Spé PC. Corrigé du devoir de mathématiques en temps limité n^o 1 (21.09.2024).

Exercice 1. Comme la suite (u_n) est croissante, la suite (u_{3n}) est aussi croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3(n+1)} = u_{3n+3} \geq u_{3n}$, et comme elle converge vers ℓ, elle est majorée par ℓ. On en déduit que la suite croissante (u_n) est aussi majorée par ℓ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{3n} \leq \ell$. On peut donc affirmer que la suite $u = (u_n)$ converge car elle est croissante et majorée. Plus précisement $u = (u_n)$ converge aussi vers ℓ car la suite (u_{3n}), extraite de la suite convergente u, converge vers ℓ.

Exercice 2. 1. a. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2\big) &= \sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n}(x_i^2y_j^2 - 2x_iy_jx_jy_i + x_j^2y_i^2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2(\sum_{j=1}^{n}y_j^2) - 2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)(\sum_{j=1}^{n}x_jy_j) + \sum_{i=1}^{n}y_i^2(\sum_{j=1}^{n}x_j^2)\\ &= 2\big((x_1^2+\cdots+x_n^2)\cdot(y_1^2+\cdots+y_n^2) - (x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2\big)\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{j=1}^{n}x_j^2 = x_1^2+\cdots+x_n^2$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i^2 = \sum_{j=1}^{n}y_j^2 = y_1^2+\cdots+y_n^2$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i = \sum_{j=1}^{n}x_jy_j = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

1. b. Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2\big) \in \mathbb{R}^+$, d'après 1. a. $(x_1^2+\cdots+x_n^2)\cdot(y_1^2+\cdots+y_n^2) \geq (x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2$.

2. *Indication :* Utiliser 1. b. avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \dfrac{a_k}{\sqrt{a_k+b_k}}$ et $y_k = \sqrt{a_k+b_k}$.

3. Rappelons que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\dfrac{a^2}{a+b} = a - (a||b)$ $(*)$.

Donc d'après 2. $\dfrac{A_n^2}{A_n+B_n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}$ ou encore en utilisant $(*)$:

$$A_n - (A_n||B_n) \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k - (a_k||b_k)) = A_n - \sum_{k=1}^{n}(a_k||b_k)$$

et finalement $(A_n||B_n) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k||b_k)$. cqfd.

Exercice 3. *Rappel ("Lemme d'annulation") :* Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$. On a : $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ g(x) = 0$.

1. *a)* Notons θ la fonction nulle sur $[0,1]$. On a : $n(\theta) = 0$. Soit $f \in E$ telle que $n(f) = 0$. Alors $|f(0)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(x)|dx = 0$ (car une somme de deux réels positifs est nulle ssi les deux sont nuls). Comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, on peut utiliser le lemme rappelé ci-dessus avec $g = |f'|$ et on a donc $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 0$. Donc f est constante sur l'intervalle $[0,1]$ et donc nulle sur $[0,1]$ car $f(0) = 0$. Ainsi la fonction θ est la seule fonction f telle que $n(f) = 0$.

b) n est homogène. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par propriété de la valeur absolue et linéarité de l'intégrale, on a :

$$n(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(x)|\,dx = |\lambda|(|f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,dx) = |\lambda| n(f).$$

c) inégalité triangulaire. Soit $(f,g) \in E^2$. Par propriété de la valeur absolue, croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$n(f+g) = |f(0)+g(0)| + \int_0^1 \underbrace{|f'(x)+g'(x)|}_{\leq |f'(x)|+|g'(x)|}\,dx \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 (|f'(x)| + |g'(x)|)dx \leq n(f) + n(g).$$

2. a. Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Comme $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$, on a bien :

$$|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t)dt| \leq |f(0)| + |\int_0^x f'(t)dt| \leq |f(0)| + \int_0^x \underbrace{|f'(t)|}_{\geq 0}\,dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt = n(f)\ (*)$$

par propriété de la valeur absolue et de l'intégrale. Puis, en considérant $(*)$ avec un réel $x \in [0,1]$ en lequel la fonction $|f|$ continue sur le segment $[0,1]$ atteint son maximum, on obtient : $\|f\|_\infty \leq n(f)$.

2. b. *i)* D'une part, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n}|\sin(n\pi x)| \leq \dfrac{1}{n}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n}$.

D'autre part, $\|f_n\|_\infty \geq |f_n(\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\in]0,1[})| = \dfrac{1}{n}|\sin(\dfrac{\pi}{2})| = \dfrac{1}{n}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$.

ii) On a : $f_n(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n'(x) = \pi\cos(n\pi x)$. Commençons par effectuer le changement de variable $u = n\pi x$ $(du = n\pi dx)$:

$$n(f_n) = \pi\int_0^1 |\cos(n\pi x)|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\,du.$$

De plus, $|\cos|$ étant π-périodique, on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(u)|\,du = \int_{\pi}^{2\pi} |\cos(u)|\,du = \cdots = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\cos(u)|\,du$ donc par la relation de Chasles,

$$n(f_n) = \int_0^{\pi} |\cos(u)|\,du$$

car

$$\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\,du = \int_0^{\pi} |\cos(u)|\,du + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos(u)|\,du + \cdots = + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\cos(u)|\,du = n\int_0^{\pi} |\cos(u)|.$$

Et, $|\cos|$ étant π-périodique et paire, $n(f_n) = \displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(u)|\,du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)|\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\,du.$

2. c. Terminons le calcul de $n(f_n)$. Comme la fonction cosinus est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$n(f_n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 2[\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

S'il existait un réel $a > 0$ tel $\forall f \in E$, $an(f) \leq \|f\|_\infty$, on aurait donc, en considérant $f = f_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2a \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi *tous* les entiers naturels non nuls seraient inférieurs ou égaux au réel strictement positif $\frac{1}{2a}$, ce qui est évidemment absurde.
Donc il n'existe pas de constante $a > 0$ telle que $\forall f \in E$, $an(f) \leq \|f\|_\infty$: les normes n et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

3. N est la norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx.$$

Vérifions que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire sur E :
a) [Symétrie et bilinéarité] $\langle\ ,\ \rangle$ est clairement symétrique, linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc bilinéaire.
b) [Positivité] $\forall f \in E$, $\langle f, f\rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2\,dx \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale d'une fonction continue positive étant positive.
c) [Définie-positivité] *Rappel ("lemme d'annulation") :* Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$. On a : $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ g(x) = 0$.
Soit $f \in E$. En utilisant le rappel avec $g = f'^2$ continue et positive sur $[0,1]$, on a donc :

$$\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f(0)^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 f'(x)^2\,dx = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f'(x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f'(x) = 0.$$

Donc $\langle f, f\rangle = 0$ ssi $f(0) = 0$ et f est constante sur $[0,1]$, donc ssi f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

4. a. L'inégalité demandée s'obtient directement avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathbb{R}^2$:

$$|a+b| = |1\cdot a + 1\cdot b| \leq \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

ou en comparant les carrés car $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \in \mathbb{R}^+$.
Enfin pour obtenir l'égalité demandée, il suffit d'après 2. a. de montrer que $n(f) \leq \sqrt{2}N(f)$.
En considérant l'inégalité précédente avec $a = |f(0)|$ et $b = \int_0^1 |f'(t)|\,dt$, on a déjà :

$$n(f) \leq \sqrt{2}\sqrt{f(0)^2 + (\int_0^1 |f'(t)|\,dt)^2}.$$

Puis on obtient l'inégalité demandée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$:

$$\forall (u,v) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2,\ (\int_0^1 u(t)v(t)\,dt)^2 \leq \int_0^1 u(t)^2\,dt \cdot \int_0^1 v(t)^2\,dt$$

pour $u(t) = 1$ et $v(t) = |f'(t)|$ donnant : $(\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt)^2 \leq (\int_0^1 f'(t)^2\,dt.$

4. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\|g_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = \max\limits_{x\in[0,1]} x^n = 1$ et $N(g_n) = \sqrt{0 + \displaystyle\int_0^1 (nx^{n-1})^2\,dx} = n\sqrt{\displaystyle\int_0^1 x^{2n-2}\,dx} = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}.$

4. c. S'il existait un réel $a > 0$ tel $\forall f \in E$, $aN(f) \leq \|f\|_\infty$, on aurait donc, en considérant $f = g_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*},\ a\frac{n}{\sqrt{2n-1}} \leq 1.$$

Autrement dit la suite $(a\frac{n}{\sqrt{2n-1}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ serait majorée (par 1), ce qui est absurde car $\lim\limits_{n\to+\infty} a\dfrac{n}{\sqrt{2n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{n} = +\infty$.
Donc il n'existe pas de constante $a > 0$ telle que $\forall f \in E$, $aN(f) \leq \|f\|_\infty$: les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 4. *Indications et réponses.*

1. Effectuer un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (à $x \in \mathbb{R}$ fixé). La preuve de «l'hérédité» utilise :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

avec $a = nx$ et $b = x$.

2. Poser $A_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix}$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l_2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = l_3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = l_4$.

3. a. Rappelons que $\forall x\in[-1,1]$, $\sin(\arcsin x)=x$ et $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.
Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Observer que $\frac{a}{\sqrt{a^2+n^2}}\in[-1,1]$ car $|a|\le\sqrt{a^2+n^2}$, $\sin(x_n)=\frac{a}{\sqrt{a^2+n^2}}$ et $\cos(x_n)=\frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}}$.

3. b. D'après 1. $\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n=(1+\frac{a^2}{n^2})^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}\cos(nx_n) & -\sin(nx_n)\\ \sin(nx_n) & \cos(nx_n)\end{pmatrix}$.

D'une part, $(1+\frac{a^2}{n^2})^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{a^2}{n^2})}=e^{\frac{n}{2}(\frac{a^2}{n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}))}=e^{\frac{a^2}{2n}+o_{+\infty}(\frac{1}{n})}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{a^2}{n^2})^{\frac{n}{2}}=1$, par composition de limites car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^2}{2n}+o_{+\infty}(\dfrac{1}{n})=0$ et la fonction exponentielle est continue en 0, d'autre part, sachant que $\arcsin(t)\underset{t\to0}{\sim}t$:

$$nx_n=n\arcsin(\frac{a}{\sqrt{a^2+n^2}})\underset{n\to+\infty}{\sim}n\frac{a}{\sqrt{a^2+n^2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}a$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+n^2}}=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=a$ et par continuité des fonctions cos et sin en a,

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}\cos(nx_n) & -\sin(nx_n)\\ \sin(nx_n) & \cos(nx_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a) & -\sin(a)\\ \sin(a) & \cos(a)\end{pmatrix}.$$

Finalement, d'après 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(a) & -\sin(a)\\ \sin(a) & \cos(a)\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

1. Σ_n est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car Σ_n est incluse dans la sphère de centre la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall M=(m_{ij})\in\Sigma_n,\ \|M\|_1=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|m_{ij}|=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}=\sum_{i=1}^n 1=n.$$

2. Σ_n est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\forall A=(a_{ij})\in\Sigma_n$, $\forall B=(b_{ij})\in\Sigma_n$ et $\forall t\in[0,1]$, $C=(1-t)A+tB=(c_{ij})\in\Sigma_n$:

a) $\forall(i,j)\in\{1,\cdots,n\}$, $c_{ij}=(1-t)a_{ij}+tb_{ij}\in\mathbb{R}^+$ car $1-t$, a_{ij}, t et b_{ij} sont positifs.

b) $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n c_{ij}=\sum_{j=1}^n((1-t)a_{ij}+tb_{ij})=(1-t)\sum_{j=1}^n a_{ij}+t\sum_{j=1}^n b_{ij}=(1-t)\cdot1+t\cdot1=1$.

3. Utilisons la caractérisation séquentielle d'un fermé pour prouver que Σ_n est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Σ_n, supposée convergente vers $L\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $L\in\Sigma_n$.
En effet, notons $A_p=(a_{ij,p})$ et $L=(l_{ij})$. On a :

a) $\forall(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2$, $l_{ij}=\lim\limits_{p\to+\infty}a_{ij,p}\in\mathbb{R}^+$ car la limite d'une suite réelle positive convergente est positive.

b) $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n l_{ij}=\sum_{j=1}^n\lim_{p\to+\infty}a_{ij,p}=\lim_{p\to+\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij,p}}_{=1}=1$.

4. `[Très classique !]` Soient $A=(a_{ij})\in\Sigma_n$ et $B=(b_{ij})\in\Sigma_n$. Posons $C=AB=(c_{ij})$. Rappelons que

$$\forall(i,j)\in\{1,\cdots,n\},\ c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

On constate que :

a) $\forall(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2$, $c_{ij}\in\mathbb{R}^+$ car c_{ij} est une somme de n réels positifs.

b) $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n c_{ij}=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^n a_{ik}(\sum_{j=1}^n b_{kj})\underbrace{=}_{B\in\Sigma_n}\sum_{k=1}^n a_{ik}\underbrace{=}_{A\in\Sigma_n}1$.

5. On vérifie facilement par récurrence sur p en utilisant le résultat précédent que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ A^p\in\Sigma_n.$$

Et comme Σ_n est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. **3.**), $L\in\Sigma_n$ d'après la caractérisation séquentielle d'un fermé puisque L est la limite d'une suite convergente de matrices de Σ_n.
De plus en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité $A^{2p}=(A^p)^2$, on obtient par unicité de la limite d'une suite convergente que $L^2=L$ car (A^{2p}) tend vers L en tant que suite extraite de la suite convergente (A^p) et tend vers L^2 en tant que carré de la suite convergente (A^p).

Exercice 6. *Un calcul de somme de série convergente.*

1. Comme $f(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n^2}$, la série $\displaystyle\sum_{n\ge3}f(n)$ converge par la règle de l'équivalent positif car $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

2. Par un calcul classique d'identification de polynômes, on obtient $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{8}$ et $c=-\frac{5}{8}$.
On peut aussi calculer plus rapidement a, b, c en admettant la décomposition en éléments simples donnée et en remarquant alors que $a=\lim\limits_{x\to0,\,x\ne0}xf(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$, $b=\lim\limits_{x\to2,\,x\ne2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-1}{x(x+2)}=\dfrac{3}{8}$ et $c=\lim\limits_{x\to-2,\,x\ne-2}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-1}{x(x-2)}=-\dfrac{5}{8}$. On observe que $a+b+c=0$.

3. Posons, pour tout pour $n \geq 3$, $U_n = \sum_{k=3}^{n} f(k)$ et $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}$. D'après **2.** :

$$U_n = aS_n + b\,(S_n - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2}) + c\,(S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}),$$

c'est-à-dire $U_n = \frac{3}{2}\,b - \frac{7}{12}\,c - b\,(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}) + c\,(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2})$ car $a + b + c = 0$.

Finalement, $\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) = \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}\,b - \frac{7}{12}\,c = \frac{9}{16} + \frac{35}{96} = \frac{89}{96}$.

Exercice 7. *a*) Posons $a_n = \sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$, on a donc :

$$a_n = \frac{1}{6n^3} + o_{+\infty}(\frac{1}{6n^3}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$, d'exposant $3 > 1$, converge, donc la série $\sum a_n$ converge par la règle de l'équivalent positif.

b) Posons $b_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $e^x = 1 + x + o_0(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$, on a donc :

$$b_n = e^{\frac{\ln(n)}{n^2}} - 1 = \frac{\ln(n)}{n^2} + o_{+\infty}(\frac{\ln(n)}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

La série (de Bertrand) positive $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge par la règle de Riemann car

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1,5}\frac{\ln(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

donc la série $\sum b_n$ converge par la règle de l'équivalent positif.

c) Posons $c_n = \ln(\frac{n^2+7}{n^2+6})$, $n \in \mathbb{N}$. Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a donc :

$$c_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2+6}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, d'exposant $2 > 1$, converge, donc la série $\sum a_n$ converge par la règle de l'équivalent positif.

d) Posons $d_n = \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!}$, $n \in \mathbb{N}$. On a : $d_n > 0$ (rappelons que par convention $0! = 1$) et après simplifications et multiplications d'équivalents :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^2\cdot 3^3\cdot n^5}{5^5\cdot n^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^2\cdot 3^3}{5^5}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^5} \in [0,1[$, la série $\sum d_n$ converge par la règle de D'Alembert.

e) Posons $u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$. On a : $u_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{-n}$.
La série $\sum u_n$ converge par la règle de l'équivalent positif car la série géométrique $\sum e^{-n}$ (de raison $e^{-1} \in]0,1[$) converge.

Exercice 8.
1. La série $\sum u_n$ converge. D'après le cours, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Comme la limite d'une suite décroissante et convergente minore tous les termes de la suite, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2. a. La suite (u_n) est décroissante, donc en particulier $\forall k \in \{n+1, \cdots, 2n\}$, $u_k \geq u_{2n}$.
Par conséquent, $U_{2n} - U_n = \underbrace{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}_{n \text{ termes}} \geq nu_{2n}$.

2. b. Par hypothèse, $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} U$ donc, d'après le cours, la suite (U_{2n}), extraite de (U_n), a aussi pour limite U et par différence, $U_{2n} - U_n \underset{n\to+\infty}{\to} U - U = 0$. Or, d'après **2. a**, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq nu_{2n} \leq U_{2n} - U_n$. Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$.

2. c. Posons $a_n = nu_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_{2n} = 2nu_{2n}$ donc d'après **2. b**, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2.0 = 0$.
En outre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n}$ car la suite (u_n) est décroissante.
Et comme la suite (u_{2n}), extraite de (u_n), a aussi pour limite 0, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n} = 2\lim_{n\to+\infty} nu_{2n} + \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 2.0 + 0 = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$. Enfin, comme les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite 0, un résultat classique du cours nous donne : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $V_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{ku_k}_{w_k} - \underbrace{(k+1)u_{k+1}}_{w_{k+1}}) + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}$. La somme "télescopique" $\sum_{k=1}^{n}(ku_k - (k+1)u_{k+1})$ se simplifie et est égale à $w_1 - w_{n+1} = u_1 - (n+1)u_{n+1}$.

Finalement, $V_n = u_1 - (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} - (n+1)u_{n+1} = U_n - nu_{n+1}$.

3. b. Par positivité et décroissance de (u_n), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq nu_{n+1} \leq nu_n$.
Donc, par **2. c.** et le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} nu_{n+1} = 0$. Par conéquent :

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - nu_{n+1}) = U - 0 = U.$$

On vient donc de prouver que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et que sa somme est égale à U.

4. a. *Existence de u_n.* Remarquons que $u_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ (noté traditionnellement $\zeta(3)$) [1] est la somme de la série de Riemann (convergente) d'exposant 3. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ est le reste d'ordre $n-1$ de la série de Riemann d'exposant 3. En d'autres termes, u_n est la différence (strictement positive) entre la somme (de série) $\zeta(3)$ et la somme partielle d'indice $n-1$ de la série de Riemann d'exposant 3 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} \tag{1}$$

Décroissance de (u_n). On a $u_2 - u_1 = (\zeta(3) - 1) - \zeta(3) = -1$ et, plus généralement, en utilisant (1) :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} - (\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}) = -\frac{1}{n^3} < 0.$$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Limite de (u_n). Comme $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3)$, on obtient, en utilisant à nouveau (1) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}\right) = \zeta(3) - \zeta(3) = 0.$$

4. b. Classique. Utiliser la décroissance sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ et la relation de Chasles. Voir dans le chapitre séries le paragraphe comparaison série-intégrale.

4. c. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = u_{n+1}$ et d'autre part,

$$\lim_{p \to +\infty} \int_n^{n+p} \frac{dx}{x^3} = \lim_{p \to +\infty} [-\frac{1}{2x^2}]_n^{n+p} = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+p)^2}) = \frac{1}{2n^2}.$$

Il nous reste à faire tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question **4. b.** : $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \int_n^{n+p} \frac{dx}{x^3}$, valable pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ce passage à la limite conduit effectivement à : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$.

On a donc $\forall n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(n-1)^2}$. Comme $\frac{1}{2(n-1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2(n-1)^2}$ converge par la règle de l'équivalent positif et enfin la série $\sum u_n$ converge par comparaison de termes positifs.

4. d. Utilisons le résultat de la question **3. b.** avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la question **4.** qui est bien une suite réelle décroissante telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge d'après **4. a.** et **4. c.**.

Ici, en utilisant (1), on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n+1}) = n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

Donc, d'après **3. b.**, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

[1] R. Apéry, alors professeur à l'université de Caen, a prouvé en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel. Mais on ne sait toujours pas exprimer la valeur exacte de $\zeta(3)$ à l'aide de fonctions usuelles.