**Exercice 1.**

**1.** *i)* On vérifie facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0,1[$.

*ii)* La suite $u$ est donc (strictement) décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n(u_n - 1) < 0$.

*iii)* La suite $u$ converge donc vers un réel $l \in [0,1]$ par le théorème de la limite monotone car $u$ est décroissante et minorée par 0.

*iv)* En passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$, on obtient : $l = \frac{1}{2}(l + l^2)$, c'est-à-dire $l = l^2$ ou encore $l = 0$ ou $l = 1$. Donc $l = 0$ car, $u$ étant décroissante, nécessairement $l \leq u_0 < 1$.

En conclusion, la suite $u$ converge vers 0.

**2.** La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge d'après le critère de D'Alembert. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et d'après 1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(1+u_n) = \frac{1}{2} \in [0,1[.$$

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et d'après 2. :

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln(\frac{v_{n+1}}{v_n}) = \ln(2\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0}(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge par la règle de l'équivalent positif car $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, et, par le lien suite-série, la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $C = e^L$ (par continuité de la fonction exponentielle en $L$) et finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{2^n}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{C}{2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{C} = 1$).

---

**Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ (récurrence) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n^2 + u_n} - v_n) = \frac{1}{2}\frac{u_n}{\sqrt{v_n^2+u_n} + v_n} \geq 0\,(*).$$

**a)** Supposons que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. Par comparaison de termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 0}(v_{n+1} - v_n)$ converge car d'après $(*)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{4}u_n$$

puisque, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $\sqrt{v_n^2 + u_n} + v_n \geq 2v_n \geq 2v_0 = 2$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le lien suite-série.

**b)** Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $V = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Comme $(v_n)$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq V$ et d'après $(*)$ :

$$0 \leq u_n = 2(v_{n+1} - v_n)(\sqrt{v_n^2 + u_n} + v_n) = 4v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \leq 4V(v_{n+1} - v_n).$$

Par le lien suite-série, $\sum\limits_{n\geq 0}(v_{n+1} - v_n)$ converge et finalement $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge par comparaison de termes positifs.

---

**Exercice 3.**

**1.** On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = AZ_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

**2.** Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le maximum de trois réels (positifs) est l'un de ces trois réels, donc $\|X\|_\infty \geq 0$.

*(i)* Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty = 0$. Le maximum de trois réels majore ces trois réels, d'où : $|x_1| \leq 0$, $|x_2| \leq 0$ et $|x_3| \leq 0$. Mais comme une valeur absolue est positive, on a plus précisement $|x_1| = 0$, $|x_2| = 0$ et $|x_3| = 0$, c'est-à-dire $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*(ii) Homogénéité.* Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a : $\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ et

$$\|\alpha X\|_\infty = \max(|\alpha x_1|, |\alpha x_2|, |\alpha x_3|) = \max(|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|, |\alpha||x_3|).$$

Supposons pour fixer les idées que $\|X\|_\infty = |x_1|$, autrement dit que $|x_2| \leq |x_1|$ et $|x_3| \leq |x_1|$ . Alors $|\alpha||x_2| \leq |\alpha||x_1|$ et $|\alpha||x_3| \leq |\alpha||x_1|$ donc $\|\alpha X\|_\infty = \max(|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|, |\alpha||x_3|) = |\alpha||x_1| = |\alpha|\,\|X\|_\infty$.

*(iii) Inégalité triangulaire.* Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ et $\|X+Y\|_\infty = \max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, |x_3 + y_3|)$.

Soit $k \in \{1,2,3\}$ tel que $\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, |x_3 + y_3|) = |x_k + y_k|$. Comme $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$ on a bien :

$$\|X+Y\|_\infty = |x_k + y_k| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty.$$

**3.** Notons $Y = AX = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$|y_1| = |\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_3| \leq \frac{1}{3}|x_1| + \frac{1}{6}|x_3| \leq \frac{1}{3}\max(|x_1|,|x_2|,|x_3|) + \frac{1}{6}\max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$$

donc $|y_1| \leq \frac{1}{2}\|X\|_\infty$. De même, $|y_2| \leq \frac{5}{6}\|X\|_\infty$ et $|y_3| \leq \frac{5}{6}\|X\|_\infty$. Par conséquent,

$$\|AX\|_\infty = \|Y\|_\infty = \max(|y_1|,|y_2|,|y_3|) \leq \frac{5}{6}\|X\|_\infty.$$

Donc $k = \frac{5}{6} \in [0,1[$ convient.
**Remarque.** Plus généralement, on a :

$$\forall (X,X') \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})^2,\ \|AX' - AX\|_\infty = \|A(X'-X)\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|X'-X\|_\infty. \qquad (1)$$

Autrement dit, l'application $X \mapsto AX$ est $\frac{5}{6}$-lipschitzienne de $(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

**4. a.** Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty \leq (\frac{5}{6})^n\|Z_1 - Z_0\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n$.
*Initialisation.* $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\|Z_1 - Z_0\|_\infty = (\frac{5}{6})^0\|Z_1 - Z_0\|_\infty$.
*Hérédité.* Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que

$$\|Z_{n+2} - Z_{n+1}\|_\infty = \|(AZ_{n+1} + B) - (AZ_n + B)\|_\infty = \|AZ_{n+1} - AZ_n\|_\infty,$$

on a donc d'après (1)

$$\|Z_{n+2} - Z_{n+1}\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty \leq \underbrace{\frac{5}{6}\cdot(\frac{5}{6})^n}_{=(\frac{5}{6})^{n+1}}\|Z_1 - Z_0\|_\infty.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie si $\mathcal{P}_n$ est vraie.

**4. b.** D'après **4. a.** $\sum_{n\geq 0}\|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty$ converge par comparaison car la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(\frac{5}{6})^n$ converge. De plus, par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty,\ |v_{n+1} - v_n| \leq \|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty,\ \text{et } |w_{n+1} - w_n| \leq \|Z_{n+1} - Z_n\|_\infty.$$

Donc les trois séries $\sum_{n\geq 0}|u_{n+1} - u_n|$, $\sum_{n\geq 0}|v_{n+1} - v_n|$ et $\sum_{n\geq 0}|w_{n+1} - w_n|$ convergent par comparaison (de termes positifs).

**4. c.** D'après **4. b.**, les trois séries $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$, $\sum_{n\geq 0}(v_{n+1} - v_n)$ et $\sum_{n\geq 0}(w_{n+1} - w_n)$ convergent absolument donc convergent par théorème. Et le lien suite-série permet d'affirmer que les suites réelles $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes. Par conséquent, la suite de triplets $(z_n) = ((u_n, v_n, w_n))$ converge vers le triplet $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n, \lim\limits_{n\to+\infty} w_n)$.

Posons $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité $Z_{n+1} = AZ_n + B$, on obtient que $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est solution du système linéaire $L = AL + B$. Ce qui implique, après calculs, que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} z_n = (1, 0, -1).$$

---

**Exercice 4.**

**1. a.** La série $\sum_{n\geq 1}\frac{v_n}{n}$ converge absolument par comparaison car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\frac{v_n}{n}| = \frac{|v_n|}{n} \leq |v_n|$.
Comme $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, la suite $(v_n)$ converge vers 0 et est donc bornée. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq M$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n^2 \leq M|v_n|$, $\sum_{n\geq 1} v_n^2$ converge par comparaison.

**1. b.** On a : $x_n = v_n^2 - 2\frac{v_n}{n} + \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge comme somme de trois séries convergentes (cf. 1. a.)

**1. c.** Par hypothèse, à partir d'un certain indice $N$, $y_n = x_n\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$. Comme la suite $(\varepsilon_n)$ est bornée (car convergente), il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \geq N$, $|y_n| \leq C|x_n| = Cx_n$ car $x_n \geq 0$. D'où la convergence par comparaison de la série $\sum |y_n|$ par 1. b.

**2. a.** On a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 + v_n - \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) + v_n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2}(v_n - \frac{1}{n})^2 + o_{+\infty}((v_n - \frac{1}{n})^2) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) + v_n - \frac{1}{2}x_n + o_{+\infty}(x_n)
\end{aligned}$$

Posons $\alpha_n = -\frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$ et $\beta_n = -\frac{1}{2}x_n + o_{+\infty}(x_n)$. On constate que :
$\sum \alpha_n$ converge par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif) car $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$,
$\sum \beta_n$ converge par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif) car $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}x_n$, la série $\sum x_n$ (à termes positifs) étant convergente d'après 1. c.

En conclusion, $\sum(a_{n+1}-a_n)$, somme des trois séries convergentes $\sum \alpha_n$, $\sum v_n$ et $\sum \beta_n$, est une série convergente.

**2. b.** La suite $(a_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ par 2. a. et le lien suite-série.

Comme la fonction exponentielle est continue en $\ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{\ell}$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{\ell}.$$

D'où, en posant $K = e^{\ell}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{K}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nu_n}{K} = 1$. C'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}$.

La série $\sum u_n$ diverge par la règle de l'équivalent positif car la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

**3.** Posons $u_n = (\dfrac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)})^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (\dfrac{2n+2}{2n+3})^2$.

*Remarque : le critère de D'Alembert ne permet pas d'obtenir la nature de la série* $\sum u_n$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Ici

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+12n+9} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{4n+5}{4n^2+12n+9} + \frac{1}{n} = \frac{7n+9}{n(4n^2+12n+9)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{4n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série (à termes positifs) $\sum v_n$ converge (absolument)

La série $\sum u_n$ diverge donc d'après 2. b.