Révisions sur les suites réelles.

On revoit certains points du cours de PCSI sur les suites réelles :

1 Convergence et ordre

Commençons par rappeler la définition de la convergence d'une suite réelle :

Définition 1. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que u converge ℓ (tend vers ℓ, a pour limite ℓ) si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$. La suite u est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 1. *Dans la définition ci-dessus, l'entier N dépend en général de ε et les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes.*

Proposition 1. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.*
1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < \ell$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $u_n \geq a$.
2) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $u_n \leq b$.

Démonstration. 1) Soit $\varepsilon = \ell - a > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $-(\ell - a) \leq u_n - \ell \leq \ell - a$, et on a donc, pour tout $n \geq N_1$, $u_n \geq a$.
2) Même méthode en considérant $\varepsilon = b - \ell > 0$. □

Proposition 2. `[Passage à la limite dans une inégalité]` *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes, de limites respectives U et V. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$, alors $U \leq V$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant $U > V$. On rappelle que la suite $(u_n - v_n)$ converge alors vers $\ell = U - V > 0$. En considérant la proposition précédente 1) avec $a = \frac{\ell}{2} > 0$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n - v_n \geq a > 0$ et donc, pour tout $n \geq N'$, $u_n > v_n$, en contradiction avec l'hypothèse par exemple pour $n = \max(N, N')$. □

Proposition 3. `[Théorème d'encadrement ou des gendarmes]` *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :*
i) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$,
ii) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ (resp. $N_2 \in \mathbb{N}$) tel que $\forall n \geq N_1$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$ (resp. $\forall n \geq N_2$, $\ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$). Posons $N_3 = \max(N, N_1, N_2)$. Alors

$$\forall n \geq N_3,\ \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

d'où la convergence de (v_n) vers ℓ car $\forall n \geq N_3$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Remarque 2. *Il ne faut pas confondre le théorème d'encadrement qui permet de conclure (sous hypothèses) à l'existence d'une limite (pour (v_n)) avec le «passage à la limite» de la proposition 2 où la conclusion est une comparaison de limites de suites supposées convergentes.*

2 Monotonie d'une suite réelle

2.1 Définitions

Définition 2. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
- *On dit que u est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).*
- *On dit que u est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).*
- *On dit que u est monotone (resp. strictement monotone) si et seulement si u est (strictement) croissante ou u est (strictement) décroissante.*

Définition 3. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
- *Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de la suite u (ou que M majore u) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*
- *Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est un minorant de la suite u (ou que m minore u) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*
- *On dit que u est majorée (resp. minorée) s'il existe un réel M (resp. m) majorant (resp. minorant) la suite u.*
- *On dit que u est bornée si u est majorée ou minorée, ou de manière équivalente s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C$, en d'autres termes si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Définition 4. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
1. On dit que la suite u tend (converge, a pour limite) $+\infty$ si $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq B$.
Si c'est le cas, on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
2. On dit que la suite u tend (converge, a pour limite) $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq A$.
Si c'est le cas, on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Remarque 3. *Dans la définition précédente on peut remplacer dans 1. $\forall B \in \mathbb{R}$ par $\forall B \in \mathbb{R}^+$ et dans 2. $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A \in \mathbb{R}^-$.*

2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 1. *1. Toute suite réelle croissante et majorée converge et toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
2. Toute suite réelle décroissante et minorée converge et toute suite réelle décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
1. a. Supposons u majorée. Soit $S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{U} = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\mathcal{U}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > S - \varepsilon$. Or u est croissante, donc $\forall n \geq N$, $S - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq S < S + \varepsilon$, c'est-à-dire $\forall n \geq N$ $|u_n - S| < \varepsilon$. On reconnait la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S$.
1. b. Supposons u non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Or u est croissante, donc $\forall n \geq N$, $u_n \geq A$ car $u_n \geq u_N$. On reconnait la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On montre de même que u converge vers $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ si u est minorée et vers $-\infty$ si u n'est pas minorée. □

Remarque 4. *1. Soit ℓ la limite d'une suite croissante majorée. On a en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ car $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*
2. Soit ℓ la limite d'une suite décroissante minorée. On a en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$ car $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Application. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
1. Vérifier que u est strictement croissante. En déduire en raisonnant par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On pose $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.
3. Montrer, en utilisant le théorème de Cesàro avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

2.3 Suites adjacentes

Définition 5. *Deux suites réelles u et v sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si la suite $v - u$ tend vers 0.*

Remarque 5. *Soient u et v deux suites réelles adjacentes avec u croissante et v décroissante. Soit $w_n = v_n - u_n$, $n \in \mathbb{N}$. La suite (w_n) est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0} + \underbrace{(u_n - u_{n+1})}_{\leq 0}$ est négatif, et de limite nulle par hypothèse. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n$.*

Proposition 4. *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors u et v convergent vers une même limite réelle.*

Démonstration. Supposons u croissante et v décroissante. D'après la remarque précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. D'où la convergence de la suite u car u est croissante et majorée par v_0, et la convergence de la suite v car u est décroissante et minorée par u_0. Posons $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $V = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Alors $U = V$ car $V - U = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. □

Remarque 6. *1. Soient u et v deux suites réelles adjacentes avec u croissante et v décroissante. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a $\forall n$, $u_n \leq \ell$ et $\ell \leq v_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.*
2. Soient u et v deux suites réelles avec u est croissante, v décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
Alors u et v convergent vers U et V tels que $U \leq V$.

Proposition 5. `[Propriété des segments emboîtés]` *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Alors il existe un unique réel ℓ tel que $\{\ell\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, c'est-à-dire un unique réel ℓ appartenant à tous les segments $[a_n, b_n]$.

Démonstration. On constate que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et on en déduit que le réel ℓ cherché est la limite commune des suites a et b. $\square$

Application. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $(u_0, v_0) \in]0, +\infty[^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\,,\; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

3 Rappels sur les suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.1 Définition de la suite.

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ une application (on dit que I est *stable* par f) et $a \in I$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite dont *tous les termes sont des réels de* I.

Exemple important : le cas particulier des suites récurrentes affines dites **arithmético-géométriques**.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Calculer u_n en fonction de n, a et b.

3.2 Monotonie et recherche de la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On rappelle que :

1. a. Si f est croissante sur I, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Plus précisement :

- si $u_0 \leq u_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite u est croissante.
- si $u_0 \geq u_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$: la suite u est décroissante.

1. b. Si f est décroissante sur I, $g = f \circ f$ est croissante sur I et les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ associées à g sont donc monotones d'après 1. a.

2. *Etude sur I du signe de $d(x) = f(x) - x$.*

2. a. Si la courbe de f est au dessus de la droite $D : y = x$, c'est-à-dire si $\forall x \in I$, $d(x) = f(x) - x \geq 0$,
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. b. Si la courbe de f est en dessous de la droite $D : y = x$, c'est-à-dire si $\forall x \in I$, $d(x) = f(x) - x \leq 0$,
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. On suppose ici que I est un intervalle *fermé* de $\mathbb{R}$ et que $f : I \to I$ est une application *continue* sur I.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite, notée ℓ, appartient à I et on a : $f(\ell) = \ell$.
En d'autres termes, la limite (éventuelle) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être qu'un "point fixe" de f dans I,
c'est-à-dire une solution dans I de l'équation d'inconnue x : $f(x) = x$.

4. *Exercices.*

1. Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$.

2. Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [-1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

appelées suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

4.1 Structure et dimension de $E_{a,b}$.

Théorème 2. *$E_{a,b}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. Vérifions d'abord que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K}$-ev des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$) :
i) $E_{a,b}$ est non vide car la suite nulle θ appartient clairement à $E_{a,b}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \theta_{n+2} = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = a\theta_{n+1} + b\theta_n.$$

ii) Soient $(u,v) \in E_{a,b}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors $w = \alpha u + \beta v \in E_{a,b}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha(au_{n+1} + bu_n) + \beta(av_{n+1} + bv_n) = a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= \alpha w_{n+1} + \beta w_n. \end{aligned}$$

Déterminons la dimension de $E_{a,b}$ en remarquant qu'une suite de $E_{a,b}$ est bien définie par la valeur de ses deux premiers termes :

Méthode n^o 1. Soient U (resp. V) la suite de $E_{a,b}$ telle que $U_0 = 1$, $U_1 = 0$ (resp. $V_0 = 0$, $V_1 = 1$). Alors (U,V) est une base de $E_{a,b}$:

i) La famille (U,V) est une famille libre de $E_{a,b}$. En effet, soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha U + \beta V = \theta$ (suite nulle), c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha U_n + \beta V_n = 0.$$

En considérant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient immédiatement $\alpha = \beta = 0$.

ii) La famille (U,V) est une famille génératrice de $E_{a,b}$. Soit $u \in E_{a,b}$. On a : $u = u_0 U + u_1 V$, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 U_n + u_1 V_n\ (*)$$

Montrons $(*)$ en montrant par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n = u_0 U_n + u_1 V_n$ et $u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = u_0 \cdot 1 + u_1 \cdot 0$ et $u_1 = u_0 \cdot 0 + u_1 \cdot 1$.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Il suffit pour cela d'établir que $u_{n+2} = u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2}$ ce qui est vrai car

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n = a(u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1}) + b(u_0 U_n + u_1 V_n) \\ &= u_0(aU_{n+1} + bU_n) + u_1(aV_{n+1} + bV_n) = u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2} \end{aligned}$$

□

Méthode n^o 2. On vérifie que l'application $f : E_{a,b} \to \mathbb{K}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (c'est-à-dire une bijection linéaire). D'où $\dim_{\mathbb{K}} E_{a,b} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^2 = 2$.

4.2 Suites géométriques et base de $E_{a,b}$.

Soit $r \in \mathbb{K}^*$. La suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0$.
L'équation $r^2 - ar - b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{K}^*$, est appelée *équation caractéristique* (e.c) (des suites de $E_{a,b}$).
Notons Δ le discriminant de cette équation du second degré et distinguons trois cas :

1$^{\text{er}}$ cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Delta \neq 0$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta > 0$.

L'e.c. admet deux solutions dans $\mathbb{K}$ distinctes notées r_1, r_2. On vérifie facilement que $((r_1^n), (r_2^n))$ est une famille libre de $E_{a,b}$.
C'est donc une base de $E_{a,b}$ car $\dim_{\mathbb{K}} E_{a,b} = 2$ (famille libre maximale). Ainsi

$$u \in E_{a,b} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 / \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

2$^{\text{e}}$ cas : ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et $\Delta = 0$.

Dans ce cas l'e.c. admet une seule solution $r_0 = \frac{a}{2}$ (et $(r_0^n) \in E_{a,b}$). On constate que la suite $(nr_0^n) \in E_{a,b}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)r_0^{n+2} - a(n+1)r_0^{n+1} - bnr_0^n \quad = \quad nr_0^n \underbrace{(r^2 - ar - b)}_{=0} + r_0^{n+1} \underbrace{(2a - r_0)}_{=0} = 0$$

On vérifie que la famille $((r_0^n), (nr_0^n))$ est une famille libre de $E_{a,b}$, donc une base de $E_{a,b}$ car $\dim_{\mathbb{K}} E_{a,b} = 2$ (famille libre maximale). Ainsi

$$u \in E_{a,b} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 / \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n = (\alpha + \beta n) r_0^n.$$

3$^{\text{e}}$ cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta < 0$. Déterminons donc les suites *réelles* de $E_{a,b}$.

L'e.c. admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$, $\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$ et θ non multiple entier de π. D'après le 1$^{\text{er}}$ cas, les deux suites $(\rho^n e^{in\theta})$ et $(\rho^n e^{-in\theta})$ sont des suites complexes de $E_{a,b}$. Comme $E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire, on déduit des formules d'Euler que les deux suites $(\rho^n \cos(n\theta))$ et $(\rho^n \sin(n\theta))$ sont des suites réelles de $E_{a,b}$ car

$$\rho^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2}(\rho^n e^{in\theta} + \rho^n e^{-in\theta}) \text{ et } \rho^n \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}(\rho^n e^{in\theta} - \rho^n e^{-in\theta}).$$

On vérifie que ces deux suites forment une famille libre de $E_{a,b}$, donc une base de $E_{a,b}$ car $\dim_{\mathbb{R}} E_{a,b} = 2$ (famille libre maximale). Ainsi

$$u \in E_{a,b} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\rho^n \cos(n\theta) + \beta\rho^n \sin(n\theta) = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

4.3 Exercices.

1. Déterminer $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$(resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.
2. Déterminer $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$(resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n$.
4. Déterminer $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
5. `[Suite de Fibonacci]` Déterminer $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
6. Déterminer $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$.
7. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. Calculer u_n sachant que : $u_0 = a$, $u_1 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
8. `[Généralisation]` Déterminer $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$.