Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Samedi 21 septembre 2024.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 1.

Exercice 1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = \ell$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. **1.** *Une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans* $\mathbb{R}^n$ *:*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$ des réels.

1. a. Développer et simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2\Big)$.

1. b. En déduire que $(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\cdot(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$.

2. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on appelle *somme parallèle* de a et b, notée $a||b$, le réel : $a||b = \dfrac{ab}{a+b} = a - \dfrac{a^2}{a+b}$.

Soient $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ des réels strictement positifs. On pose : $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.

2. a. Montrer que $A_n^2 \leq \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\Big)(A_n+B_n)$. *Indication : utiliser 1. b.*

2. b. Déduire de 2. a. que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k||b_k) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \,||\, \sum_{k=1}^{n} b_k\Big)$.

Exercice 3. *Des normes sur* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

- Si $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose : $n(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(x)|dx$ et $N(f) = \left(f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Prouver que n est une norme sur E.

2. *Comparaison des normes n et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.*

2. a. Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Justifier que $|f(x)| \leq |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt$. En déduire que $\|f\|_\infty \leq n(f)$.

2. b. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(n\pi x)$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et montrer que :

$$n(f_n) = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\cos u|\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\, du.$$

2. c. Prouver que les normes n et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

3. Prouver que N est une norme sur E.

4. *Comparaison des normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.*

4. a. Justifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a+b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$. En déduire que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\,N(f)$.

4. b. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose : $g_n(x) = x^n$. Calculer $\|g_n\|_\infty$ et $N(g_n)$.

4. c. Prouver que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 4. **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix}\cos(x) & -\sin(x)\\ \sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(nx) & -\sin(nx)\\ \sin(nx) & \cos(nx)\end{pmatrix}$.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, convergente vers $L \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nA_n = \ell L$.

3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_n = \arcsin(\frac{a}{\sqrt{a^2+n^2}})$.

3. a. Vérifier que $\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\cos(x_n) & -\sin(x_n)\\ \sin(x_n) & \cos(x_n)\end{pmatrix}$.

3. b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n$.

Exercice 5. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est *stochastique* si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ m_{ij} \geq 0, \text{ et } \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

On note Σ_n l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier, en utilisant par exemple la norme 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que Σ_n est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que Σ_n est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Démontrer que Σ_n est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Vérifier que si $A \in \Sigma_n$ et $B \in \Sigma_n$, alors $AB \in \Sigma_n$.

5. Soit $A \in \Sigma_n$ telle que la suite de matrices $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $L \in \Sigma_n$ et que $L^2 = L$.

Exercice 6. Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(x-2)(x+2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

1. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} f(n)$ converge.

2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0,2\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+2}$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} f(n)$.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}))$, **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n^{\frac{1}{n^2}} - 1)$, **c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(\frac{n^2+7}{n^2+6})$, **d)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!}$, **e)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle *décroissante* telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

• On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, et on note U la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer nu_{2n} et $U_{2n} - U_n$.

2. b. Déduire de 2. a. que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$.

2. c. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Indication : Poser $a_n = nu_n$ et étudier la convergence des suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}).

• On note désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_n à l'aide de U_n et u_{n+1}.

3. b. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge et que sa somme est égale à U.

4. *Application.* On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

4. a. Justifier l'existence de u_n, puis montrer que la suite (u_n) est décroissante et de limite nulle quand $n \to +\infty$.

4. b. Justifier que $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^3}$. En déduire que $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n}^{n+p} \frac{dx}{x^3}$.

4. c. Déduire de 4. b. que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2n^2}$ puis que la série $\sum u_n$ converge.

4. d. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.