Devoir de mathématiques n° 2.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2^n u_n$. Vérifier que $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ (que l'on ne cherchera pas à calculer) tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{2^n}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}).$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 3. Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((u_n, v_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^3$ définie par : $z_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{3}u_n - \tfrac{1}{6}w_n + \tfrac{1}{2},\ v_{n+1} = \tfrac{1}{3}u_n + \tfrac{1}{6}v_n - \tfrac{1}{3}w_n - \tfrac{2}{3} \text{ et } w_{n+1} = \tfrac{1}{3}u_n + \tfrac{1}{3}v_n + \tfrac{1}{6}w_n - \tfrac{7}{6}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on pose, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = AZ_n + B$.

2. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Déterminer une constante $k \in [0,1[$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|_\infty \leq k\,\|X\|_\infty$.

4. a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty \leq k^n \|Z_1 - Z_0\|_\infty$.

4. b. Préciser la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 0} \|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty$, $\sum\limits_{n\geq 0} |u_{n+1} - u_n|$, $\sum\limits_{n\geq 0} |v_{n+1} - v_n|$ et $\sum\limits_{n\geq 0} |w_{n+1} - w_n|$.

4. c. Prouver que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

On pose : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge absolument.

1. a. Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{v_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} v_n^2$ convergent.

1. b. On pose : $x_n = (v_n - \frac{1}{n})^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ converge.

1. c. Soit (y_n) une suite de réels négligeable devant (x_n) (c'est-à-dire : $y_n = o_{+\infty}(x_n)$).

Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ converge absolument.

2. On note : $a_n = \ln(nu_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 1} (a_{n+1} - a_n)$ converge.

2. b. En déduire l'existence de $K > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}$. Préciser la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

3. *Application.* Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}\right)^2$?

Partie facultative.

Exercice 5. `[Complément sur les séries]`

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et telle que la série $\sum u_n$ converge.

0. Préciser la nature de la série $\sum v_n$.

▷ On note $R_n(u) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n(v) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, les restes d'ordre n des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon\, v_n$.

En déduire que $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$, $\displaystyle |\sum_{k=n+1}^{k=n+p} u_k - \sum_{k=n+1}^{k=n+p} v_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{k=n+p} v_k$ puis que $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$.

2. *Application.* Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sin n}$ et prouver que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sin k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.