Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 3.

Exercice 1. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \ln(1-\dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 4. Prouver que la série $\sum_{n\geq 2} \ln(1-\dfrac{2}{n(n+1)})$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5. 1. Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$. Vérifier que $\arctan a - \arctan b = \arctan(\dfrac{a-b}{1+ab})$.
2. Justifier que $\sum_{n\geq 0} \arctan(\dfrac{1}{1+n+n^2})$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6. 1. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel(s) que la série $\sum_{n\geq 1}(\ln n + a\ln(n+1)+b\ln(n+2))$ converge et calculer alors sa somme.
2. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel(s) que la série $\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1})+b\sqrt{n+2})$ converge et calculer alors sa somme.

Exercice 7. Soit, pour $n\geq 2$, $u_n = (\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)})^n$.
1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n-1}{n}$.

Exercice 8. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
1. $(-1)^n n^2$, 2. $n\arcsin(\frac{1}{n})$, 3. $\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})$, 4. $n\ln(1+\frac{1}{n})-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$, 5. $\frac{4^n-n}{5^n+3n^6}$, 6. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, 7. $\frac{n^n}{2^{n^2}}$, 8. $(1-\frac{1}{\ln n})^n$, 9. $(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}$, 10. $(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$, 11. $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, 12. $\frac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{\ln n})}$, 13. $\frac{(n!)^3}{n^n(2n)!}$, 14. $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$, 15. $\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 16. $(\frac{3}{\ln n})^n$, 17. $\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 18. $\frac{n^{\ln n}}{n!}$, 19. $1-\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}$.

Exercice 9. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
1. $\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin x}\,dx$ 2. $(\ln(\frac{n+1}{n-1}))^2$ 3. $\frac{1}{(\ln n)^n}$ 4. $(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$ 5. $\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ 6. $e-(1+\frac{1}{n})^n$ 7. $\tan(\frac{1}{n})-\sin(\frac{1}{n})$ 8. $(\mathrm{ch}\,\frac{1}{n})^{-n^3}$ 9. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 10. $\arccos(\frac{n}{n+1})$ 11. $e^{-\sqrt[3]{n}}$ 12. $(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}}-(\arctan n)^{\frac{3}{5}}$ 13. $(n\sin\frac{1}{n})^n$ 14. $n^{-\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$ 15. $(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})^n$ 16. $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 17. $\ln(\mathrm{sh}\,\frac{1}{\sqrt{n}})-\ln(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 18. $n^{\frac{1}{n^2}}-1$. 19. $2^{-\sqrt{\ln n}}$, 20. $|\sin(\pi\sqrt[4]{n^4+1})|^{\frac{3}{4}}$, 21. $\frac{e^{-n}}{3+\sin n}$, 22. $\frac{n^2}{2^n+n}$, 23. $\sqrt{\ln(2n+1)}-\sqrt{\ln(2n)}$, 24. $n^a(1-\cos(\frac{1}{n}))$, $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 10. Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(n+1)^a-n^a}{n^b}$ converge.

Exercice 11. Soient $a>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Etudier la nature des séries de terme général : 1. $\dfrac{1+a^n}{n^2}$, 2. $na^{\sqrt{n}}$, 3. $a^n(\ln(n+1)-\ln n)$, 4. $\dfrac{\mathrm{sh}\,n}{a^n}$, 5. $\dfrac{a^n\ln n}{n^\alpha}$. 6. $a^n\dfrac{n!}{n^n}$, 7. $(\mathrm{ch}\,n)^\alpha-(\mathrm{sh}\,n)^\alpha$, 8. $\arctan(1+\frac{1}{n^a})-\frac{\pi}{4}$, 9. $\alpha\sin(\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{1}{n})$.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que les séries $\sum_{n\geq 0}u_{2n}$ et $\sum_{n\geq 0}u_{2n+1}$ convergent.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n+1}$.

Application. Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}(3+(-1)^n)^n$.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite à termes positifs.
1. Prouver que les séries de termes généraux u_n et $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.
2. a. Prouver que les séries de termes généraux u_n et $\ln(1+u_n)$ sont de même nature.
2. b. Prouver que $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)=+\infty$.

Exercice 14. Soit $f\in\mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R}^{+*})$ telle que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$.
1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. *Indication : on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis avec* $\ln(f)$ *entre* n *et* $n+1$.
2. Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 1}f(n)$.

Exercice 15. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{1}{n}$ si n est une puissance entière de 2 et $u_n=0$ sinon.
Préciser la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 16. Soit $a > 0$. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2})u_n$.
Vérifier que u est une suite de réels strictement positifs et que la suite $(\ln(nu_n))$ converge en utilisant le lien suite-série.
En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 17. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en utilisant le lien suite-série.

Exercice 18. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en utilisant le lien suite-série.

Exercice 19. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
1. Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n^{\frac{1}{5}} v_n^{\frac{4}{5}}$ converge.

Exercice 20. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ convergent.

Exercice 21. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le b_n \le c_n$.
On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\ge 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\ge 0} c_n$ convergent. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} b_n$ converge.

Exercice 22. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}\ (\text{ou } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \le \frac{v_{n+2}}{v_n}).$$

Prouver que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 23. Soit $\alpha > 1$. Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer un équivalent simple de R_n, en encadrant R_n par deux intégrales de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.
2. Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} R_n$.

Exercice 24. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ contractante, c'est-à-dire qu'il existe $C \in [0, 1[$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \le C|x - y|.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \le C^n |u_1 - u_0|$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 25. Soit $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n$ une série absolument convergente, de somme U. On pose : $v_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$, $n \in \mathbb{N}$.
Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} v_n$ converge absolument et exprimer sa somme en fonction de U.

Exercice 26. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n^2$ converge. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n u_{n+1}$ converge.

Exercice 27. Soit $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$. Soit $u_n = n(f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n})) - 2f'(0)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\ge 1} u_n$.

Exercice 28. Soit $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $n \in \mathbb{N}$. La série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n$ est-elle absolument convergente, convergente ?

Exercice 29. Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \ln(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}})$.

Exercice 30. Soit $\alpha > 0$. Etudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 31. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\ge 1} (-1)^n n^\alpha (\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}))$.

Exercice 32. Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

Exercice 33. Soit $\alpha > 0$. Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

Exercice 34. Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\ge 1} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin\frac{1}{n}$.

Exercice 35. Etudier la nature de la série complexe $\displaystyle\sum_{n\ge 1} (1 - \frac{1-i}{n})^{n^2}$ où $i^2 = -1$.

Exercice 36. Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{n^2}{\sqrt{n^5 + 1}}$ (deux méthodes).

Exercice 37. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $z_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{i}{k})$, où $i^2 = -1$.
1. Montrer que la suite $(|z_n|)$ converge.
2. En considérant $z_{n+1} - z_n$, prouver que la suite (z_n) diverge.