Spé PC. **Interrogation de mathématiques n° 1 (12.09.2024).** **Durée : 35 mn.**

I. Définitions `[5 points]`

1. Définitions d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et de sa norme associée.

2. Enoncé (sans preuve) de l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

3. Définition des normes 1,2 et infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

II. Démonstration `[2 points]` Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III. Exercices `[13 points]`

Exercice 1. `[4 points]` *Une généralisation du théorème de Cesàro.*

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty.$$

On étudie la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vérifier que $\forall n > N$, $|v_n - \ell| \leq \dfrac{\alpha_1|u_1-\ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exercice 2. `[4 points]` $\triangleright$ Si $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f'\|_\infty + |f(0)|$ et on note θ la fonction nulle sur $[0,1]$.

1. Soit $f \in E$. Justifier que si $N'(f) = 0$, alors $f = \theta$.

$\triangleright$ *On admet que N' est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.*

2. Montrer que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N'(f)$.

3. Montrer que les normes N' et $\| \,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Indication : considérer $f_n(x) = \sin(\pi n x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$.

Exercice 3. `[5 points]` Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que la suite (S_n) converge. *Considérer les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).*

2. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,dx$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$.

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{4}$.

IV. Bonus `[1 point]` Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],]0,+\infty[)$.

Prouver en utilisant judicieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \,.\, \int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)^2.$$