Devoir de mathématiques n° 3.

Exercice 1. Soit $u_n = \ln(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}})$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Vérifier que $u_n = -\dfrac{1}{2}\ln(1+\dfrac{1}{n}) + \ln(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ et déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$.

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

3. Soit $a > 0$. Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ P_0(x) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\big(x - P_n^2(x)\big).$$

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

2. Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.

3. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\,(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2})^n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\max\limits_{t\in[0,1]} t(1-\dfrac{t}{2})^n$.

5. Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer simplement $f(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. *Indication : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \mathrm{Im}\,(e^{i\theta})$.*

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de 2. une expression simple de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

4. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n3^{n+1}}(1+(-1)^{n-1})$ converge et, en considérant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$, justifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}(1+(-1)^{n-1}) = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,dx.$$

5. *Soit $a \in]-1,1[$. On rappelle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a^{2n+1}}{2n+1}$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+a}{1-a})$.*

5. a. Déduire de 4. la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,dx$.

5. b. Retrouver la valeur de I par un calcul direct.

Exercice 5. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.

2. Etudier la continuité de f.

3. a. Soit $x > 0$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{nx}^{(n+1)x} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} \leq \frac{x}{\mathrm{ch}(nx)} \leq \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$.

3. b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.

4. Déduire de 3. un équivalent simple de $f(x)$ en 0^+.

Partie facultative.

Exercice 6. On pose pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \arctan(x+n) - \arctan(n)$.

1. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{x}{1+n^2}$.

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est une application croissante et continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

3. a. *Révision.* Démontrer que $\forall t > 0$, $\arctan(t) + \arctan(\dfrac{1}{t}) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. b. Montrer que f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$. *Indication : on raisonne par l'absurde. Supposons f majorée sur $\mathbb{R}^+$. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq M$. Montrer avec un passage à la limite que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \arctan(\frac{1}{n}) \leq M$ et obtenir une contradiction.*

3. c. Préciser $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 7. 1. Montrer que l'on définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + \frac{x}{2^k}).$$

2. Justifier que f est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = (1+x)f(\dfrac{x}{2})$ et $f(0) = 1$.