $(x, x') \in [n_0, +\infty[^2$ tel que $x \leq x'$. D'après la relation de Chasles, $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f(t)\,dt \in \mathbb{R}^+$ car f est une fonction positive. Donc $F(x) \leq F(x')$.
Passons à la preuve de la proposition 13 :
c. Supposons tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}^+$. D'après (1), pour tout $n \geq n_0 + 1$, $0 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$. Or la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$, $n \geq n_0 + 1$, converge car, d'après la relation de Chasles,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} F(N) = \ell$$

donc la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a).
d. Supposons maintenant que la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge et montrons que F admet une limite finie en $+\infty$. Raisonnons par l'absurde. Si F n'admet pas de limite finie en $+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ car F est croissante sur $[n_0, +\infty[$. Or, pour tout $N \geq n_0 + 1$, $\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \geq F(N+1)$ d'après (1) et la relation de Chasles. Donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} f(n) = +\infty$ car $\lim_{N\to+\infty} F(N+1) = +\infty$. En d'autres termes, la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ diverge, ce qui contredit notre hypothèse. □

Fin de l'étude des séries de Bertrand. Il nous reste à déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(i) Supposons $\beta \leq 0$. Alors $\forall n \geq 3$, $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} = \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n} \geq \frac{1}{n}$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. b).

(ii) Supposons $\beta > 0$. Posons, pour tout réel $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$.
On vérifie facilement que la fonction f est une fonction continue, positive, (strictement) décroissante sur $[2, +\infty[$.
Donc d'après la Proposition 13, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt \in \mathbb{R}^+$.

Si $\beta = 1$, $\int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)}\,dt = \int_2^x \dfrac{\frac{1}{t}}{\ln t}\,dt = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)}\,dt = +\infty$.

Si $\beta \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = \int_2^x \dfrac{\frac{1}{t}}{(\ln t)^\beta}\,dt = [\dfrac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}]_2^x = \dfrac{1}{1-\beta}\big((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\big)$.

Donc si $\beta \in]0,1[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = +\infty$ et si $\beta > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt = \dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1} \in \mathbb{R}^+$.

Par conséquent, $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

4 Convergence absolue.

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module.

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ou est absolument convergente) si la série (à termes positifs) $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge.*

Exemple. La série complexe $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{e^{in}}{n^2}| = \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 14. *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0}(\alpha u_n + v_n)$ est aussi absolument convergente.*

Démonstration. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha u_n + v_n| \leq |\alpha||u_n| + |v_n|$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 0}(|\alpha||u_n| + |v_n|)$ converge comme somme de deux séries convergentes (cf. Proposition 4). Le principe de comparaison de termes positifs (Proposition 8. a.) permet alors de conclure. $\square$

Théorème 1. `[La convergence absolue implique la convergence.]`
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et on a

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. a. Supposons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$. Introduisons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
Si $u_n \in \mathbb{R}^+$, $u_n^+ = u_n$ et $u_n^- = 0$ alors que si $u_n \in \mathbb{R}^-$, $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Comme $u_n^+ \in \mathbb{R}^+$ et $u_n^- \in \mathbb{R}^+$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Or, par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^-$ convergent par comparaison de termes positifs (Proposition 8. a.) Enfin, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge comme différence des deux séries convergentes $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^-$ (cf. Proposition 4).
b. Supposons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$. Rappelons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|Im(u_n)| \leq |u_n|$. Or, par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc les séries $\sum\limits_{n\geq 0} |Re(u_n)|$ et $\sum\limits_{n\geq 0} |Im(u_n)|$ convergent par comparaison de termes positifs. Autrement dit, les séries de réels $\sum\limits_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} Im(u_n)$ convergent absolument. D'après la partie précédente a. de cette démonstration, les séries (de réels) $\sum\limits_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} Im(u_n)$ convergent. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge (cf. sous-section 1.4). Rappelons que l'on a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n)$.

c. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|\sum\limits_{n=0}^{N} u_n| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} |u_n|$ $(*)$. L'inégalité cherchée s'obtient, par passage à la limite, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité $(*)$ précédente car, par définition d'une somme de série convergente, $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} |u_n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. $\square$

Exemples d'application.

1. Soit $\alpha > 1$. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha}$.

Posons, $u_n = \frac{\cos n}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ converge par comparaison de termes positifs. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergent absolument, donc converge (Théorème 1).

2. Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi \sqrt[3]{n^3+1})$.

Posons, $u_n = \sin(\pi \sqrt[3]{n^3+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons un développement (asymptotique) de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(n\pi(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \sin\left(n\pi(1+\frac{1}{3n^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^3})\right) \\ &= \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})\right) \end{aligned}$$

D'où $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{3n^2}$ converge aussi (Proposition 4.2) et par la règle de l'équivalent positif (Proposition 10), la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi \sqrt[3]{n^3+1})$ converge absolument, donc converge (Théorème 1).

3. Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{n^{1,1}+\cos n}$.

Posons, $u_n = \frac{\sin n}{n^{1,1}+\cos n}$, $n \in \mathbb{N}$. Les termes u_0, u_1 sont bien définis ainsi que u_n, si $n \geq 2$, car $n^{1,1}+\cos n \geq n^{1,1}-1 > 0$. Donc, pour tout $n \geq 2$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^{1,1}-1}$. Comme $\frac{1}{n^{1,1}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1,1}}$, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{1,1}-1}$ converge par la règle de l'équivalent positif. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ converge par comparaison de termes positifs. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, donc converge (Théorème 1).

4.1 Produit de deux séries absolument convergentes.

Définition 2. *On appelle produit (produit de Cauchy ou produit de convolution) des deux séries réelles ou complexes* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *la série* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *où :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p,q\,\in\mathbb{N},\, p+q=n} u_p v_q$$

Théorème 2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes. Alors la série produit* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *de ces deux séries est une série absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n).$$

Démonstration. 1$^{\text{er}}$ cas. Supposons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ \ W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k,\ \text{puis } U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ et } V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

D'une part, $W_n = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \cdots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0) \leq (u_0 + \cdots + u_n)(v_0 + \cdots + v_n) = U_nV_n \leq UV$ car la suite croissante (U_n) (resp. (V_n)) est majorée par sa limite positive U (resp. V). Comme la suite (W_n) est aussi une suite croissante, (W_n) converge, car elle est majorée par UV. Notons $W = \lim_{n\to+\infty} w_k$. W est, par définition, la somme de la série de terme général w_n et on a $W \leq UV$. D'autre part, $U_nV_n \leq W_{2n}$ car

$$U_nV_n = (\sum_{p=0}^{n} u_p)(\sum_{q=0}^{n} v_q) = \sum_{(p,q)\,\in\{0,\ldots,n\}^2} u_pv_q,\ W_n = \sum_{j=0}^{n} w_j = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{p,q\,\in\mathbb{N},\, p+q=j} u_pv_q) = \sum_{p,q\,\in\mathbb{N},\, p+q\leq n} u_pv_q$$

et si $(p,q) \in \{0,\ldots,n\}^2$, $p+q \leq 2n$, les termes u_pv_q sont présents dans la somme W_{2n}.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité $U_nV_n \leq W_{2n}$, on obtient $UV \leq W$. D'où $W = UV$.

$2^{\text{ème}}$ cas. Revenons au cas général en conservant les notations U_n, V_n, U, V et W_n introduites dans l'étude du 1^{er} cas.
Notons de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|,\quad \omega_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| \text{ et } C_n = \sum_{k=0}^{n} |\omega_k|.$$

Par hypothèse, les séries (à termes positifs) $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes. Donc, d'après le 1^{er} cas, la suite (C_n) converge (i.e. la série $\sum \omega_n$ converge) et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} B_n$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leq \omega_n$ et que la série $\sum \omega_n$ converge, la série $\sum |w_n|$ converge par comparaison de termes positifs. Autrement dit, la série $\sum w_n$ converge absolument.

Notons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \{(p,q) \in \{0,\cdots,n\}^2 / p+q > n\}$. On a

$$|U_nV_n - W_n| = |\sum_{(p,q)\,\in\{0,\ldots,n\}^2} u_pv_q - \sum_{p,q\,\in\mathbb{N},\,p+q\leq n} u_pv_q| = |\sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_pv_q| \leq \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q| = A_nB_n - C_n$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_nV_n - W_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = UV$. □

Application : la fonction exponentielle.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
Préciser la valeur de $E(0)$.
2. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x+y) = E(x)E(y)$.
3. Soit $h \in]-1,1[\backslash\{0\}$. Prouver que $|\dfrac{E(h)-E(0)}{h} - 1| \leq |h| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|h|^n}{(n+2)!} \leq \dfrac{|h|}{1-|h|}$
En déduire que E est dérivable en 0 et préciser $E'(0)$.
4. Déduire de 2. et 3. que E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E'(x) = E(x)$. Conclusion ?

5 Séries alternées.

5.1 Définition.

Définition 3. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. La série réelle $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est dite alternée si $\forall n \geq n_0$, $u_nu_{n+1} \leq 0$ ou encore si la suite $((-1)^n u_n)_{n\geq n_0}$ est de signe constant. On a alors : $\forall n \geq n_0$, $u_n = (-1)^n|u_n|$ ou $\forall n \geq n_0$, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$.*

Nota Bene. Par convention, $(-1)^0 = 1$.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_nu_{n+1} = -\dfrac{1}{(n(n+1))^\alpha} < 0$. Plus simplement, les termes d'indices impairs (resp. pairs) sont strictement négatifs (resp. positifs).

5.2 Critère des séries alternées.

Théorème 3. `[Critère des séries alternées.]` *Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ soit décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge.*

Nota Bene. Cette condition suffisante de convergence est parfois appelée *critère spécial des séries alternées* ou *critère de Leibniz.*

Démonstration. Nous pouvons supposer $n_0 = 0$ dans cette preuve, car la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est aussi la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_{n+n_0}$.

Notons comme d'habitude $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $u_0 \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n|u_n|$ (l'autre cas où $u_0 \leq 0$ est analogue). Les termes d'indice pairs (resp. impairs) sont alors positifs (resp. négatifs). Remarquons déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} \leq U_{2n}$ car $U_{2n+1} - U_{2n} = u_{2n+1} \leq 0$.
Montrons que les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes. On a :

$$U_{2(n+1)} - U_{2n} = U_{2n+2} - U_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

car la suite $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc la suite (U_{2n}) est décroissante. De même, la suite (U_{2n+1}) est croissante :

$$U_{2(n+1)+1} - U_{2n+1} = U_{2n+3} - U_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty}(U_{2n}-U_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} -u_{2n+1} = 0$ car la suite (u_{2n+1}) est une suite extraite de la suite (u_n) qui, par hypothèse, converge vers 0. Les deux suites adjacentes (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent donc vers une même limite $U \in \mathbb{R}$. Un résultat classique du cours sur les suites permet alors de conclure que la suite (U_n) converge vers U, autrement dit, que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et a pour somme U. $\square$

Exemples d'application.

1. *Exemple important.* Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée car u_n est positif (resp. négatif) si n est impair (resp. pair).

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \frac{1}{n}$. Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement une suite décroissante de limite nulle, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge d'après le critère des séries alternées (Théorème 3).

Remarque : on montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

2. Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée car u_n est positif (resp. négatif) si n est pair (resp. impair). Pour étudier la monotonie de la suite $(|u_n|)$, introduisons la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$, $x \geq 1$. Cette fonction est dérivable sur $[1,+\infty[$ avec $\forall x \geq 1$, $f'(x) = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$. Donc f est décroissante sur $[e^2,+\infty[$, ce qui implique la décroissance de la suite $(|u_n|)$ à partir de l'indice $n_0 = E(e^2)+1$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi, d'après le critère des séries alternées (Théorème 3), la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série convergente.

Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

5.3 Signe et majoration des restes.

Proposition 15. *Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série alternée (convergente) telle que $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ soit décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Notons, pour tout $n \geq n_0$, $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $U = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ et $R_n = U - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n de $\sum_{n\geq n_0} u_n$. Alors :*

a. La somme U est comprise entre deux sommes partielles successives quelconques de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

b. U est du signe de u_{n_0} et $|U| \leq |u_{n_0}|$.

c. Pour tout $n \geq n_0$, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration. Cette preuve repose sur le fait que les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes (cf. Preuve du théorème 3). Supposons à nouveau $n_0 = 0$.

a. Si $u_0 \in \mathbb{R}^+$, la suite (U_{2n}) est décroissante, de limite U, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U \leq U_{2n}$. La suite (U_{2n+1}) est croissante, de limite U, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} \leq U$. Par conséquent, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} \leq U \leq U_{2n}$.
Si $u_0 \in \mathbb{R}^-$, la suite (U_{2n}) est croissante, de limite U, la suite (U_{2n+1}) est décroissante, de limite U, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} \leq U \leq U_{2n+1}$.

b. Supposons $u_0 \in \mathbb{R}^+$. D'après a., $U_1 = u_0 + u_1 \leq U \leq U_0 = u_0$. Or $U_1 = u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \in \mathbb{R}^+$, car la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Donc $U \in \mathbb{R}^+$ et $|U| = U \leq u_0 = |u_0|$.
Supposons $u_0 \in \mathbb{R}^-$. D'après a., $U_0 = u_0 \leq U \leq U_1 = u_0 + u_1$. Or $U_1 = u_0 + u_1 = |u_1| - |u_0| \in \mathbb{R}^-$, car la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Donc $U \in \mathbb{R}^-$ et $|U| = -U \leq -u_0 = |u_0|$.

c. Supposons $u_0 \in \mathbb{R}^+$. D'après a., $R_{2n} = U - U_{2n} \leq 0$ est du signe de u_{2n+1} et $|R_{2n}| = U_{2n} - U \leq U_{2n} - U_{2n+1} = |u_{2n+1}|$. Idem, $R_{2n+1} = U - U_{2n+1} \geq 0$ est du signe de u_{2n+2} et $|R_{2n+1}| = R_{2n+1} \leq U_{2n+2} - U_{2n+1} = |u_{2n+2}|$. Le cas $u_0 \in \mathbb{R}^-$ se traite de la même façon. $\square$

Exemple. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de v_n. Préciser le signe de v_1 et vérifier que $-\frac{31}{36} \leq v_1 \leq \frac{-1}{4}$.
2. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

1. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée, convergente d'après le critère des séries alternées, car la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement une suite décroissante, de limite nulle. On peut aussi remarquer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est en fait absolument convergente. Donc

v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: v_1 est la somme de la série convergente $\sum_{n\geq 1} u_n$ et pour tout $n \geq 2$, $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est le reste d'ordre $n-1$ de cette même série convergente. D'après la Proposition 15. b. v_1 est du signe de $u_1 = -1$ donc v_1 est négatif.

Posons, pour tout $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On a $U_1 = -1$, $U_2 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ et $U_3 = U_2 - \frac{1}{9} = -\frac{31}{36}$. D'après la Proposition 15. a, on a $U_3 \leq v_1 \leq U_2$ ce qui est exactement l'encadrement demandé.

2. La Proposition 15. c. permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi, par comparaison de termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geq 1} |v_n|$ converge. En d'autres termes, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument, donc converge.

5.4 Utilisation d'un développement asymptotique du terme général.

1. *Une série alternée convergente ne vérifiant pas les hypothèses du critère des séries alternées.*

Considérons la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. Notons u_n son terme général. Pour tout $n \geq 2$, $n+(-1)^n \geq n-1 \geq 1$ donc u_n est bien définie et la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série alternée car $\forall n \geq 2$, $u_n = (-1)^n |u_n|$. Comme $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Mais le critère des séries alternées n'est pas applicable car la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante à partir d'un certain indice. En effet, $|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1+(-1)^{n+1}} - \frac{1}{n+(-1)^n} = \frac{2(-1)^n - 1}{(n+1+(-1)^{n+1})(n+(-1)^n)}$ et donc, pour tout entier n pair, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Pour déterminer la nature de cette série, on effectue un développement asymptotique de u_n lorque n tend vers l'infini. Rappelons que $(1+x)^{-1} = 1 - x + o_0(x)$. On a alors :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n(1+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{(-1)^n}{n}(1+\frac{(-1)^n}{n})^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}\big(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o_{+\infty}(\frac{(-1)^n}{n})\big) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$$

Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = -\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum a_n$ est une série alternée convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{n}) \searrow 0$. De plus, comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$, la série $\sum b_n$ converge par la règle de l'équivalent de signe constant. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

Nota Bene. Cette exemple montre que le critère des séries alternées n'est qu'une condition **suffisante** de convergence.

2. *Un exemple montrant que la règle de l'équivalent ne s'applique pas si l'équivalent du terme général est alterné.*

Posons $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $n \geq 2$, et étudions la nature de la série $\sum u_n$. Effectuons comme dans l'exemple précédent un développement asymptotique de u_n lorque n tend vers l'infini. Rappelons à cet effet que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. On a alors : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$.

Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. La série $\sum a_n$ est une série alternée convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \searrow 0$. De plus, comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, la série $\sum b_n$ diverge par la règle de l'équivalent de signe constant. Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Cet exemple nous permet de noter deux erreurs de raisonnement classiques (à éviter !) :

a. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et l'on sait que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série (alternée) convergente. Il est tentant d'en déduire que la série $\sum u_n$ converge mais c'est évidemment faux puisque l'on sait que la série $\sum u_n$ diverge : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **ne sont pas de même nature.** Attention donc à une utilisation abusive de la règle de l'équivalent : l'équivalent du terme général d'une série doit être de **de signe constant !**

b. On a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est décroissante donc (?) la suite $(|u_n|)$ décroît : cette dernière affirmation est fausse car si la suite $(|u_n|)$ décroissait, la série $\sum u_n$ convergerait par le critère des séries alternées (ce qui est faux !).

Exercices.

Exercice 1. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit $u_n = e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de u_n et préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

2. Soit $v_n = \frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^5+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence absolue et la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Exercice 2. Soit (a_n) une suite à termes positifs. Soit (u_n) définie par :

$$u_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 3. Montrer que la série complexe $\sum_{n\geq 1} (1 - \frac{1-i}{n})^{n^2}$ converge absolument.

Exercice 4. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} (\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n - \frac{1}{\sqrt{e}})$.

Solution de l'exercice 1. Comme $n^2+1=(n+1)(n-1)+2$, $u_n = e^{-(n-1)-\frac{2}{n+1}} = e^{-(n-1)}\cdot e^{-\frac{2}{n+1}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{2}{n+1}} = e^0 = 1$, donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-(n-1)} = e\cdot e^{-n}.$$

Remarque importante : ce calcul montre, s'il en est besoin, que deux suites peuvent être équivalentes sans que leurs exponentielles le soient : on a $-\frac{n^2+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ *mais les deux suites* (u_n) *et* (e^{-n}) **ne sont pas équivalentes** *car* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{e^{-n}} = e$.

La série $\sum u_n$ converge par la règle de l'équivalent positif car la série géométrique $\sum e^{-n}$ (de raison $e^{-1}\in]0,1[$) converge.

2. *i) Etude de l'absolue convergence.* On a : $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^{\frac52}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc la série $\sum v_n$ ne converge pas absolument par la régle de l'équivalent positif.

ii) Etude de la convergence. On peut proposer l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 : effectuer un développement asymptotique de u_n. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\dfrac{1}{n^5})^{-\frac12}$, d'où :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{\frac{11}{2}}} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^{\frac{11}{2}}}).$$

Posons : $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{\frac{11}{2}}} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^{\frac{11}{2}}})$. La série $\sum a_n$ est une série alternée convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \searrow 0$. De plus, comme $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\frac{11}{2}}}$, la série $\sum b_n$ converge absolument par la règle de l'équivalent positif car la série de Riemann d'exposant $\frac{11}{2}>1$ converge. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge comme somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

Remarque importante. On a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et l'on sait que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série (alternée) convergente. **On ne peut pas en déduire** que la série $\sum u_n$ converge car l'équivalent $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas **de signe constant !**

Solution de l'exercice 2. Commençons par deux remarques préliminaires : on vérifie facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et on en déduit immédiatement que la suite (u_n) est croissante : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{a_n}{u_n}\in\mathbb{R}^+$ car $a_n\geq 0$ et $u_n>0$.

$\Rightarrow$ Supposons que la suite (u_n) converge. Par le lien suite-série, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, donc la série $\sum \dfrac{a_n}{u_n}$ converge. Comparons alors a_n et $\dfrac{a_n}{u_n}$. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq \ell$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq a_n = \frac{a_n}{u_n}\cdot u_n \leq \ell\,\frac{a_n}{u_n}.$$

Par conséquent, la série $\sum a_n$ converge par comparaison de termes généraux positifs car la série $\sum \ell\cdot\dfrac{a_n}{u_n}$ converge.

$\Leftarrow$ Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq u_0>0$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_{n+1}-u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{1}{u_0}\cdot a_n$$

Par conséquent, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge par comparaison de termes généraux positifs car la série $\sum \dfrac{1}{u_0}\cdot a_n$ converge.

Finalement la suite (u_n) converge par le lien suite-série.

Solution de l'exercice 3. Il s'agit de prouver que la série des *modules* converge. Rappelons que $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $|z^N| = |z|^N$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On vérifie que $|u_n| = |1-\dfrac{1-i}{n}|^{n^2} = |(1-\dfrac{1}{n})+\dfrac{1}{n}i|^{n^2} = e^{\frac{n^2}{2}\ln(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})}$.

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$, on obtient :

$$\ln(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}) = -\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac12(-\frac{2}{n})^2 + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) = -\frac{2}{n}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}).$$

D'où $|u_n| = e^{-n+o_{+\infty}(1)} = e^{-n}\cdot e^{o_{+\infty}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

Donc la série $\sum |u_n|$ converge par la règle de l'équivalent positif car la série géométrique $\sum e^{-n}$, de raison $e^{-1}\in[0,1[$, converge.

Solution de l'exercice 4. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = (\cos(\dfrac{1}{\sqrt{n}}))^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{n\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))} - e^{-\frac12}$.

Ecrivons le développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac1n$ de $\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

Sachant que $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^4)$ et que $\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) &= \ln(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}))\\
&= (-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2})-\frac12(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2})^2+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})\\
&= (-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2})-\frac12(-\frac{1}{2n})^2+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

D'où $u_n = e^{-\frac12-\frac{1}{12n}+o_{+\infty}(\frac1n)} - e^{-\frac12} = e^{-\frac12}(e^{-\frac{1}{12n}+o_{+\infty}(\frac1n)}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-\frac12}}{12}\cdot\frac1n$ car $e^x-1\underset{x\to0}{\sim} x$. Donc la série $\sum u_n$ diverge par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif ici) car la série de Riemann $\sum\frac1n$ diverge.