Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 4.

Exercice 1. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose : $f_n(x) = n\dfrac{x^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$.

1. Etudier la CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$. *Indication : considérer* $f_n(\frac{1}{n})$.

3. Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVU sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2. **1.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. Vérifier que $x + \dfrac{x(1-x)}{n} \in [0, 1]$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose : $f_n(x) = f(x + \dfrac{x(1-x)}{n})$.
Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVU sur $[0, 1]$ vers une fonction à préciser.

Exercice 3. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose : $f_n(x) = \arctan(nx)$.
Etudier la CVS et la CVU de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, puis sur $[a, 1]$ où $a \in]0, 1[$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur $\mathbb{R}^+$, mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (considérer $f_n(\frac{1}{n})$).

2. Vérifier que $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$. En déduire que, pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $[a, +\infty[$.

Exercice 5. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$ et de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $g_n(x) = \min(n, \dfrac{x^2}{n})$.

Exercice 6. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $f_n(x) = \ln(1 + \dfrac{x}{n})$, et de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $g_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$.

Exercice 7. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par : $f_n(x) = 0$ si $x \leq 1 - \frac{1}{n}$ ou si $x \geq 2 + \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 1$ si $x \in [1, 2]$ et f_n est affine sur $[1 - \frac{1}{n}, 1]$ et $[2, 2 + \frac{1}{n}]$.

Exercice 8. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$.
Soit $a > 1$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $[a, +\infty[$.

Exercice 9. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2}) - \dfrac{x}{4n\pi}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle θ.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(12n^2\pi^2)$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers θ sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Justifier que $|f_n(x)| = |\sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2} - 2n\pi) - \dfrac{x}{4n\pi}| \leq \dfrac{x}{\sqrt{x + 4n^2\pi^2} + 2n\pi} + \dfrac{x}{4n\pi}$.
En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers θ sur $[0, a]$, $a > 0$.

Exercice 10. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Etudier la CVS et la CVU sur $[0, 1]$ des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(i_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $g_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $h_n(x) = (4x(1-x))^n$, $i_n(x) = x^n \ln x$ si $x \in]0, 1]$ et $i_n(0) = 0$, $j_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}$.

Exercice 12. Soit $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.

2. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Prouver, en étudiant les variations de f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx$ et justifier d'une autre façon la non-convergence uniforme de (f_n) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 13. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Soit $f_n(x) = \sqrt{f(x)^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$.
Etudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14. Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}^+$, convergeant uniformément vers f sur I.
Etudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(\ln(1 + f_n))$.

Exercice 15. Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur I.
Etudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(\dfrac{f_n}{1 + f_n^2})$.

Exercice 16. Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur I. Soit g une application bornée de I dans $\mathbb{R}$. Etudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n g)$.

Exercice 17. On note, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \dfrac{nx + \sin x}{n + x}$.
Vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Exercice 18. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Que peut-t-on en déduire ?

3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 19. Soit $\alpha > 0$. On note, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.

1. Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a, +\infty[$.

3. Pour quelles valeurs de α, la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 20. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = |(x-n)^2 - 1| - ((x-n)^2 - 1)$.

1. *Etude de la convergence simple de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}$.

1. a. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $f_n(x)$ en distinguant les cas : $x \le n-1$, $x \in [n-1, n+1]$, $x \ge n+1$. Justifier que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

1. b. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, notée θ.

2. Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers θ.

Exercice 21. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (1 - \dfrac{x}{n})^n$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

1. Déterminer la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \le f_n(x) \le f(x)$.

3. Soit $a > 0$. Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

4. Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.