

Semaine n° 1 du 16 septembre au 20 septembre 2024.**Espaces vectoriels normés.****A. Espaces vectoriels normés.**

Normes sur un \mathbb{K} -ev. Norme associée à un produit scalaire sur un \mathbb{R} ev, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Norme infinie sur l'espace des applications bornées sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{K} .

Normes équivalentes. Deux normes sur un evn de dimension finie sont équivalentes (théorème admis).

B. Suites dans un evn.

Révisions sur les suites réelles : passage à la limite, limite par encadrement, monotonie, suites adjacentes...

Convergence d'une suite. *Complément : théorème de Cesàro.*

Suite bornée. Une suite convergente est bornée.

Suite extraite et convergence.

La convergence d'une suite d'un espace de *dimension finie* et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme : une suite d'un espace de dimension finie converge ssi les suites de coordonnées dans une base quelconque convergent.

Exemples d'études de convergence de suites de n -uplets et de suites de matrices.

C. Topologie d'un espace vectoriel normé.

Distance associée à une norme. Boule, sphère, partie bornée. Partie convexe.

Point intérieur et point adhérent à une partie. Intérieur, adhérence, frontière.

Ouvert, stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.

Fermé, stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.

Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, caractérisation séquentielle des fermés.

Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. En particulier, si E est un espace vectoriel de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie sur E .

Semaine n° 2 du 23 septembre au 27 septembre 2024.

Programme de la semaine précédente et :

Séries numériques : généralités et séries à termes positifs.

Convergence, divergence, CN de convergence, restes d'une série convergente.

Lien suite-série : la suite (u_n) converge ssi la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Espace vectoriel des séries convergentes.

Séries de Riemann, séries géométriques.

Séries à termes positifs :

Comparaison, utilisation d'un équivalent, règle $n^\alpha u_n$ (comparaison à une série de Riemann).

Critère de d'Alembert. Comparaison série-intégrale. Séries de Bertrand (résultats à savoir retrouver).