Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n^o 5.

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $u_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ normalement sur $[0,1]$.

Exercice 2. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) et de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n(x) = (-1)^n \ln(1 + \dfrac{x}{n(1+x)})$.

1. Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. **1.** Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Justifier l'existence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n})$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Simplifier $f(x+1) - f(x)$.

Exercice 5. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-\lambda_n x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Prouver que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6. Soit $u_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

1. a. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.

1. b. Vérifier que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

3. a. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)}$.

3. b. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que f n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 7. On considère, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et préciser f'.

Exercice 8. **1.** Justifier que l'on définit une application f continue sur $[0, +\infty[$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 9. $\triangleright$ On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Pour tout $x > 0$, on pose : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Prouver que $S(x)$ existe et que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2. Prouver que $\forall x > 0$, $S(x+1) = xS(x) - e^{-1}$.

3. Prouver que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{x}$.

Exercice 10. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. **1.** Justifier que l'on définit une application f continue sur $]1, +\infty[$ en posant : $\forall x > 1$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 12. **1.** Justifier que l'on définit une application f continue sur $]0,+\infty[$ en posant : $\forall x>0,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

2. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Exercice 13. **1.** Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1-2e^{ix}} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{2^p}$.

2. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Calculer $I_n=\int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{1-2e^{ix}}\,dx$.

3. Soient $z\in\mathbb{C}^*$ et $r\in]0,|z|[$. Calculer $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{z-re^{ix}}$ en faisant apparaître la somme d'une série géométrique convergente.

Exercice 14. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x>0$. Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, on pose : $f_x(t)=\frac{2x}{x^2+t^2}$.

2. a. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} f_x(t)\,dt \leq \frac{2x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} f_x(t)\,dt$.

2. b. En déduire un encadrement de $f(x)$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 15. Soit $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16. On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

3. a. Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer une égalité simple reliant $f(2x)$, $f(x)$ et $\sin x$.

3. b. Déduire de 3. a, en raisonnant par l'absurde, que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 17. On note, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{x}{n^2})$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 18. Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

Exercice 19. Soit $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. On note S la somme de la série de Riemann d'exposant 2, i.e. $S=\zeta(2)$.
Prouver que $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)=S$ et retrouver le résultat de 3.

Exercice 20.

1. a. Soit $x\in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ converge. On pose : $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

1. b. Prouver en utilisant le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et préciser $S'(x)$, $x\in]-1,1[$.

1. c. En déduire que $\forall x\in]-1,1[$, $S(x)=-\ln(1-x)$.

Soit $x\in]-1,1[$. On pose : $f_x(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos n\theta}{n}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

2. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_x'(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

4. Déduire de ce qui précède que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ f_x(\theta)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2-2x\cos\theta)$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{\pi}\ln(1+x^2-2x\cos\theta)d\theta$.