Des exercices de la feuille n° 3 avec indications et/ou solutions.

Exercice 2. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$ converge et calculer sa somme.

Indications. Posons $u_n=\frac{1}{4n^2-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

i) Convergence. Utiliser $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et conclure avec la règle de l'équivalent positif.

ii) Somme. Remarquer que $u_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$. En déduire que $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$ et que la somme cherchée est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{2}{n(n+1)})$ converge et calculer sa somme.

Indications. Posons $u_n=\ln(1-\frac{2}{n(n+1)})$, $n\geq 2$.

i) Convergence. Utiliser $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$ et conclure avec la règle de l'équivalent de signe constant (négatif ici).

ii) Somme. On utilise les propriétés de la fonction ln. Remarquer que :

$$u_n=\ln(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)})=\ln(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)})=(\ln(n+2)-\ln(n+1))-(\ln(n)-\ln(n-1)).$$

En déduire que $U_n=\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k=\sum_{k=2}^n(\ln(k+2)-\ln(k+1))-\sum_{k=2}^n(\ln(k)-\ln(k-1))=\ln(n+3)-\ln 3-\ln(n)=-\ln(3)+\ln(1+\frac{3}{n})$.
La somme cherchée est égale à $-\ln(3)$.

Exercice 5. 1. Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$. Vérifier que $\arctan a-\arctan b=\arctan(\frac{a-b}{1+ab})$.
2. Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$ converge et calculer sa somme.

Solution. 1. En effet, $\arctan a-\arctan b\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (car $\arctan a\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\arctan b\in]0,\frac{\pi}{2}[$) et

$$\tan(\arctan a-\arctan b)=\frac{\tan(\arctan a)-\tan(\arctan b)}{1+\tan(\arctan a)\tan(\arctan b)}=\frac{a-b}{1+ab}.$$

2. *i) Convergence de la série.* Posons $u_n=\arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$.
On a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ car $\arctan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ converge par la règle de l'équivalent positif car la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge.
ii) Somme de la série. Comme $(n+1)-n=1$ et $1+n+n^2=1+(n+1)n$, d'après 1. $u_n=\arctan(n+1)-\arctan(n)$.
Par telescopage $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N u_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N(\arctan(n+1)-\arctan(n))=\lim_{N\to+\infty}\arctan(N+1)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. 2. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel(s) que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2})$ converge et préciser alors la valeur de sa somme.

Solution. Posons $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$.
Convergence. Effectuons un développement asymptotique de u_n en utilisant : $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_0(x^2)$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}+a\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}} \\ &= \sqrt{n}+a\sqrt{n}(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}))+b\sqrt{n}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})) \\ &= (1+a+b)\sqrt{n}+(\frac{a}{2}+b)\frac{1}{\sqrt{n}}-(\frac{a}{8}+\frac{b}{2})\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) \end{aligned}$$

Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ d'où $1+a+b=0$. Et si cette condition est vérifiée, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ ne peut converger que si $\frac{a}{2}+b=0$. En effet, si $c=\frac{a}{2}+b\neq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ diverge par la règle de l'équivalent de signe constant car $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}c\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ converge si et seulement si $1+a+b=0$ et $\frac{a}{2}+b=0$, c'est-à-dire si et seulement si $a=-2$ et $b=1$ (car la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge).

Somme. On a donc : $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Et par telescopage :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{n+1} = -1 + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

La somme cherchée est donc égale à -1.

Exercice 7. On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = (\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)})^n$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.

Solution. 1. $u_n = e^{n \ln(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)})} = e^{n \ln(\frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)})} = e^{n \ln(1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln(1+\frac{1}{n}))}$.
Posons $a_n = \frac{1}{\ln(n)} \ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \cdot 0 = 0$ et $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, on a :

$$n \ln(1 + a_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n \ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(1 + a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$ et finalement, comme la fonction exponentielle est continue en 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln(1+a_n)} = e^0 = 1.$$

2. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(1 + a_n) = 0$ (voir 1.) et $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_n - 1) = \frac{1}{n}(e^{n \ln(1+a_n)} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(1 + a_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)}.$$

On montre en utilisant le critère de comparaison série-intégrale que la série (de Bertrand) $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{1}{n \ln(n)}$ diverge (voir cours). D'où la divergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$ par la règle de l'équivalent positif.

Exercice 8. Déterminer la nature des séries de termes généraux : 3. $\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$, 5. $\frac{4^n - n}{5^n + 3n^6}$, 6. $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, 8. $(1 - \frac{1}{\ln n})^n$. 11. $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Indications. 3. $\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. 5. $\frac{4^n - n}{5^n + 3n^6} \underset{n \to +\infty}{\sim} (\frac{4}{5})^n$. 6. $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 8. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 (1 - \dfrac{1}{\ln n})^n = 0$. 11. $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$.

Exercice 9. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
1. $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx$, 10. $\arccos(\frac{n}{n+1})$, 12. $(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} - (\arctan n)^{\frac{3}{5}}$, 20. $|\sin(\pi \sqrt[4]{n^4+1})|^{\frac{3}{4}}$.

Indications. 1. La série converge par comparaison. On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$.
10. La série diverge par la règle de l'équivalent positif. Justifier que $\arccos(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ en utilisant le $DL_2(0)$ de cos.
Autre méthode : comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \arccos(\dfrac{n}{n+1}) = \arccos 1 = 0$, $\arccos(\frac{n}{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sin(\arccos(\frac{n}{n+1}))$ (à calculer)...
12. La série diverge par la règle de l'équivalent positif. La justification est un peu technique. Rappelons tout d'abord que

$$\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Posons $u_n = (\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} - (\arctan n)^{\frac{3}{5}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = (\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} - (\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n})^{\frac{3}{5}} = (\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} \left(1 - (1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{n})^{\frac{3}{5}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{n} \text{ avec } C = \cdots.$$

20. La série converge par la règle de l'équivalent positif. Posons $u_n = |\sin(\pi \sqrt[4]{n^4+1})|^{\frac{3}{4}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$|\sin(\pi \sqrt[4]{n^4+1})| = |\sin(n\pi + \frac{\pi}{4n^3} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^3}))| = |\sin(\frac{\pi}{4n^3} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^3}))| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n^3}.$$

Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{9}{4}}}$ avec $C = \cdots$.

Exercice 14. Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. *Indication : on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis avec* $\ln(f)$ *entre* n *et* $n+1$.

2. Préciser la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$.

Solution. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $\ln(f)$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$, le théorème des accroissements finis nous donne l'existence d'(au moins) un réel $c_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$\ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) = ((n+1)-n)(\ln(f))'(c_n) = \frac{f'(c_n)}{f(c_n)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n > n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ et par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) = -\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(f(n+1))-\ln(f(n))} = 0.$$

2. $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ est une série à termes strictement positifs, convergente par le critère de D'Alembert car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 0 \in [0, 1[$.

Exercice 15. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance entière de 2 et $u_n = 0$ sinon.
Préciser la nature de la série $\sum u_n$.

Indications. On revient à la définition de la convergence d'une série : soit $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Vérifier que $U_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.
En déduire que la suite (croissante) (U_n) converge.

Exercice 21. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$.
On suppose que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ convergent. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ converge.

Indications. $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ avec $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$.

Exercice 27. Soit $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$. Soit $u_n = n(f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n})) - 2f'(0)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Solution. Comme $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$, f admet le développement limité à l'ordre 3 en 0 (formule de Taylor-Young) :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o_0(x^3).$$

On en déduit après simplifications que : $u_n = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3n^2} + o_{+\infty}(\dfrac{1}{n^2})$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge comme somme d'une série convergente (de Riemann à une constante multiplicative près) et d'une série absolument convergente.

Remarque. On peut utiliser la règle de l'équivalent de signe constant si $\frac{f^{(3)}(0)}{3} \neq 0$ car dans ce cas : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f^{(3)}(0)}{3n^2}$.

Rappel. Si $\alpha > 1$, la série $\sum o_{+\infty}(\frac{1}{n^\alpha})$ converge absolument.

Exercices supplémentaires.

Exercice 1'. Soit $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+5)}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+5)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1\}$.

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x+5}$.

3. Déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution. **1.** On peut utiliser $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ et la règle de l'équivalent positif ou $u_n \leq \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et le principe de comparaison de termes positifs, sachant que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge.

2. Par un calcul classique d'identification de polynômes, on obtient $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{12}$.
On peut aussi calculer plus rapidement a, b, c en admettant la décomposition en éléments simples donnée. On a :
$a = \lim\limits_{x\to-1,\, x\neq-1} (x+1)f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{(x+2)(x+5)} = \dfrac{1}{4}$, $b = \lim\limits_{x\to-2,\, x\neq-2} (x+2)f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{(x+1)(x+5)} = -\dfrac{1}{3}$ et
$c = \lim\limits_{x\to-5,\, x\neq-5} (x+5)f(x) = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{12}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$. D'après **2.** on a :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = aS_N + b(S_N - 1 + \frac{1}{N+2}) + c(S_N - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} + \frac{1}{N+5})$$

ou encore, comme $a + b + c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = b(-1 + \frac{1}{N+2}) + c(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} + \frac{1}{N+5})$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = -b + c(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}.\frac{25}{12} = \frac{23}{144}. \end{aligned}$$

Exercice 2'. Déterminer la nature des séries : **a)** $\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1})$, **b)** $\sum_{n\geq 0} n^{2024}e^{-\sqrt{n}}$, **c)** $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+2n+5}}$.

Indications. **a)** Vérifier que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Cette série converge par la règle de l'équivalent positif.

b) Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} n^2.n^{2024}e^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{2026}e^{-\sqrt{n}} = 0$. Cette série converge donc par le critère de Riemann.

c) Remarquons d'abord que $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+2n+5}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$. Cette série converge aussi par le critère de Riemann, car, par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1,1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+2n+5}} = \lim_{n\to+\infty} n^{1,1}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{0,4}} = 0.$$

Exercice 3'. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Indications. La série diverge par la règle de l'équivalent positif : justifier que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ par encadrement et en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 4'. 1. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Justifier que $\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x\, dx$.
En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec : $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

Solution. 1. On utilise la croissance de ln sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in [k-1, k]$, $\ln(x) \leq \ln(k)$ d'où par propriété de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \ln(x)\, dx \leq \int_{k-1}^{k} \ln(k)\, dx = \ln(k).$$

De même $\ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(x)\, dx$. Soit $n \geq 2$. On encadre $s_n = \ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k$ en utilisant l'encadrement précédent de $\ln(k)$ et la relation de Chasles. On obtient :

$$\int_{1}^{n} \ln(x)\, dx \leq s_n \leq \int_{2}^{n+1} \ln(x)\, dx.$$

Une primitive de ln sur $]0, +\infty[$ est la fonction : $x \mapsto x\ln(x) - x$. D'où $[x\ln(x) - x]_1^n \leq s_n \leq [x\ln(x) - x]_2^{n+1}$, c'est-à-dire

$$n\ln(n) - n + 1 \leq s_n \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (2\ln(2) - 2).$$

ou encore en divisant par $n\ln(n) > 0$:

$$a_n = 1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{s_n}{\ln(n)} \leq b_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} - \frac{2\ln(2) - 1}{n\ln(n)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$ (écrire $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$) d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n\ln(n)} = 1$ par le théorème de limite par encadrement (des gendarmes). Autrement dit, $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

2. Classiquement $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ diverge par la règle de l'équivalent positif car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.