Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n° 1 (12.09.2024).**

I. Définitions.

1. Définition d'une norme sur un espace vectoriel E.

2. Définitions d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et de sa norme associée.

3. Enoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

4. Définition des normes 1,2 et infinie sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

II. Démonstrations. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Prouver que si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell \in E$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

III. Exercices.

Exercice 1. *Une généralisation du théorème de Cesàro.*
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty.$$

On étudie la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vérifier que $\forall n > N$, $|v_n - \ell| \leq \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exercice 2. `[Constante d'Euler]` **1.** Justifier que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Remarque : la limite de la suite u, notée γ, est la «*constante d'Euler*». En posant $\varepsilon_n = u_n - \gamma$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(n) + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

3. *Applications.*

3. a. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Retrouver cette valeur en utilisant le cours sur les sommes de Riemann.

Exercice 3. Soient $a > 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que la suite (S_n) converge. *Considérer les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).*

2. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{ak+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{ak}\,dx$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{an+a}}{1+x^a}\,dx$.

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent.
Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour tout $f \in E$, $N(f) = \left(f(\frac{1}{2})^2 + \int_0^1 e^x f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
Prouver que N est une norme sur E.

Exercice 6. $\triangleright$ Si $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$. On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f'\|_\infty + |f(0)|$.
1. Vérifier que N' est une norme sur E.
2. Montrer que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N'(f)$.
3. Montrer que N' et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes. *Indication : considérer $f_n(x) = \sin(\pi n x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$.*