Séries de fonctions.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|.|$ est la valeur absolue ou le module.

1 Convergence d'une série de fonctions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $U_n = u_0 + \cdots + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement (CVS) sur* I *si pour tout* $x \in I$, *la série* $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ *converge, en d'autres termes si la suite de fonctions* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I. *Dans ce cas, la (fonction) somme* f *de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est la fonction* f *définie sur* I *par :* $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(x)$.

Application 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose : $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Définition 2. *Soit* f *une application de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément (CVU) sur* I *vers (sa somme)* f *si la suite de fonctions* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *vers* f, *c'est-à-dire si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \textit{tel que} \forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in I,\ |f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)| \leq \varepsilon$$

ou encore, notant pour tout $x \in I$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, *si et seulement si la suite de fonctions* (R_n) *converge uniformément sur* I *vers la fonction nulle sur* I.

Remarque 1. *1. La CVU de la série* $\sum u_n$ *vers* f *sur* I *implique évidemment la CVS de la série* $\sum u_n$ *vers* f *sur* I.
2. Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ *CVU sur* I, *alors la suite de fonctions* (u_n) *CVU vers la fonction nulle sur* I.
En effet, soit $\varepsilon > 0$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|R_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. *On en déduit que :*

$$\forall n \geq N+1,\ \forall x \in I,\ |u_n(x)| = |R_n(x) - R_{n-1}(x)| \leq |R_n(x)| + |R_{n-1}(x)| \leq \varepsilon.$$

Application 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Rappelons que pour toute application g bornée sur I, on note : $\|g\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |g(x)|$.

Définition 3. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge normalement (CVN) sur* I *si chaque fonction* u_n *est bornée sur* I *et si la série des normes* $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_{\infty,I}$ *converge.*

Proposition 1. `[Méthode pratique pour établir une convergence normale]`
$\sum_{n\geq 0} u_n$ *CVN sur* I *s'il existe une suite* (a_n) *de* $\mathbb{R}^+$ *(ne dépendant pas de* x *!) telle que la série* $\sum a_n$ *converge et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq a_n.$$

Proposition 2. $[CVN \Rightarrow CVA,\ CVN \Rightarrow CVU]$ *Si la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *CVN sur* I *alors :*

i) $\forall x \in I$, *la série* $\sum u_n(x)$ *converge car converge absolument, donc la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *CVS sur* I,

ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ *CVU sur* I.

Application 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 1$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. Vérifier que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $]1, +\infty[$, CVN sur tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$ mais ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.

2 Convergence uniforme et continuité

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1. *Soit $x_0 \in I$. Si chaque application u_n est continue en x_0 et si la série de fonctions $\sum u_n$ CVU sur I vers f, alors sa somme f est continue en x_0.*

En pratique, c'est généralement la propriété suivante, conséquence du théorème précédent, qui est utilisée :

Proposition 3. *Si chaque fonction u_n est continue sur I et la série de fonctions $\sum u_n$ CVU sur tout segment inclus dans I, alors $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur I.*

Application 4. `[Fonction zeta de Riemann]` Pour tout $x > 1$, on pose : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Prouver que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

3 Théorème de la double limite

Conformément au programme, on admet le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et a une extrémité de I (éventuellement infinie).*
Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I vers (sa somme) f et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} u_n(x) = \ell_n \in \mathbb{K}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge et on a : $\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, c'est-à-dire : $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Application 5. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

4 Convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème 3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ telle que chaque application u_n est continue sur $[a, b]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ CVU sur $[a, b]$ vers sa somme f, alors la série de terme général $\int_a^b u_n(x)\,dx$ converge et on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Remarque 2. *i) f est continue sur $[a, b]$ par le théorème 1.*

ii) Sous les hypothèses précédentes, on dit que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est « intégrable terme à terme» sur $[a, b]$.

Application 6. Justifier que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^\pi f(x)\,dx$.

5 Convergence uniforme et dérivation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème 4. `[Séries de fonctions de classe` $\mathcal{C}^1$`.]` *Si :*
i) chaque application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
ii) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers sa somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$,
iii) la série de fonctions $\sum u_n'$ CVU sur tout segment inclus dans I vers sa somme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$,
alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

Remarque 3. *Les hypothèses ii) et iii) impliquent que la série de fonctions $\sum u_n$ CVU sur tout segment inclus dans I vers f.*

Application 7. Prouver que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Théorème 5. `[Séries de fonctions de classe` $\mathcal{C}^p$`]` *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$. *Si :*
i) chaque application u_n *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I,
ii) pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, *la série de fonctions* $\sum u_n^{(k)}$ *converge simplement sur* I,
iii) la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ *CVU sur tout segment inclus dans* I,
alors $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I *et* $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

Remarque 4. *On utilise p fois le théorème 4 pour prouver ce théorème : en effet, ii) et iii) impliquent plus précisement que pour tout* $k \in [\![0, p-1]\!]$, *la série de fonctions* $\sum u_n^{(k)}$ *converge CVU sur tout segment inclus dans* I *(cf. remarque 3).*

Application 8. Prouver que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.