Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n° 2 (30. 09. 2024).**

I. Définitions.

1. Définition de la série produit (de Cauchy) de deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.
Enoncé du théorème sur le produit de deux séries absolument convergentes.
Application à la fonction exponentielle.
1. Soit $z\in\mathbb{C}$. Vérifier que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On admet que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$.
2. Vérifier en utilisant le théorème sur le produit de deux séries absolument convergentes que : $\forall (u,v)\in\mathbb{C}^2$, $e^{u+v}=e^u e^v$.

2. Enoncé du critère de comparaison série-intégrale. *Application* : prouver que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

3. Critère des séries alternées. Signe de la somme et majoration des restes d'une série alternée vérifiant les hypothèses du critère.

II. Exercices.

Exercice 1. Prouver que la série $\sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{2}{n(n+1)})$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2. 1. Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$. Vérifier que $\arctan a-\arctan b=\arctan(\frac{a-b}{1+ab})$.
2. Justifier que $\sum_{n\geq 0}\arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. Soit $f\in\mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R}^{+*})$ telle que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$.
1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}$. *Indication : on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis avec* $\ln(f)$ *entre* n *et* $n+1$.
2. Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$.

Exercice 4. Montrer que la série complexe $\sum_{n\geq 1}(1-\frac{1-i}{n})^{n^2}$ (où $i^2=-1$) converge absolument.

Exercice 5. Soit $\alpha>0$. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$.

Exercice 6. Soit $\alpha>0$. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

Exercice 7. **1.** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$. Vérifier que $x+\frac{x(1-x)}{n}\in[0,1]$.

2. Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, on pose : $f_n(x)=f(x+\frac{x(1-x)}{n})$.
Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVU sur $[0,1]$ vers une fonction à préciser