Spé PC. **Interrogation de mathématiques n° 2 (30. 09. 2024).** **Durée : 35 mn.**

I. Définitions. `[8 points]`

1. Définition de la série produit (de Cauchy) de deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Enoncé du théorème sur le produit (de Cauchy) de deux séries absolument convergentes.

Application. • On admet que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Vérifier en utilisant le théorème sur le produit de deux séries absolument convergentes que : $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2$, $e^{u+v} = e^u e^v$.

2. Enoncé du critère de comparaison série-intégrale.

Application. Prouver que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

3. Enoncer le critère des séries alternées et donner la majoration de la valeur absolue du reste R_n d'une série alternée vérifiant les hypothèses du critère.

II. Exercices. `[12 points]`

Exercice 1. • *On admet que pour tout* $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, $\arctan a - \arctan b = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$.

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \arctan(\frac{1}{1+n+n^2})$ et calculer sa somme.

Exercice 2. Montrer que la série complexe $\sum_{n\geq 1} (1 - \frac{1-i}{n})^{n^2}$ (où $i^2 = -1$) converge absolument.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

Exercice 4. • *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,1]$. *On admet que* $x + \frac{x(1-x)}{n} \in [0,1]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose : $f_n(x) = f(x + \frac{x(1-x)}{n})$.

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVU sur $[0,1]$ vers une fonction à préciser.

III. Bonus `[0.5 point]` Proposer une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et la série $\sum_{n\geq 1} u_n^{2024}$ diverge.