Devoir de mathématiques n° 1.

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, de partie réelle x et de partie imaginaire y. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = (1 + \frac{z}{n})^n$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(|Z_n|) = \frac{n}{2} \ln(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2})$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} |Z_n| = e^x$.

2. Vérifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, Re $(1 + \frac{z}{n}) > 0$.

En déduire que pour tout $n \geq N$, $n \arctan(\frac{y}{n+x})$ est un argument du nombre complexe Z_n.

3. Prouver finalement que $\lim\limits_{n \to +\infty} Z_n = e^z$.

Exercice 2. Dans cet exercice les suites considérées sont des suites de réels.

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

$\triangleright$ Le but de l'exercice est de prouver qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy.

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

2. Montrer qu'une suite de Cauchy est une suite bornée.

3. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $U_n = \{u_n, u_{n+1}, \ldots\} = \{u_{n+p} / p \in \mathbb{N}\}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de : $i_n = \inf U_n$ et $s_n = \sup U_n$.

3. b. Prouver que les suites $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

3. c. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n - i_n) = 0$.

3. d. Prouver finalement que la suite u converge.

Exercice 3. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Vérifier que la suite u est monotone et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = e^{-u_n}$ et $w_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

En déduire un équivalent simple de v_n, quand n tend vers $+\infty$ en utilisant le théorème de Cèsaro avec la suite (w_n).

3. Déterminer un équivalent simple de u_n, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur E telle que : $\forall (f,g) \in E^2$, $N(fg) = N(f)N(g)$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A^2) = N(A)^2.$$

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tous $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$x^p = (x_1^p, \cdots, x_n^p).$$

On rappelle que pour tout $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|y\|_\infty = \max(|y_1|, \cdots, |y_n|)$.

3. a. Soient $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\|x^p\|_\infty = \|x\|_\infty^p$.

3. b. On rappelle que deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Montrer que $\| \, \|_\infty$ est la seule norme N sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N(x^2) = N(x)^2$.

Indications : Soit N une norme vérifiant $(*)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Utiliser la définition de l'équivalence de N et $\| \, \|_\infty$ avec x^{2^k} et faire tendre k vers $+\infty$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Indication : raisonner par l'absurde en considérant des suites extraites.

2. Soit $U_p = \frac{1}{p}(I_3 + A + \cdots + A^{p-1})$, $p \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Simplifier U_{3p}, $p \in \mathbb{N}^*$, et U_{3p+1}, U_{3p+2}, $p \in \mathbb{N}$.

2. b. Etudier $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p$.

Partie facultative.

Exercice 6. Soit (a_n) une suite réelle positive telle que pour tout $t \in [0,1[$, la suite $(a_n t^n)$ est majorée.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$.

2. Démontrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n x^n = 0$.

Exercice 7. `[Distance d'un vecteur à une partie non vide d'un evn].`

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

1. Soit $x \in E$. Justifier l'existence de la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-a\|/a \in A\}$.

Cette borne inférieure, notée $d(x,A)$, s'appelle la "distance de x à A".

2. Soit $(x,y) \in E^2$. Vérifier que $\forall a \in A$, $d(x,A) \leq \|y-a\| + \|x-y\|$.

En déduire que $d(x,A) - \|x-y\| \leq d(y,A)$, puis que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$.

3. On suppose que A est une partie convexe de E. Soient $(x,y) \in E^2$ et $t \in [0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $(a,b) \in A^2$ tel que $\|x-a\| \leq d(x,A) + \varepsilon$ et $\|y-b\| \leq d(y,A) + \varepsilon$.

En déduire que $d((1-t)x + ty, A) \leq (1-t)d(x,A) + td(y,A) + \varepsilon$ et finalement que :

$$d((1-t)x + ty, A) \leq (1-t)d(x,A) + td(y,A).$$