Maths

Champs et analyse vectorielle

Sommaire

Savoir-faire exigibles du BO

- Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).
- Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
- Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
- Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
- Définir $\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
- Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.

.

$\star$ *Prise de notes :* En première année, différents champs ont déjà été étudiés : le champ électrique $\overrightarrow{E}$, magnétique $\overrightarrow{B}$, le champ de pression P, le champ d'énergie potentielle E_p etc. En lien avec ces champs, vous avez commencé à introduire l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$, pour relier une force conservative et la variation spatiale d'énergie potentielle : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Synthétiser, dans le même chapitre, toutes les connaissances à avoir sur le calcul différentiel et l'analyse vectorielle, du point de vue mathématique.
2. S'entraîner à manipuler ou interpréter les outils d'analyse vectorielle sur des exemples.

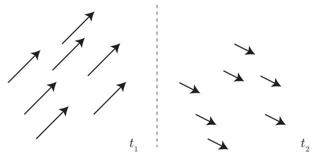
I Champs scalaires et vectoriels

I.1 Définitions

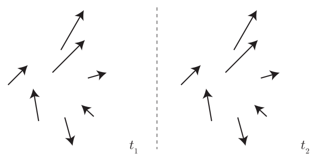
Définition : Champ : grandeur physique définie en tout point de l'espace (et pouvant également dépendre du temps).

Cette double dépendance spatio-temporelle des champs sera notée $f(M,t)$ ou en coordonnées cartésiennes $f(x,y,z,t)$. Ces champs peuvent être scalaires (champ de température, de pression, de potentiel électrique, etc.) ou vectoriels (champ de vitesse, champ électrique, magnétique, etc.), par exemple en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{f}(M,t) = f_x(M,t)\overrightarrow{e_x} + f_y(M,t)\overrightarrow{e_y} + f_z(M,t)\overrightarrow{e_z}$.

Un champ est *uniforme* dans une région de l'espace si la valeur du champ est la même en tous les points de cette région à un instant donné : il est donc seulement dépendant du temps ($f(t)$ ou $\overrightarrow{f}(t)$).

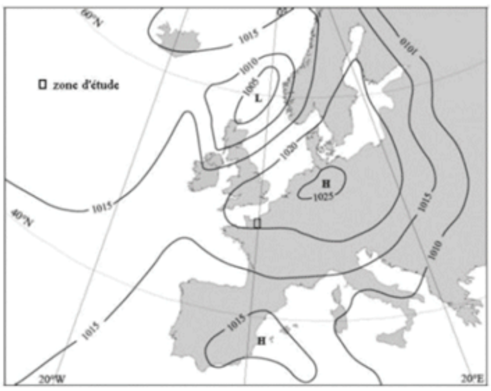


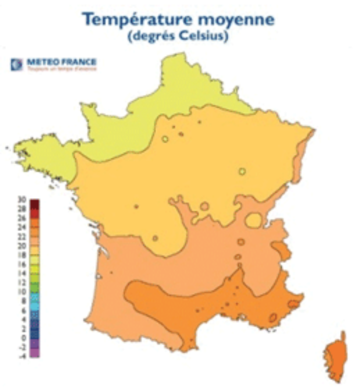
Un champ est *stationnaire* si la valeur du champ est la même à chaque instant, en un point donné : il ne dépend donc que des coordonnées d'espace ($f(M)$ ou $\overrightarrow{f}(M)$).



I.2 Surfaces de niveau d'un champ scalaire

Pour représenter spatialement un champ scalaire, on utilise une surface de niveau. Une *surface de niveau* est une surface en tout point de laquelle le champ scalaire prend la même valeur. L'intersection d'une surface de niveau avec un plan constitue une ligne de niveau. On les rencontre fréquemment en météorologie pour représenter les champ de pression et de température.

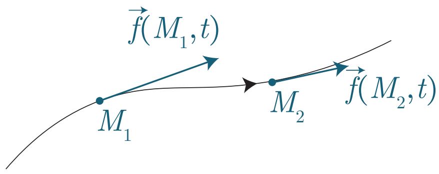




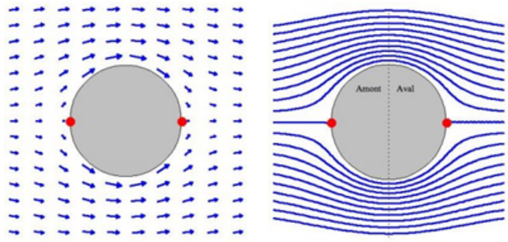
I.3 Lignes et tubes de champ pour un champ vectoriel

Pour représenter spatialement un champ vectoriel, on peut représenter un certain nombre de vecteurs à un instant donné, en 2D ou en 3D. Par exemple sur une carte météo des vents, la longueur des flèches est proportionnelle à la valeur de la vitesse des vents.

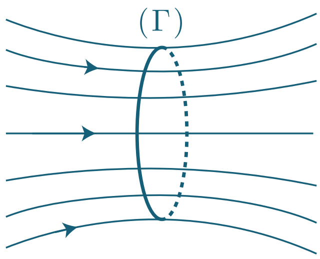
On utilise néanmoins plus couramment une *carte de champ*, constituée d'un ensemble de lignes de champ, une *ligne de champ* étant une courbe qui est tangente en chaque point au vecteur $\vec{f}(M,t)$ défini en ce point.



Cela permet par exemple de visualiser facilement un écoulement de fluide, si on considère le champ vectoriel des vitesses $\vec{v}(M,t)$ d'un fluide, comme illustré ci-contre.



L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé (Γ) constitue un *tube de champ* (c'est donc une surface) :



I.4 Circulation d'un champ vectoriel

Considérons un contour élémentaire orienté $\mathrm{d}\vec{r}$ à partir du point M. On appelle *circulation élémentaire* d'un champ vectoriel $\vec{f}$ le scalaire :

$$\delta C = \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

★ La *circulation* d'un champ vectoriel $\vec{f}$ sur un parcours AB fini est la somme de toutes les circulations élémentaires :

$$C = \int_{(AB)} \delta C = \int_{(AB)} \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

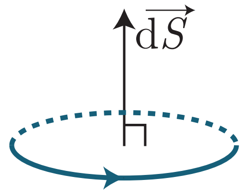
Si le parcours (Γ) est fermé, on place un rond au niveau de l'intégrale :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Remarque : Ce concept est une généralisation du travail d'une force à tous les champs vectoriels $\vec{f}$.

I.5 Flux d'un champ vectoriel

★ Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ autour d'un point M. Cette surface est limitée par un contour fermé orienté, où la règle de la main droite (ou du tire-bouchon) donne le sens du vecteur $\mathrm{d}\vec{S}$, normal à cette surface.



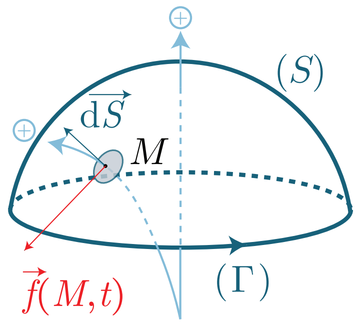
Le flux élémentaire du champ de vecteur $\vec{f}(M,t)$ à travers la surface élémentaire orientée est défini par

$$\delta\Phi = \vec{f}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Un flux est une grandeur caractérisant une quantité vectorielle traversant une surface. Il est souvent associé en physique à un débit d'une grandeur physique : débit de particules, d'énergie thermique, de charge électrique, de volume de fluide, etc.

Si une surface (S) finie s'appuie sur un contour fermé orienté (Γ), le flux de $\vec{f}$ à travers cette surface se calcule en sommant l'ensemble des flux élémentaires :

$$\Phi = \iint_{(S)} \delta\Phi = \iint_{(S)} \vec{f}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



Le flux dépend a priori de la surface (S) choisie s'appuyant sur (Γ). Si la surface est fermée, on ajoute également un rond au niveau de l'intégrale double : $\oiint_{(S)} \vec{f}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Par convention, tous les *vecteurs surface élémentaire sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur.*

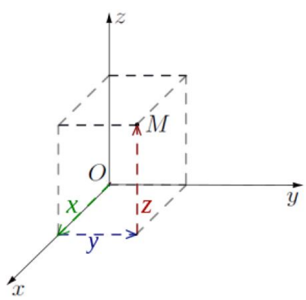
II Surfaces et volumes élémentaires

Étant donné que les grandeurs précédentes se calculent grâce à des intégrations sur des contours ou surfaces élémentaires, rappelons certains résultats sur les systèmes de coordonnées usuels en physique.

II.1 Coordonnées cartésiennes

a Base

En coordonnées cartésiennes, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (x,y,z).
Le vecteur position est : $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$



b Déplacement élémentaire

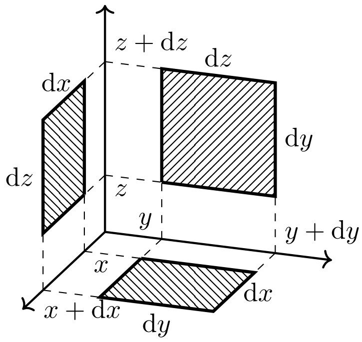
Le vecteur déplacement élémentaire est alors :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z} \qquad \text{(II.1)}$$

c Surfaces élémentaires

On peut définir trois surfaces élémentaires simples, perpendiculaires soit :

- au vecteur $\overrightarrow{e_x}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}$;
- au vecteur $\overrightarrow{e_y}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\overrightarrow{e_y}$;
- au vecteur $\overrightarrow{e_z}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\overrightarrow{e_z}$.



d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées cartésiennes :

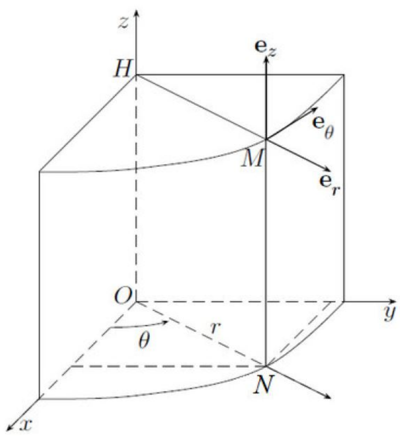
$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{II.2}$$

Remarque : Notons qu'il est possible de le noter $\mathrm{d}^3\tau$, en référence au fait qu'il s'agit d'un infiniment petit du 3^e ordre, qui permet de distinguer $\mathrm{d}^2\tau = h\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}x$, par exemple. Cela sera utile quand il faudra négliger l'un des ordres par rapport aux autres.

II.2 Coordonnées cylindriques

a Base locale

En coordonnées cylindriques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r,θ,z).
Le vecteur position est : $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$



b Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$$

c Surfaces élémentaires

On peut exprimer les trois surfaces élémentaires :

- selon $\overrightarrow{e_r}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{e_r}$;
- selon $\overrightarrow{e_\theta}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\overrightarrow{e_\theta}$;
- selon $\overrightarrow{e_z}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_z}$.

d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r(r\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{II.3}$$

Exercice : Déterminer le volume d'un manchon cylindrique d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de hauteur h.

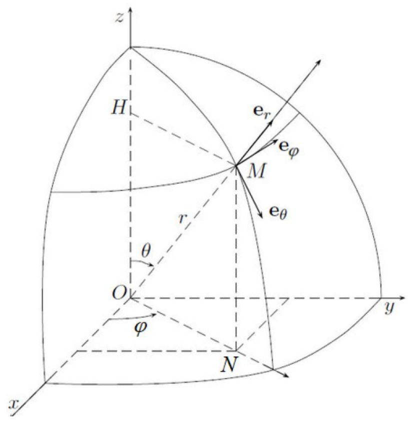
Schéma + stratégie : calcul du volume élémentaire, puis intégration en faisant tourner d'un angle θ et en déplaçant suivant z.

★

$$\mathrm{d}\tau = \iint_{\theta,z} \mathrm{d}^3\tau = r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h \mathrm{d}z = 2\pi r\mathrm{d}rh = \mathcal{A}_{\text{base}} \times hauteur$$

où l'aire de la base correspond au périmètre du cercle de rayon r multipliée par son épaisseur $\mathrm{d}r$.

II.3 Coordonnées sphériques



a Base locale

En coordonnées sphériques, un point M est caractérisé par ses trois coordonnées spatiales (r,θ,φ).
Le vecteur position est : $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$

b Déplacement élémentaire

Ainsi le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

c Surfaces élémentaires

Exercice : Déterminer les trois vecteurs surfaces élémentaires en coordonnées sphériques.

★
- selon $\overrightarrow{e_r}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_r}$;
- selon $\overrightarrow{e_\theta}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\theta}$;
- selon $\overrightarrow{e_\varphi}$, $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\varphi}$.

d Volume élémentaire

Le parallélépipède correspondant aux déplacements du point M selon les trois directions définit le volume élémentaire dans le jeu de coordonnées sphériques :

$$\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}r(r\mathrm{d}\theta)(r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi) = r^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{II.4}$$

Exercice : Déterminer le volume d'une coquille sphérique d'épaisseur dr.

★

$$\mathrm{d}\tau = \iint_{\theta,\varphi} \mathrm{d}^3\tau = r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = r^2\mathrm{d}r\big[-\,\cos(\theta)\big]_0^\pi \times 2\pi = 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

correspondant à la surface de la sphère de rayon r multipliée par l'épaisseur dr de la coquille sphérique.

III Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs réelles

Dans de nombreux problèmes physiques, on s'intéresse à la manière dont évolue une fonction ou un champ scalaire en fonction du temps et/ou de l'espace (propagation d'une onde, évolution de la température avec le temps, de la concentration d'une espèce chimique dans l'espace...). On a alors besoin d'outils mathématiques pour expliciter cette dépendance de la fonction avec le temps et/ou l'espace : c'est le rôle du calcul différentiel.

III.1 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

On va chercher à introduire la notation de *différentielle* d'une fonction et proposer une interprétation physique. Pour cela, considérons une fonction f qui à un réel t associe un réel $f(t)$. C'est typiquement le cas d'une grandeur physique dont on veut connaître ses variations au cours du temps.

Remarque : On peut évidemment considérer une coordonnée spatiale plutôt que le temps.

Par définition, la *différentielle de f* correspond à la variation élémentaire de la fonction pendant la durée infinitésimale $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}f = f(t+\mathrm{d}t) - f(t) \tag{III.1}$$

On peut relier $\mathrm{d}f$ à $\mathrm{d}t$ par la relation :

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = f'(t)\mathrm{d}t \tag{III.2}$$

Ainsi pour une durée Δt, la variation de la fonction f se calcule comme la somme des variations infinitésimales $\mathrm{d}f$ sur cette durée :

$$\Delta f = f(t_0+\Delta t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathrm{d}f = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{III.3}$$

Concrètement en physique, quand une grandeur t varie d'une petite quantité $\mathrm{d}t$, $f(t)$ varie de $\mathrm{d}f$.

Remarque : Les mêmes règles s'appliquent que pour les dérivées, on a par exemple $\mathrm{d}(f \times g) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$, ou encore $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\ \mathrm{d}f - f\ \mathrm{d}g}{g^2}$.

> **Exercice :** Lors de l'étude du régime transitoire de chauffage d'une pièce, on peut être amené à écrire l'évolution de la température sous la forme $T(t) = T_{ref}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \text{cste}$ avec τ un temps caractéristique. Déterminer la différentielle de T.
>
> ★ $\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = T_{ref}\ \mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$

III.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit une fonction f de plusieurs variables, par exemple du vecteur position $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$: $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$. Il s'agit dans ce cas d'un champ scalaire (par exemple : la température, la pression, etc).

Remarque : On traitera le cas d'un champ vectoriel dans le chapitre MF1.

a Dérivée partielle

★ On appelle *dérivée partielle de f par rapport à x, à y et z constants* la grandeur :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} \tag{III.4}$$

notée plus simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ voire $\partial_x f$.

Par exemple avec $f(x,y) = 2xy + y^2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2y$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2(x+y)$.

Théorème de Schwarz

★ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors l'ordre de dérivation n'a pas d'importance pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)(\partial y)} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)(\partial x)}$$

b Différentielle

On appelle alors différentielle de f la variation infinitésimale de f lorsqu'on effectue une variation infinitésimale de toutes les variables $x \longmapsto x + \mathrm{d}x$, $y \longmapsto y + \mathrm{d}y$, $z \longmapsto z + \mathrm{d}z$ (soit encore pour le vecteur position $\vec{r} \longmapsto \vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$) :

★

$$\mathrm{d}f = f(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - f(\vec{r}) = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) - f(x,y,z) \tag{III.5}$$

On peut l'exprimer en fonction des dérivées partielles :

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z \tag{III.6}$$

Exerice : Pour un métal, le volume dépend de la température T et de la pression P. On définit deux coefficients de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ et de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

Déterminer la différentielle de $V(T,P)$. Quelle doit être la pression à exercer sur le métal pour que son volume reste constant lorsque sa température passe à 30 °C, partant de 20 °C et $P_0 = 1$ bar. On donne $\alpha = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ et $\chi_T = 7 \times 10^{-12}\,\mathrm{Pa}^{-1}$.

La différentielle de V s'écrit :

$$\mathrm{d}V = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P = \alpha V \mathrm{d}T - \chi_T V \mathrm{d}P$$

★

Si on souhaite un volume constant malgré la variation de température, il faut donc que $\mathrm{d}V = 0$ à chaque instant, donc $\mathrm{d}P = \frac{\alpha}{\chi_T}\mathrm{d}T$ soit en intégrant $\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T}\Delta T = 714\,\mathrm{bar}$. Ceci est très grand, mais logique car un solide est quasi incompressible.

c Règle de la chaîne

Considérons une fonction $f(u,v)$ avec u et v les variables de f. Supposons que u et v dépendent elles-mêmes chacune de deux variables x et y : $u(x,y)$ et $v(x,y)$. Implicitement, la fonction f dépend donc de x et y. On calcule alors les dérivées partielles de f par rapport à x et y.

Règle de la chaîne

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$$

Remarque : Si u et v ne dépendent que de la même variable t, alors la formule précédente donne :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Exemple : On cherche la température $T(t)$ ressentie par un homme faisant de la montgolfière au cours de son vol. Pour cela, on sait que, dans la troposphère, la température décroît linéairement avec l'altitude. De plus, la montgolfière s'approche d'un lac où la température est plus basse : $T(x,z) = T_0 + \alpha x + \beta z$ avec $\alpha = -50\,°\mathrm{C/km}$ et $\beta = -6.5\,°\mathrm{C/km}$. On donne également la vitesse de la montgolfière : $\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_z \vec{e_z}$ avec $v_x = 10\,\mathrm{km/h}$ (vitesse du vent) et $v_z = 2\,\mathrm{km/h}$. On suppose enfin qu'à $t = 0$, la montgolfière est en $(x = 0, z = 0)$. Déterminer $T(t)$.

.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_z \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right)_x \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \alpha v_x + \beta v_z\end{aligned}$$

On intègre sur t :

$\star$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t')\mathrm{d}t' = T(t) - T(0) = (\alpha v_x + \beta v_z)t$$

Donc :

$$T(t) = T_0 + (\alpha v_x + \beta v_z)t$$

Cohérent : du fait du mouvement selon $\overrightarrow{e_x}$, la température décroit d'autant plus vite que α est grand et que la montgolfière va vite vers $\overrightarrow{e_x}$ (le v_x).

IV Opérateurs différentiels

Dans toute la suite, on omet (momentanément) la dépendance temporelle des champs scalaires ou vectoriels, car les opérateurs que l'on va introduire n'agissent que sur les dépendances spatiales.

IV.1 Le gradient

a Définition intrinsèque et interprétation physique

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire qui *associe à un champ scalaire un champ vectoriel.* Considérons un champ scalaire $f(M)$. À un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$ est associée une variation élémentaire $\mathrm{d}f$ de f. On définit l'opérateur gradient par :

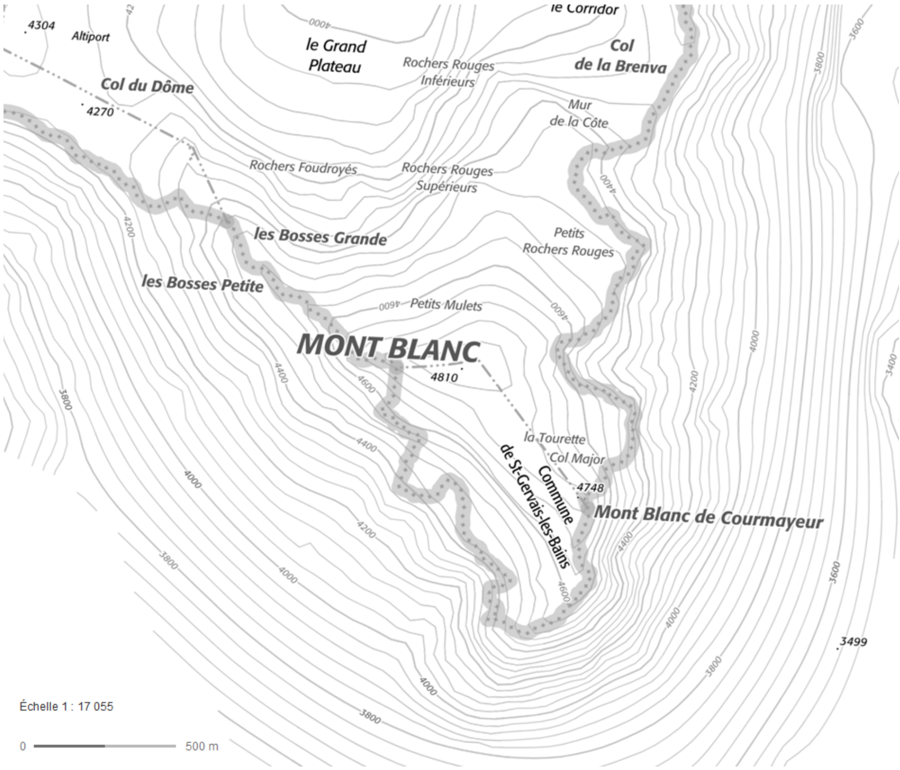
$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r}} \tag{IV.1}$$

D'un point de vue physique :

$\star$

- $\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)\right|\right|$, de dimension $[f] \cdot \mathrm{L}^{-1}$, mesure les variations spatiales locales de f : plus f varie fortement au voisinage de M, plus $\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)\right|\right|$ est grand ;
- la direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement : $\mathrm{d}f$ est le plus grand si $\mathrm{d}\vec{r}$ est dirigé selon $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$;
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est dirigé vers les valeurs de f croissantes.
- l'ensemble des points M tels que $f = cste$ définit une surface dans l'espace, et une ligne dans un plan. Si, à partir d'un point de cette surface, on se déplace de $\mathrm{d}\vec{r}$ sur cette surface / ligne, $\mathrm{d}f = 0$: *le vecteur $\overrightarrow{grad}\, f$ est orthogonal aux surfaces/lignes $f = cste$.*
- un champ scalaire uniforme a un gradient nul, et réciproquement un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région

On peut illustrer ces concepts sur une carte IGN en traçant $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$, où l'on observe les lignes de même altitude (= lignes de niveau) :



b Expression analytique

★ En coordonnées cartésiennes, on sait que $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, et comme $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$, il vient par identification :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}}$$

Attention, en coordonnées cylindriques ou sphériques, il convient d'effectuer un calcul de la différentielle de f, et on trouve :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z} \tag{IV.2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} \tag{IV.3}$$

Exercice : On considère une force newtonienne $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. Cette force est conservative, de sorte qu'il existe une fonction énergie potentielle E_p telle que : $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)$. Déterminer E_p.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$

★ Donc, ici, $E_p(r)$. On cherche donc $E_p(r)$ tel que

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{K}{r^2} + \mathrm{cste}$$

c L'opérateur nabla

Il est courant d'introduire un opérateur que l'on traite "comme un vecteur" (mais qui est en réalité un opérateur), appelé nabla et noté $\vec{\nabla}$, tel que par exemple en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z} \tag{IV.4}$$

Ainsi par exemple, l'opérateur gradient s'écrit $\vec{\nabla}(f)$.

En dehors des coordonnées cartésiennes, il faut être très prudent quant à l'usage du vecteur nabla.

IV.2 Le rotationnel

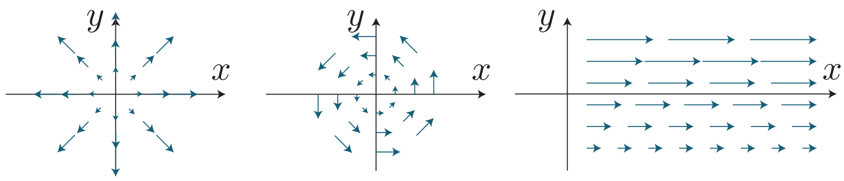
a Définition intrinsèque et interprétation physique

L'opérateur *rotationnel* est un opérateur linéaire qui associe à un champ vectoriel un autre champ vectoriel. On considère un champ vectoriel $\vec{f}$ et un élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ défini autour du point M. On peut alors construire la circulation élémentaire du champ $\vec{f}$ le long du contour élémentaire fermé délimitant la surface $\mathrm{d}\vec{S}$. L'opérateur rotationnel est alors défini par la relation :

$$\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

D'un point de vue concret, le rotationnel d'un champ en un point est un vecteur décrivant la propension du champ à tourner autour de ce point, vu qu'alors la circulation du champ le long d'un contour élémentaire entourant ce point est non nulle. La direction du rotationnel est celle de l'axe autour duquel le champ tourne, et sa norme est d'autant plus grande que le champ tourne "vite". Il permet par exemple de décrire des écoulements dans des tornades, en mécanique des fluides.

Exemples : De gauche à droite : champ radial $\vec{f} = g(r)\vec{e_r}$, orthoradial du type rotation solide $\vec{f} = \omega r\vec{e_\theta}$, champ du type $\vec{f} = (ay+b)\vec{e_x}$ $(a>0)$.



Ecrire $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}\cdot\vec{e_z} > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}\cdot\vec{e_z} < 0$

Pour interpréter ces cartes de champs, il faut avoir en tête que deux effets peuvent faire tourner une particule dans un fluide :

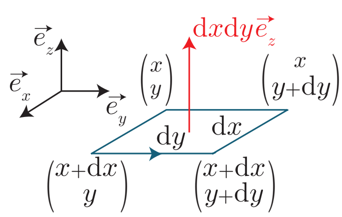
- la forme des lignes de champ
- la norme des vecteurs vitesse

b Expression analytique

Pour déterminer une expression analytique de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}$ en coordonnées cartésiennes, on calcule la circulation sur le contour entourant la surface $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e_z}$:

$$\delta\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x+\mathrm{d}x,y)\mathrm{d}y \quad \text{(IV.5)}$$

$$- f_x(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x - f_y(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \quad \text{(IV.6)}$$



On simplifie l'expression précédente en négligeant les termes infiniment petits d'ordre 2 devant ceux d'ordre 1 :

$$f_y(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}y = f_y(x,y)\mathrm{d}y + \frac{\partial f_y(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}y \simeq f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$f_x(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = f_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f_x(x,y+\mathrm{d}y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x \simeq f_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

En combinant les termes :

$$\delta\mathcal{C} = \Big(f_y(x+\mathrm{d}x,y) - f_y(x,y)\Big)\mathrm{d}y + \Big(f_x(x,y) - f_x(x,y+\mathrm{d}y)\Big)\mathrm{d}x \tag{IV.7}$$

$$= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{IV.8}$$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}\cdot\vec{e_z} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$.

En reprenant le même raisonnement pour deux autres surfaces élémentaires orientées selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$, il vient en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\wedge\vec{f}} \tag{IV.9}$$

Exercice : Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f})$ pour $\vec{f} = (ay+b)\vec{e_x}$ en coordonnées cartésiennes.

★ La difficulté est de comprendre qu'ici : $\vec{f} = f_x(y)\vec{e_x}$. Donc, ici : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = -a\vec{e_z}$ Cohérent avec ce qu'on a dit sur les cartes de champs.

Exercice : On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{e_z})$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ des points $M(x,y,z)$ du solide dans un repère cartésien $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$. Relier alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$ au vecteur $\vec{\Omega}$.

★

$$\begin{aligned}\vec{v}(M) &= \underbrace{\vec{v}(O)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} \\ &= \Omega\vec{e_z}\wedge(x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ &= \Omega(-y\vec{e_x} + x\vec{e_y})\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$$

En mécanique des fluides, $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$ est appelé vecteur tourbillon et caractérise la rotation des particules de fluide au voisinage de chaque point du fluide : interprétation cohérente avec la mécanique des solides.

En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions sont plus complexes et ne sont pas à connaître :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial f_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rf_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\,\sin(\theta)}\dfrac{\partial(\,\sin(\theta)\,A_\varphi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial f_\theta}{\partial\varphi} \\ \dfrac{1}{r\,\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rf_\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rf_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}$$

Exemples :

- un champ radial du type $\vec{f} = g(r)\vec{e_r}$ possède un rotationnel nul ;
- un champ orthoradial en coordonnées cylindriques du type $\vec{f} = \omega r\vec{e_\theta}$ possède un rotationnel non nul : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = 2\omega\vec{e_z}$...

- ... mais celui du type $\vec{f} = a\vec{e_\theta}$ avec a une constante possède un rotationnel nul (alors que la topographie de ce champ pourrait laisser penser que "le champ tourne")

⚠ Il faut donc faire attention aux interprétations des cartes de champ, qui peuvent sembler trompeuses de prime abord...

c Théorème de Stokes-Ampère

En lien avec la définition intrinsèque du rotationnel, citons un théorème régulièrement utilisé en électromagnétisme :

Théorème de Stokes-Ampère

★ La circulation d'un champ vectoriel $\vec{f}$ le long d'une courbe fermée orientée (Γ) est égale au flux de son rotationnel sortant de toute surface (S) qui s'appuie sur (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

d Champs à circulation conservative

On peut alors généraliser le concept de force conservative à d'autres champs vectoriels.

Champ à circulation conservative

Un champ vectoriel $\vec{f}$ est dit à circulation conservative si et seulement si :

★
- sa circulation entre deux points A et B est indépendante du chemin suivi entre A et B ;
- $\iff$ sa circulation est nulle sur TOUT parcours fermé ;
- $\iff$ son rotationnel est nul $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \vec{0}$.
- $\iff$ il existe un champ scalaire g tel que $\vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}g$; on dit alors que $\vec{f}$ dérive de g, ce qui revient à poser $\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$;

IV.3 La divergence

a Définition intrinsèque et interprétation physique

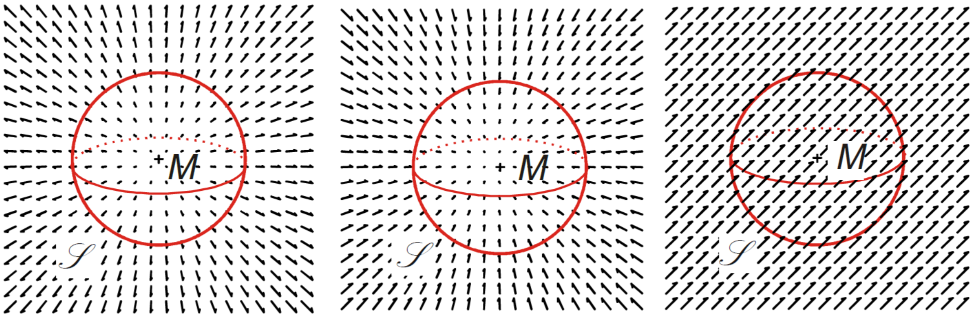
★ L'opérateur divergence, noté div est un opérateur linéaire qui *associe à un champ vectoriel un champ scalaire*. Considérons un champ vectoriel $\vec{f}(M)$ et un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ défini autour du point M. On peut alors construire le flux élémentaire $\delta\Phi$ du champ $\vec{f}$ à travers la surface fermée élémentaire délimitant le volume $\mathrm{d}\tau$:

$$\boxed{\delta\Phi = \mathrm{div}\,\vec{f}(M)\mathrm{d}\tau}$$

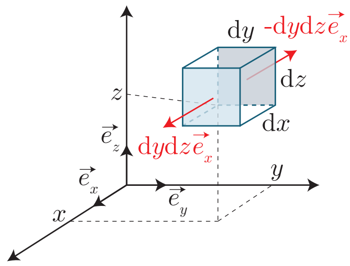
Un champ de vecteur "diverge" en un point si son flux à travers une surface élémentaire entourant ce point est non nul. L'opérateur divergence calculé en un point permet donc de quantifier le caractère divergent d'un champ de vecteur autour d'un point de l'espace. Concrètement, la divergence quantifie les sources du champ :

- si $\mathrm{div}\,\vec{f} > 0$, au point M, cela veut dire que $\vec{f}$ a tendance à "sortir" de M, c'est-à-dire que M peut être vu comme une source de $\vec{f}$;
- si $\mathrm{div}\,\vec{f} < 0$, $\vec{f}$ a tendance à "être absorbé" par M ;
- si $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$, alors M ne produit ni n'absorbe $\vec{f}$.

Exemples : De gauche à droite, un champ localement radial et divergent, celui d'un champ convergent et celui d'un champ uniforme. Signe de $\mathrm{div}\,\vec{f}$?



b Expression analytique



Pour obtenir une expression analytique de $\mathrm{div}\,\vec{f}$ en coordonnées cartésiennes, on calcule le flux de $\vec{f}$ à travers une surface fermée élémentaire délimitant un volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Commençons par les deux faces du cube orientées selon $\pm\overrightarrow{e_x}$:

$$\delta\Phi_x = \left(\vec{f}(x+\mathrm{d}x,y,z) - \vec{f}(x,y,z)\right)\cdot(\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}) \qquad \text{(IV.10)}$$

$$\simeq \frac{\partial f_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial f_x}{\partial x}\mathrm{d}\tau \qquad \text{(IV.11)}$$

En effectuant le même calcul sur les deux autres paires de faces, il vient :

$$\delta\Phi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau = \mathrm{div}\,\vec{f}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(IV.12)}$$

donc par identification :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}} \qquad \text{(IV.13)}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques, on pourrait démontrer :

$$\mathrm{div}(\vec{f}(r,\theta,z)) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad \text{(IV.14)}$$

$$\mathrm{div}(\vec{f}(r,\theta,\varphi)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial(\,\sin(\theta)\,f_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \qquad \text{(IV.15)}$$

On ne peut pas utiliser $\vec{\nabla}$ explicitement en terme de vecteur en coordonnées cylindriques ou sphériques, pour la bonne raison que les vecteurs de la base locale varient. Par exemple en coordonnées cylindriques, en écrivant $\vec{\nabla} = \frac{\partial\ldots}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\ldots}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial\ldots}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$, on trouverait

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad \text{(IV.16)}$$

dont l'expression est fausse ! Il en est de même pour le rotationnel.

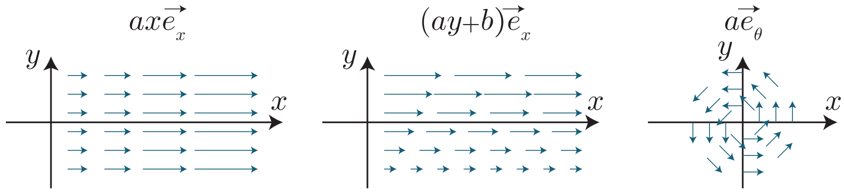
Exercice : Calculer $\mathrm{div}(\vec{f})$ pour $\vec{f} = (ay+b)\overrightarrow{e_x}$ en coordonnées cartésiennes. Interprétation graphique ?

★ La difficulté est de comprendre qu'ici : $\vec{f} = f_x(y)\overrightarrow{e_x}$. Donc, ici : $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$ Graphiquement, $\vec{f}$ ne semble ni entrer, ni sortir dans un carré dessiné sur la carte de champ.

Exemples :

- un champ uniforme est de divergence nulle : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{cste} = 0$;
- un champ du type $\vec{f} = ax\overrightarrow{e_x}$, avec $a > 0$, est divergent (!!) : $\mathrm{div}\,\vec{f} = a$;

- un champ radial en coordonnées sphériques $\vec{f} = \alpha \vec{e_r}$ est divergent : div $\vec{f} = \dfrac{2\alpha}{r}$;
- un champ orthoradial en coordonnées cylindriques $\vec{f} = \alpha \vec{e_\theta}$ est de divergence nulle ;



Ne pas toujours se fier aux cartes de champ pour conclure si la divergence est nulle ou non : par exemple pour $\vec{f} = \dfrac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques, div $\vec{f} = 0$, semblant contradictoire avec la topographie de ce champ (mais ce dernier n'est pas défini à l'origine du repère O).

c Théorème de Green-Ostrogradski

De part la définition intrinsèque de la divergence, il vient un théorème régulièrement utilisé :

Théorème de Green-Ostrogradski

★ Le flux de $\vec{f}$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence étendue au volume $(\mathcal{V})$ délimité par (S) :

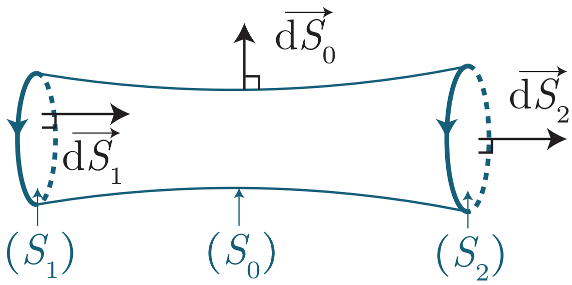
$$\oiint_{(S)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \mathrm{div}(\vec{f})\mathrm{d}\tau$$

d Champ à flux conservatif

D'après ce qui précède, tout champ à divergence identiquement nulle a donc un flux nul à travers toute surface fermée : on dit qu'il est *à flux conservatif*.

Pour comprendre cette notion, considérons un tube de champ (S_0) que l'on ferme pour former (S) : $(S) = (S_0) \cup (S_1) \cup (S_2)$ est fermé (OK pour Green-Ostrogradski).

★



Si le champ $\vec{f}$ est de divergence nulle

$$\oiint_{(S)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \iint_{(S_1)} \vec{f} \cdot \left(-\mathrm{d}\vec{S}_1\right) + \iint_{(S_0)} \underbrace{\vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_0}_{=0} + \iint_{(S_2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

donc le flux de $\vec{f}$ est conservé le long du tube :

$$\iint_{(S_1)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = \iint_{(S_2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

Champs à flux conservatif

Un champ vectoriel $\vec{f}$ est dit à flux conservatif si et seulement si :

★

- son flux se conserve le long d'un tube de champ. Ainsi, le flux du champ à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé (Γ) ne dépend que du contour (Γ) : il est légitime de parler de flux à travers un contour.
- $\Longleftrightarrow$ son flux est nul à travers TOUTE surface fermée ;
- $\Longleftrightarrow$ sa divergence est nulle $\operatorname{div}\vec{f} = 0$.
- $\Longleftrightarrow$ il existe un champ vectoriel $\vec{g}$ tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{g}$;

IV.4 Le laplacien

Le laplacien est un opérateur linéaire pouvant s'appliquer à :

- un champ scalaire et il donne alors un scalaire ;
- un champ vectoriel et il donne alors un champ vectoriel.

a Laplacien scalaire

Par définition, le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}^2 f \tag{IV.17}$$

ce qui donne en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{IV.18}$$

Notons au passage qu'il existe une signification physique au laplacien scalaire : le laplacien de f calculé en M_0 permet de comparer la valeur moyenne de f au voisinage de M_0 à $f(M_0)$. En particulier :

- si M_0 est un maximum local de f, on a $(\Delta f)(M_0) < 0$;
- si M_0 est un minimum local de f, on a $(\Delta f)(M_0) > 0$

Les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques, à ne pas connaître, sont écrites ci-dessous :

$$\Delta f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{IV.19}$$

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{IV.20}$$

Remarque : L'équation $\Delta f = 0$ s'appelle l'équation de Laplace. Nous en verrons quelques exemples concrets cette année.

b Laplacien vectoriel

Pour un champ vectoriel, la définition intrinsèque du laplacien vectoriel est :

$$\Delta\vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{f}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f}) \tag{IV.21}$$

mais possède en coordonnées cartésiennes une expression simple :

$$\Delta\vec{f} = \Delta f_x\vec{e_x} + \Delta f_y\vec{e_y} + \Delta f_z\vec{e_z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{IV.22}$$

IV.5 Composition d'opérateurs vectoriels

Terminons ce chapitre en explicitant deux relations d'analyse vectorielle à connaître, que l'on peut facilement retrouver à l'aide de l'opérateur nabla, pour la composition d'opérateurs.

- Le rotationnel d'un gradient est toujours nul : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{f}) = \vec{0}$. On peut se rappeler rapidement cette propriété à l'aide de nabla : $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$ (produit vectoriel nul).
- La divergence d'un rotationnel est toujours nul : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}) = 0$. À l'aide de nabla : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$.