Suites de fonctions.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|.|$ la valeur absolue ou le module.

1 Convergence d'une suite de fonctions

Définition 1. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
On dit que la suite (f_n) converge simplement (CVS) sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ converge (dans $\mathbb{K}$).
Dans ce cas, on appelle limite simple de la suite (f_n) l'application $f : I \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Autrement dit, la suite de fonctions (f_n) CVS sur I vers f si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ (dépendant en général de } x \text{ et de } \varepsilon\text{) tel que } \forall n \geq N(x, \varepsilon),\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

• Etudier la CVS d'une suite de fonctions (f_n) sur I revient donc à étudier, pour $x \in I$ fixé, la convergence de la suite $(f_n(x))$.

Exercice 1. Etudier la CVS sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$f_n(x) = (n + 1)x$ si $x \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et $f_n(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, 1]$.

Définition 2. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$. On dit que la suite (f_n) converge uniformément (CVU) sur I vers f s'il existe un certain indice (rang) $N \in N$ à partir duquel la fonction $f_n - f$ est bornée sur I et si*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0$$

où, pour toute application g bornée sur I, $\|g\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |g(x)|$.
Dans ce cas, on dit que f est la limite uniforme de la suite (f_n) sur I.
Autrement dit, la suite de fonctions (f_n) CVU sur I vers f si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ (indépendant de } x\text{, ne dépendant que de } \varepsilon\text{) tel que } \forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1. • *On sait que $\|\cdot\|_{\infty, I}$ est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$. Cette norme est parfois appelée la norme « de la convergence uniforme sur I».*
• *Si (f_n) CVU vers f sur I, alors (f_n) CVS vers f sur I. L'éventuelle CVU d'une suite de fonctions (f_n) sur I ne peut être qu'une CVU vers la limite simple de (f_n) sur I. Il faut donc commencer par étudier la CVS de la suite de fonctions (f_n) sur I.*

Exercice 2. Etudier la CVS et la CVU sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

Proposition 1. *La suite de fonctions (f_n) CVU sur I vers sa limite simple f s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

avec a_n (indépendant de x) tel que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Démonstration. Pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ est une fonction bornée sur I avec $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, I} \leq a_n$ et par le théorème de limite par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0$. □

Exercice 3. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.
Etudier la la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (f_n) et de la suite (f_n^2).

Exercice 4. 1. Justifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.
2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$ CVU sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur I et (x_n) une suite de I.
Prouver que $\lim_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$.

2 Convergence uniforme et continuité

Théorème 1. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $x_0 \in I$.*
Si chaque application f_n est continue en x_0 et si la suite (f_n) CVU sur I vers f, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Supposons donc que chaque application f_n est continue en x_0 et que la suite (f_n) CVU sur I vers f.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) CVU sur I vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
En particulier $\forall x \in I$, $|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(x_0) - f_N(x_0))|. \end{aligned}$$

Comme f_N est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Finalement f est bien continue en x_0 car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

Exercice 6. Etudier la CVS et la CVU sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = \sin^n x$.

En pratique, c'est généralement la propriété suivante, conséquence du théorème précédent, qui est utilisée :

Proposition 2. *Soit (f_n) une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si*
i) chaque fonction f_n est continue sur I, ii) la suite (f_n) CVU sur tout segment inclus dans I vers f,
alors f est continue sur I.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ (quelconque). Soit J un segment contenant x_0 et inclus dans I. Chaque fonction f_n étant continue sur J et la suite de fonctions (f_n) CVU sur J vers f, le théorème 1 (appliqué avec x_0 et J à la place de I) permet d'affirmer que f est continue en x_0. Donc f est continue sur I. □

• Si la suite (f_n) CVU sur tout segment inclus dans I vers f, on dit que la suite (f_n) converge *localement uniformément* vers f sur I.

Remarque 2. *Il existe des suites de fonctions (f_n) qui convergent uniformément sur tout segment de I vers une certaine fonction f (i.e. localement uniformément sur I vers f) sans converger uniformément sur I vers f. C'est la cas par exemple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, uniformément sur tout segment vers θ, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers θ car $f_n - \theta = f_n$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.*

3 Convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème 2. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, CVU vers f sur $[a, b]$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 3. *La proposition 1 précédente (CVU et continuité) assure que f est continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) CVU sur $[a, b]$ vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Par propriétés de l'intégrale, on a, pour tout $n \geq N$:

$$|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

On vient donc d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| \leq \varepsilon$ ce qui est bien la définition formalisée de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Exercice 7. On considère la suite de de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par sur $[0, 1]$ par :
$f_n(x) = 4(n+1)^2 x$ si $x \in [0, \frac{1}{2(n+1)}]$, $f_n(x) = -4(n+1)^2(x - \frac{1}{2(n+1)})$ si $x \in [\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{n+1}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, 1]$.
1. Tracer le graphe de f_n. Justifier que la suite de fonctions (f_n) CVS sur $[0, 1]$ vers une fonction f à préciser.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. En déduire que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

4 Convergence uniforme et dérivation

Théorème 3. `[Dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe` $\mathcal{C}^1$`]`
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :
i) chaque application f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
ii) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,
iii) la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment inclus dans I vers g,
alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, autrement dit $\forall x \in I$, $(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Démonstration. Fixons $a \in I$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a : $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$ $(*)$. Par *ii)*, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. La fonction g est continue sur I par *iii)* et la proposition 2 utilisée avec (f_n'). Et comme par *iii)* la suite de fonctions (f_n') CVU vers g sur $[a, x]$ si $x \geq a$ (ou $[x, a]$ si $x \leq a$), d'après le théorème 2 on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt.$$

D'où $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$. Or $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée $G' = g$, donc $f : x \mapsto f(a) + G(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = G' = g$. □

Remarque 4. *Les hypothèses du théorème précédent impliquent aussi que (f_n) CVU sur tout segment inclus dans I vers f.*

Démonstration. Soit $[a, b] \subset I$. On a : $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) - f(x) = f_n(a) - f(a) + \int_a^x (f_n'(t) - f'(t))\,dt$ d'où

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - f'(t)|\,dt \leq \underbrace{|f_n(a) - f(a)| + (b-a)\|f_n' - f'\|_{\infty,[a,b]}}_{=a_n}$$

D'où la CVU de (f_n) vers f sur $[a, b]$ car a_n est indépendant de x et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Exercice 8. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4. `[Dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe` $\mathcal{C}^k$`]`
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit (f_n) une suite d'applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :
i) chaque application f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
ii) pour tout $j \in \{0, \cdots, k-1\}$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I vers ϕ_j,
iii) la suite des dérivées $(f_n^{(k)})$ CVU sur tout segment inclus dans I vers ϕ_k,
alors $\phi_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$, $\phi_0^{(j)} = \phi_j$.

Remarque 5. *La preuve se fait par récurrence sur k en utilisant le fait que ii) et iii) impliquent que pour tout $j \in \{0, k-1\}$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge CVU sur tout segment inclus dans I vers ϕ_j.*