Séries entières.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|.|$ est la valeur absolue ou le module. On convient que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1$. En particulier, $0^0 = 1$. On rappelle qu'une suite de complexes est bornée si la suite des modules est majorée.

1 Définition. Convergence.

Définition 1. *Une série entière de la variable réelle x (resp. complexe z) est une série du type $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$) où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle (resp. complexe), appelée suite des coefficients de la série entière.*

On commence en général par déterminer les complexes z (ou les réels x) pour lesquels la série (entière) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$) converge.
Remarquons déjà qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge pour $z = 0$ (avec a_0 pour somme) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n 0^n = \lim_{N\to+\infty} a_0 = a_0.$$

Avant de passer à l'étude générale de la convergence, étudions la convergence de trois séries entières complexes particulières :

Exemples. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n!$. Posons $u_n(z) = a_n z^n$. Si $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) \neq 0$ et $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = (n+1)|z|$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(z)| = +\infty$ par le critère de D'Alembert. D'où la divergence grossière de la série (entière) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Cette série entière ne converge donc que pour $z = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. On retrouve la série (géométrique) $\sum_{n\geq 0} z^n$. On sait que si $|z| < 1$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge (absolument) et que si $|z| \geq 1$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$. La série (entière) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} z^n$ converge (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ (en utilisant le critère de D'Alembert). De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} z^n = e^z$.

Lemme 1. `[Lemme d'Abel]` *Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leq M$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n z^n = a_n z_0^n (\dfrac{z}{z_0})^n$ et, par propriétés du module, $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| (\dfrac{|z|}{|z_0|})^n \leq M |\dfrac{z}{z_0}|^n$. D'où la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ par comparaison de termes positifs car la série géométrique $\sum_{n\geq 0} (\dfrac{|z|}{|z_0|})^n$ (de raison $\frac{|z|}{|z_0|}| \in [0, 1[$) converge. □

Lemme 2. *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. L'ensemble $I(a)$ des réels $r \in \mathbb{R}^+$ tels que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée est un intervalle contenant 0.*

Démonstration. *i)* $0 \in I(a)$: la suite $(|a_n| 0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $|a_0|$ car le terme d'indice $n = 0$ est $|a_0|$ et les autres termes sont nuls.
ii) Montrons que $I(a)$ est un intervalle en vérifiant que si $r \in I(a)$, $[0, r] \subset I(a)$: soient $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq C$ et $s \in [0, r]$. On a bien $s \in I(a)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| s^n \leq |a_n| r^n \leq C$. □

Définition 2. `[Rayon de convergence]` *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Le rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est la borne supérieure de l'intervalle $I(a)$, c'est-à-dire «l'extrémité» de l'intervalle $I(a)$ (égal à $+\infty$ si $I(a) = [0, +\infty[$).*

Remarque 1. *Il y a quatre types d'intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$ et contenant 0 : $\{0\}$, $[0, R[$, $[0, R]$ (avec $R > 0$), et $[0, +\infty[$. Si $I(a) = \{0\}$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence 0, si $I(a) = [0, R[$ ou $[0, R]$, R est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et enfin si $I(a) = \mathbb{R}^+$, on dit que la série entière a pour rayon de convergence $+\infty$.*

Exercice 1. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ avec $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer $I(a)$ et le rayon de convergence R de cette série entière.

Proposition 1. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. On distingue trois cas :*

i) $R = 0$: La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.

ii) $R > 0$: Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

iii) $R = +\infty$: La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. $i)$ Soit $z \neq 0$. Alors $|z| > 0$ et comme $I(a) = \{0\}$, $|z| \notin I(a)$. Par définition de $I(a)$, la suite $(|a_n||z|^n)$ n'est pas majorée. Donc la suite $(a_n z^n)$ ne peut pas converger vers 0 (car toute suite convergente est bornée) et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

$ii)$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Considérons $r \in]|z|, R[$. Comme $I(a) = [0, R[$ ou $[0, R]$, $r \in I(a)$, autrement dit la suite $(a_n r^n)$ est bornée. En utilisant le lemme d'Abel avec $z_0 = r$, on obtient la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ car $|z| < r = |z_0|$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Alors $|z| \notin I(a)$ car $I(a) = [0, R[$ ou $[0, R]$. Par définition de $I(a)$, la suite $(|a_n||z|^n)$ n'est pas majorée. Par conséquent, la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 (car toute suite convergente est bornée) et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge donc grossièrement.

$iii)$ Soit $z \in \mathbb{C}$ (quelconque). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| > |z|$. Comme $I(a) = \mathbb{R}^+$, $|z_0| \in I(a)$ et la suite $(|a_n||z_0|^n)$ est majorée, autrement dit la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée. D'où la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ par le lemme d'Abel. □

Remarque 2. *Dans le cas ii) $R > 0$, on dit que $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ est le disque (ouvert) de convergence (absolue) de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Il n'a pas de résultat général concernant la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ si $|z| = R$. On dit parfois que $C = \{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$ est le cercle d'incertitude de la série entière.*

La proposition précédente permet donc de déterminer le rayon d'une série entière en n'utilisant pas la définition $R = \sup I(a)$:

Proposition 2. `[Caractérisation du rayon de convergence]` *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est l'unique élément de $[0, +\infty]$ tel que si $|z| < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0.*

Application 2. Déterminer le rayon de convergence des trois séries entières $\sum_{n\geq 0} n! z^n$, $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$.

Le résultat suivant sert souvent en pratique :

Proposition 3. *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors :*

i) Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$,

ii) Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.

Démonstration. $i)$ Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge. Raisonnons par l'absurde. Si $R < |z_0|$, par la proposition précédente, la suite $(a_n z_0^n)$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge grossièrement, en contradiction avec l'hypothèse de départ.

$ii)$ Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Si $R > |z_0|$, par la proposition précédente, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge (absolument), en contradiction avec l'hypothèse de départ.

□

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ en considérant $z_0 = -1$ et $z_0 = 1$.

Remarque 3. `[Utilisation du critère de D'Alembert]` *L'étude de la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ s'effectue dans certains cas en utilisant le critère de D'Alembert.*

Exercice 4. Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Soit $z \neq 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = \frac{n!}{n^n} z^n$. On a : $u_n(z) \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|}{e}$ (à vérifier).

D'après le critère de D'Alembert, si $|z| < e$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$ converge absolument et si $|z| > e$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n(z)| = +\infty$ ce qui implique que la suite $(u_n(z))$ ne tend pas vers 0 (car si elle tendait vers 0, la suite des modules convergerait aussi vers 0 ce qui n'est pas le cas !) et la série $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$ diverge donc grossièrement. D'où $R = e$ (cf. Proposition 2).

La proposition suivante permet de comparer les rayons de convergence de deux séries entières et peut être utile :

Proposition 4. *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Alors :*
i) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
ii) Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration. $i)$ Il suffit de prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$. Par caractérisation de R_b, la série $\sum_{n\geq 0} |b_n||z|^n$ converge. Or pour tout $n \geq N$, $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |b_n||z|^n$.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge bien par comparaison de termes positifs.

$ii)$ Comme $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq 2|b_n|$. En utilisant $i)$, on obtient $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$. D'où $R_a = R_b$. □

Exercice 5. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} P(n) z^n$.

2 Opérations sur les séries entières.

2.1 Somme de deux séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b

Définition 3. *La série entière somme des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$.*

Proposition 5. *Notons R_{a+b} le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$. On a :*
i) $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ et si $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.
ii) Si $R_a \neq R_b$, $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. $i)$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Comme $|z| < R_a$ (resp. $|z| < R_b$), $\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} |b_n||z|^n$) converge. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(a_n + b_n) z^n| = |a_n z^n + b_n z^n| \leq |a_n||z|^n + |b_n||z|^n$, la série $\sum_{n\geq 0} |(a_n + b_n) z^n|$ converge par comparaison. D'où $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ par la proposition 2. Et l'égalité demandée est immédiate (somme d'une somme de deux séries convergentes).

$ii)$ Supposons $R_a < R_b$. Soit $r \in]R_a, R_b[$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ diverge (grossièrement), $\sum_{n\geq 0} b_n r^n$ converge (absolument) donc la série somme $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) r^n$ diverge. On en déduit que $R_{a+b} \leq r$. En faisant tendre r vers R_a^-, on obtient $R_{a+b} \leq R_a = \min(R_a, R_b)$ d'où l'égalité $R_{a+b} = R_a = \min(R_a, R_b)$ d'après $i)$. □

Exercice 6. Soient $a_n = 1$ et $b_n = -1$. Calculer R_a, R_b et R_{a+b}.

2.2 Produit de deux séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b

Définition 4. *La série entière produit des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Exercice 7. Vérifier que le carré de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ est la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$.

Proposition 6. *Notons R_c le rayon de convergence du produit $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Alors :*

$R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et si $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$.

Démonstration. On applique le théorème du chapitre séries numériques sur le produit de deux séries absolument convergentes. □

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$.

3 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note $f(x)$ la somme de la série (absolument) convergente $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On montre dans cette section que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R, R[$, on pose : $u_n(x) = a_n x^n$.

Lemme 3. *La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.*

Démonstration. Soit $[c, d] \subset]-R, R[$. Considérons $r \in]0, R[$ tel que $[c, d] \subset]-r, r[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [c, d],\ |u_n(x)| = |a_n||x|^n \leq |a_n|r^n = |a_n r^n|.$$

D'où la CVN de $\sum u_n$ sur $[c, d]$ car la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente puisque $r \in]-R, R[$. □

Remarque 4. *Attention ! Ne pas affirmer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]-R, R[$. C'est faux en général. Pour s'en convaincre, considérons la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$: on a $R = 1$, $\|u_n\|_{\infty,]-1,1[} = \frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$ car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.*

Lemme 4. *Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. On suppose $R > 0$. Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R'$. Comme la série $\sum n a_n z^n$ converge absolument (propriété de R'), la série $\sum a_n z^n$ converge aussi absolument par comparaison car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq n|a_n||z|^n (= |n a_n z^n|).$$

D'où $R \geq R'$ par propriété de R.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Considérons $s \in]|z|, R[$. Par définition de R, la suite $(|a_n|s^n)$ est majorée : il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n|s^n \leq C$. Et on vérifie que la série $\sum n(\frac{|z|}{s})^n$ converge avec le critère de D'Alembert car $0 \leq \frac{|z|}{s} < 1$.
Donc la série $\sum n a_n z^n$ converge absolument par comparaison car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |n a_n z^n| = |a_n|s^n \cdot n(\frac{|z|}{s})^n \leq Cn(\frac{|z|}{s})^n.$$

D'où $R' \geq R$ par propriété de R'. Finalement, $R' = R$. Le cas $R = +\infty$ est analogue. □

Remarque 5. *Ces deux lemmes impliquent que la série entière* $\sum_{n\geq 1} u'_n$ *converge normalement sur tout segment inclus dans* $]-R,R[$.

Exercice 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq p} n(n-1)\cdots(n-(p-1))a_n z^{n-p}$ est égal à R.

3.1 Continuité

Proposition 7. *f est continue sur $]-R,R[$.*

Démonstration. Chaque fonction monôme u_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-R,R[$, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$ (cf. lemme 3). Donc f est continue sur $]-R,R[$ par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions (CVU et continuité). □

3.2 Dérivabilité terme à terme

Proposition 8. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n$.*

Démonstration. Chaque fonction monôme u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-R,R[$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R,R[$ car, par propriété de R, $\forall x \in]-R,R[$, $\sum u_n(x)$ converge absolument ; et d'après la remarque 5 la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ par le théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions (CVU et continuité) et, u'_0 étant la fonction nulle, on a : $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$. □

Ce résultat permet de calculer certaines sommes de séries convergentes :

Exemple. `[Dérivée de la série géométrique.]` Pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Le rayon de convergence de la série entière (géométrique) $\sum x^n$ est égal à 1. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in]-1,1[$. D'après la proposition précédente, f est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. Or $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ d'où $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et finalement l'égalité : $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

Exercice 10. Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Application. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$.

Plus généralement :

Proposition 9. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-R,R[$:*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1))a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'utiliser p fois la proposition 8 sachant que le rayon de convergence des séries entières obtenues par dérivation terme à terme reste égal à R. □

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

La somme f d'une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$ est donc, sur $]-R,R[$, la somme de sa « série de Taylor en 0 » :

Corollaire 1. `[Série de Taylor en 0]` *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et donc : $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

3.3 Intégration terme à terme. Primitive

Proposition 10. *Soit $[\alpha,\beta]\subset]-R,R[$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_\alpha^\beta a_nt^n\,dt$ converge et on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\alpha^\beta a_nt^n\,dt$.*

En particulier, $F:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}$ est une primitive de f sur $]-R,R[$.

Démonstration. Comme la série de fonctions continues $\sum u_n$ CVU sur $[\alpha,\beta]$ d'après le lemme 3, il suffit d'utiliser le théorème CVU et intégration du chapitre série de fonctions. En particulier, pour $\alpha=0$ et $\beta=x\in]0,R[$, $[0,x]\subset]-R,R[$, on a donc :

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}.$$

Idem si $x\in]-R,0]$, $[x,0]\subset]-R,R[$ et on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt=-\int_x^0 f(t)\,dt=-\sum_{n=0}^{+\infty}\int_x^0 a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}.$$

□

Exercice 12. 1. Déterminer le rayon de convergence R et la somme pour $x\in]-R,R[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^nx^{3n}$.

2. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}$ et prouver que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1+t^3}$.