
Exercice 1 [n° 5-cours et une application]. 1. Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur I et (x_n) une suite *quelconque* de I. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

2. *Application.* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$, telle que : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Etudier la converge simple et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = f(nx)$.

Une solution. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) CVU vers f sur I, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\underline{\forall x \in I}$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $(*)$. En considérant $x = x_n$ dans $(*)$ on a en particulier : $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $|(f_n(x_n) - f(x_n)) - 0| \leq \varepsilon$. On reconnait alors la définition formalisée de : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

2. *i*) Les hypothèses faites sur f impliquent que (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle θ (distinguer deux cas : $x = 0$, $x > 0$).

ii) Utilisons 1. et un raisonnement par l'absurde pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers θ sur $\mathbb{R}^+$. Par hypothèse sur f, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Considérons $x_n = \frac{x_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) est une suite de $]0, +\infty[$. Si (f_n) CVU vers θ sur $\mathbb{R}^+$, d'après 1. on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) - \theta(x_n) = 0$ ce qui est faux car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) - \theta(x_n) = f(x_0)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (f_n(x_n) - \theta(x_n)) = f(x_0) \neq 0$.

Exercice 2 [n° 15-TD 4]. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur I.

Etudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout $x \in I$, $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{1+f_n^2(x)}$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$.

a) Etude de la convergence simple sur I de la suite de fonctions (g_n).

Comme la suite (f_n) CVU vers f sur I, la suite (f_n) CVS vers f sur I, c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On en déduit immédiatement, d'après les opérations sur les limites de suites convergentes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$. Autrement dit, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur I vers g.

b) La suite de fonctions (g_n) *converge-t-elle uniformément vers g sur I ?*

Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il un entier N (ne dépendant que de ε) tel que $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$?

Commençons par transformer $g_n(x) - g(x)$ en mettant $f_n(x) - f(x)$ en facteur :

$$\begin{aligned} g_n(x) - g(x) &= \frac{f_n(x)}{1+f_n^2(x)} - \frac{f(x)}{1+f^2(x)} = \frac{f_n(x) - f(x) + f_n(x)f^2(x) - f_n^2(x)f(x)}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \\ &= \frac{f_n(x) - f(x) + f_n(x)f(x)(f(x) - f_n(x))}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \\ &= \frac{(f_n(x) - f(x))(1 - f_n(x)f(x))}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \end{aligned}$$

On déduit des propriétés de la valeur absolue que :

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \frac{|f_n(x) - f(x)||1 - f_n(x)f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \\ &\leq \frac{|f_n(x) - f(x)|\,(1 + |f_n(x)||f(x)|)}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + \frac{|f_n(x) - f(x)||f_n(x)||f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \\ &\leq \frac{5}{4}|f_n(x) - f(x)| \ (*) \end{aligned}$$

car pour tout réel a, $a \leq \frac{1}{2}(1+a^2)$.

Comme la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe un entier N (ne dépendant que de ε) tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{4}{5}\varepsilon$$

et pour cet entier N, on obtient avec $(*)$ que :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Donc la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers g sur I.

Exercice 3. [1. du n° 21-TD 4]. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (1 - \dfrac{x}{n})^n$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \geq n$.

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Une solution. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit $N(x)$ l'entier $\lfloor x \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N(x)$, on a : $x < n$ et donc $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} = \lim_{n\to+\infty} e^{n(-\frac{x}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}))} = \lim_{n\to+\infty} e^{-x + o_{+\infty}(1)} = e^{-x}.$$

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x(1 + n^a e^{-nx}).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Déterminer les réels a pour lesquels la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})\, dx$.

Une solution. **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Et, pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a e^{-nx} = 0$ (propriété de croissance comparée). En conclusion, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $d_n(x) = f_n(x) - f(x) = n^a x e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction (positive) d_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ d_n'(x) = n^a(1 - nx)e^{-nx}.$$

Comme $d_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{n}$, d_n est donc croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$.
Par conséquent, d_n est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et plus précisement :

$$s_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}^+} d_n(x) = d_n(\frac{1}{n}) = n^{a-1}e^{-1}.$$

Par définition, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f si et seulement si $a < 1$.

3. Dans cette question, $a = \frac{1}{2}$ et la suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, qui, d'après **2.**, converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[0, 1]$, vers $f : x \mapsto x$.
Donc, d'après le théorème d'interversion limite et intégrale, on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Remarque. On peut retrouver ce résultat en calculant I_n, à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n \quad = \quad \int_0^1 x\, dx + \sqrt{n} \int_0^1 x e^{-nx}\, dx = \frac{1}{2} + \sqrt{n}\big([-x\frac{e^{-nx}}{n}]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\, dx\big) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1 - e^{-n})$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$.