**Exercice 1.**

**1.** Rappelons que $\forall u \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u^n| = |u|^n$. Donc :

$$|Z_n| = |1 + \frac{z}{n}|^n = |(1 + \frac{x}{n}) + i\frac{y}{n}|^n = \big(\sqrt{(1 + \frac{x}{n})^2 + \frac{y^2}{n^2}}\,\big)^n = \big(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\big)^{\frac{n}{2}}.$$

Le passage au logarithme, imposant $|1 + \frac{z}{n}| > 0$, conduit à supposer en fait $n$ assez grand : il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $Z_n \neq 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{z}{n} = 1$). Et pour tout $n \geq n_0$, on a bien :

$$\ln(|Z_n|) = \frac{n}{2}\ln(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}).$$

Rappelons aussi que $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2+y^2}{n^2} = 0$, on a :

$$\ln(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n}$$

d'où $\ln(|Z_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} |Z_n| = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(|Z_n|)} = x.$$

**2.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Re}\,(1 + \dfrac{z}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{x}{n}) = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $\text{Re}\,(1 + \dfrac{z}{n}) > 0$. Le point image de $z_n = 1 + \frac{z}{n}$ dans le plan complexe a donc une abscisse strictement positive pour $n \geq N$. Il existe donc un unique $\alpha_n \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que pour tout $n \geq N$, $z_n = |z_n|(\cos(\alpha_n) + i\sin(\alpha_n)) = |z_n|e^{i\alpha_n}$. D'où $\tan(\alpha_n) = \dfrac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \dfrac{y}{n+x}$ et $\alpha_n = \arctan(\dfrac{y}{n+x})$ car $\alpha_n \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Rappelons enfin que $\arctan(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = y$ car $\arctan(\dfrac{y}{n+x}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{y}{n}$. Finalement, d'après ce qui précède, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} Z_n = \lim_{n\to+\infty} |Z_n|e^{in\alpha_n} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

---

**Exercice 2.**

**1.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $n \geq N$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ car $n + p \geq n \geq N$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que, pour tout $n \geq N$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ :

$$|u_{n+p} - u_n| = |(u_{n+p} - \ell) + (\ell - u_n)| \leq |u_{n+p} - \ell| + |\ell - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (= \varepsilon).$$

La suite $u$ est donc bien, par définition, une suite de Cauchy.

**2.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Considérons $\varepsilon = 1$. Par définition d'une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{n+p} - u_n| \leq 1.$$

En particulier, pour $n = N$ et avec l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ |u_{N+p}| = |(u_{N+p} - u_N) + u_N| \leq \underbrace{|u_{N+p} - u_N|}_{\leq 1} + |u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

Comme $\{N + p / p \in \mathbb{N}\} = \{N, N+1, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq N\}$, on a donc :

$$\forall n \geq N,\ |u_n| \leq 1 + |u_N|.$$

En conclusion, la suite $u$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(|u_0|, \cdots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|)$.

**3. a.** Comme $u$ est une suite de Cauchy, $u$ est bornée d'après 2. Soit $M$ (resp. $m$) un majorant (resp. un minorant) de la suite $u$. On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $m \leq u_k \leq M$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n$ est un ensemble non vide de réels majoré (resp. minoré) par $M$ (resp. $m$). D'où l'existence de $s_n$ et $i_n$ respectivement par l'axiome de la borne supérieure et l'axiome de la borne inférieure.

**3. b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = \{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\} \subset U_n = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\}$.

Comme $i_n$ est un minorant de $U_n$, $i_n$ est donc aussi un minorant de $U_{n+1}$. Or $i_{n+1}$ est, par définition d'une borne inférieure, le plus grand des minorants de $U_{n+1}$. On a donc $i_{n+1} \geq i_n$ : la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

De même, $s_n$ étant un majorant de $U_n$, $s_n$ majore aussi $U_{n+1}$. Or $s_{n+1}$ est, par définition d'une borne supérieure, le plus petit des majorants de $U_{n+1}$, donc $s_{n+1} \leq s_n$ : la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

**3. c.** Utilisons la définition d'une suite de Cauchy en considérant $\frac{\varepsilon}{2}$ à la place de $\varepsilon$ : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ u_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n+p} \leq u_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi l'ensemble $U_n$ est majoré (resp. minoré) par $u_n + \frac{\varepsilon}{2}$ (resp. $u_n - \frac{\varepsilon}{2}$). Comme $u_n + \frac{\varepsilon}{2}$ est un majorant de $U_n$, le plus petit des majorants de $U_n$, noté $s_n$, est donc plus petit ou égal à $u_n + \frac{\varepsilon}{2}$. De même, $u_n - \frac{\varepsilon}{2}$ étant un minorant de $U_n$, le plus grand des minorants de $U_n$, noté $i_n$, est donc plus grand ou égal à $u_n - \frac{\varepsilon}{2}$. En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ u_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq i_n \leq s_n \leq u_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui implique que $\forall n \geq N$, $s_n - i_n \leq \varepsilon$ ou encore, $s_n - i_n$ étant positif, que :

$$\forall n \geq N, |s_n - i_n| \leq \varepsilon.$$

On reconnait la définition formalisée de : $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n - i_n) = 0$.

**3. d.** D'après 3. b. et 3. c. les suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc, par théorème, convergent vers une même limite réelle $\ell$. Comme $u_n \in U_n$, on a : $i_n \leq u_n \leq s_n$. Donc la suite $u$ converge vers $\ell$ par le théorème de la limite par encadrement (ou des gendarmes).

---

**Exercice 3.**

**1.** Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. La suite $u$ est strictement croissante car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$. Il n'y a alors que deux possibilités : ou bien $u$ converge vers un réel $l$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$, on obtient $l = l + e^{-l}$, c'est-à-dire $e^{-l} = 0$ ce qui est impossible. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$, et $v_n - v_{n+1} = e^{-u_n} - e^{-u_{n+1}} = e^{-u_n} - e^{-u_n - v_n} = e^{-u_n}(1 - e^{-v_n}) = v_n(1 - e^{-v_n})$. Donc

$$w_n = \frac{v_n - v_{n+1}}{v_n v_{n+1}} = \frac{1 - e^{-v_n}}{v_{n+1}} = \frac{1 - e^{-v_n}}{v_n e^{-v_n}} = \frac{1 - e^{-v_n}}{v_n} e^{v_n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $1 - e^{-v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-v_n}}{v_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 1$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n}(w_0 + \cdots + w_{n-1}) = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_0}) = \dfrac{1}{nv_n} - \dfrac{1}{nv_0}$ (telescopage). Par le théorème de Cesàro, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nv_n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nv_0} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 1$. Autrement dit, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Enfin l'égalité $u_n = -\ln(v_n) = -\ln(\frac{1}{n} \cdot nv_n) = \ln(n) - \ln(nv_n)$ conduit à :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

( car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{\ln(n)} \ln(nv_n)) = 1 - 0 \cdot 0 = 1$).

---

**Exercice 4.**

**1.** Considérons les deux fonctions $u$ et $v$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $u(x) = 1 - 2x$ (resp. $v(x) = 0$) et $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u(x) = 0$ (resp. $v(x) = 2x - 1$). Ces deux fonctions sont continues sur $[0,1]$ et $uv = \theta$ où $\theta$ est la fonction nulle sur $[0,1]$ ($\theta$ est le «vecteur nul» de $E$). Si une telle norme $N$ sur $E$ existait, on aurait en particulier : $N(uv) = N(u)N(v)$ ce qui n'est pas le cas : $N(uv) = N(\theta) = 0$ alors que $N(u)N(v) > 0$ car $N(u) > 0$ (resp. $N(v) > 0$) puisque $u \neq \theta$ (resp. $v \neq \theta$). Donc il n'existe pas de norme $N$ sur $E$ telle que : $\forall (f,g) \in E^2$, $N(fg) = N(f)N(g)$.

**2.** Considérons la matrice élémentaire $E_{12}$. On a : $E_{12}^2 = E_{12}E_{12} = O_n$ où $O_n$ est la matrice nulle (le «vecteur nul») de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si une telle norme $N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existait, on aurait en particulier : $N(E_{12}^2) = N(E_{12})^2$ ce qui n'est pas le cas : $N(E_{12}^2) = N(O_n) = 0$ alors que l'on a $N(E_{12})^2 > 0$ car $N(E_{12}) > 0$ puisque $E_{12} \neq O_n$. Donc il n'existe pas de norme $N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A^2) = N(A)^2$.

**3. a.** Soient $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $\|x\|_\infty$, on a : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ donc

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k^p| = |x_k|^p \leq \|x\|_\infty^p.$$

Par conséquent $\|x^p\|_\infty$ (qui est l'un des réels $|x_k|^p$) est inférieur ou égal à $\|x\|_\infty^p$. De plus soit $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_j| = \|x\|_\infty$. On a :

$$\|x^p\|_\infty = \max(|x_1^p|, \cdots, |x_n^p|) = \max(|x_1|^p, \cdots, |x_n|^p) \geq |x_j|^p (= \|x\|_\infty^p).$$

Finalement, on a bien $\|x^p\|_\infty = \|x\|_\infty^p$.

**3. b.** Soit $N$ une norme vérifiant $(*)$. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'égalité $(*)$ avec $x^2$ à la place de $x$, on a :

$$N(x^4) = N((x^2)^2) = N(x^2)^2 = (N(x)^2)^2 = N(x)^4,$$

de même $N(x^8) = N(x)^8$ et plus généralement (récurrence) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N(x^{2^k}) = N(x)^{2^k}$.

Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on a admis que $N$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ ce qui signifie qu'il existe $(a,b) \in ]0,+\infty[^2$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ a\,\|u\|_\infty \leq N(u) \leq b\,\|u\|_\infty.$$

En considérant $u = x^{2^k}$ dans l'encadrement précédent, on obtient avec 3. a. :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a\,\|x\|_\infty^{2^k} \leq N(x)^{2^k} \leq b\,\|x\|_\infty^{2^k}$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a^{\frac{1}{2^k}}\,\|x\|_\infty \leq N(x) \leq b^{\frac{1}{2^k}}\,\|x\|_\infty.$$

Or pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} t^{\frac{1}{2^k}} = \lim\limits_{k\to+\infty} e^{\frac{1}{2^k}\ln(t)} = e^0 = 1$. D'où $N(x) = \|x\|_\infty$ en faisant tendre $k$ vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent.
En conclusion, $\|\cdot\|_\infty$ est bien la seule norme $N$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété $(*)$.

---

**Exercice 5.**

**1.** On vérifie que $A^3 = I_3$. D'où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{3p} = I_3$, $A^{3p+1} = A$ et $A^{3p+2} = A^2$. Supposons un instant que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Les suites extraites (constantes ici) $(A^{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(A^{3p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergeraient vers la même limite et par unicité de la limite, on obtiendrait $I_3 = A$ ce qui est faux. D'où la divergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.

**2. a.** En regroupant par "paquets de trois", on remarque que la suite $(U_{3p})$ est constante car, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
U_{3p} = \frac{1}{3p}(I_3 + A + \cdots + A^{3p-1}) &= \frac{1}{3p}\big((I_3 + A + A^2) + \cdots + (A^{3p-3} + A^{3p-2} + A^{3p-1})\big) \\
&= \frac{1}{3p}\big(\underbrace{(I_3 + A + A^2) + \cdots + (I_3 + A + A^2)}_{p\ fois}\big) \\
&= \frac{1}{3}(I_3 + A + A^2)
\end{aligned}$$

Idem pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $U_{3p+1} = \dfrac{p}{3p+1}(I_3 + A + A^2) + \dfrac{1}{3p+1}I_3$ et $U_{3p+2} = \dfrac{p}{3p+2}(I_3 + A + A^2) + \dfrac{1}{3p+2}(I_3 + A)$.

**2. b.** D'après la question précédente, les trois suites $(U_{3p})$, $(U_{3p+1})$ et $(U_{3p+2})$ convergent vers $\frac{1}{3}(I_3 + A + A^2)$.
On en déduit classiquement (cf. cours) que la suite $(U_p)$ converge vers $\frac{1}{3}(I_3 + A + A^2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Partie facultative**.

**Exercice 6.** Soit $t \in [0,1[$. Notons $M(t)$ un majorant de la suite $(a_n t^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition de $M(t)$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n t^n \leq M(t)$.

**1.** Soit $x \in [0,1[$. Considérons un réel $t \in ]x,1[$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n x^n = a_n t^n (\frac{x}{t})^n$, on a l'encadrement : $0 \leq a_n x^n \leq M(t)(\frac{x}{t})^n$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ par le théorème de limite par encadrement (des gendarmes) car la suite géométrique $((\dfrac{x}{t})^n)$, de raison $\frac{x}{t} \in [0,1[$, converge vers 0.

**2.** On procède de la même manière. Soit $x \in [0,1[$. Considérons un réel $t \in ]x,1[$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $na_n x^n = na_n t^n (\frac{x}{t})^n$, on a l'encadrement : $0 \leq a_n x^n \leq M(t) \cdot n(\frac{x}{t})^n$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n x^n = 0$ par le théorème de limite par encadrement (des gendarmes) car la suite $(n(\dfrac{x}{t})^n)$ converge vers 0 par croissances comparées.